Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 72 (1972)

Artikel: Berechnung der Wurzeln eines Polynoms mittels Störungsrechnung

Autor: Kellenberger, Willy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967087

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Berechnung der Wurzeln eines Polynoms mittels Störungsrechnung

Von Willy Kellenberger, Zürich

In der vorliegenden Arbeit soll das Problem der approximativen Berechnung der Wurzeln eines Polynoms unter Verwendung von Störungsrechnung gelöst werden. Im Gegensatz zu den meisten gängigen Methoden, wie Newton, Nickel, Graeffe usw., werden bei diesem Verfahren alle Wurzeln simultan bestimmt, womit die Deflation und damit die bei der numerischen Berechnung von ihr herrührenden Fehler dahinfallen.

1. Problemstellung

Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades p(z) durch n-Funktionswerte $f_i = p(z_i)$ in n paarweise verschiedenen Stützstellen z; und durch die zusätzliche Bedingung, dass der Höchstkoeffizient von p(z) gleich 1 sein soll:

$$\begin{aligned} &\textit{gegeben}\ f_i = p(z_i) \qquad i = 1, \ldots, n \\ &\quad \text{wobei } \vec{f}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n \\ &\qquad z_i \neq z_j \text{ für } i \neq j \text{ und } i, j = 1, \ldots, n \\ &\quad p(z) = z^n + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Gesucht sind die n-Nullstellen $\vec{w}$ von p(z), d. h. die n-Zahlen w_i in der komplexen Ebene, für die gilt:

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - w_i)$$
$$\text{wobei } \vec{w} \in \mathbb{C}^n.$$

2. Allgemeine Beschreibung des Lösungsverfahrens

Iterativ wird p(z) durch ein Polynom

$$q^{(m)}(z) \qquad m = 1, 2, \ldots \text{ (Höchstkoeffizient 1)}$$

approximiert, von dem wir eine Zerlegung in Partialpolynome kennen und das im Limes mit p(z) übereinstimmt:

$$\lim_{m \to \infty} q^{(m)}(z) = p(z),$$

oder was gleichbedeutend ist mit

$$\lim_{m \to \infty} q^{(m)}(z_i) = p(z_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Numerisch reduziert sich die Lösung darauf, ein Polynom $q^{(m)}(z)$ zu suchen, dessen Funktionswerte an den ursprünglich gegebenen Stützstellen «möglichst genau» mit den Funktionswerten von p(z) übereinstimmen.

3. Norm

Wir definieren zu jedem $q^{(m)}(z)$ den folgenden Vektor:

$$d_i^{(m)} = \frac{p(z_i) - q^{(m)}(z_i)}{p(z_i)} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Die Abweichung des Iterationspolynoms $q^{(m)}(z)$ vom ursprünglich gegebenen Polynom p(z) wird nun mit der folgenden Norm gemessen:

$$\|\vec{d}^{(m)}\| = \sum_{i=1}^{n} |d_i^{(m)}|. \tag{2}$$

Wird nun eine Folge von Polynomen $q^{(m)}(z)$ aufgebaut, deren Norm $\|\vec{d}^{(m)}\|$ monoton mit wachsendem m gegen Null konvergiert, so muss $q^{(m)}(z)$ monoton mit wachsendem m gegen p(z) konvergieren.

4. Darstellung der Polynome

Das gegebene Polynom wird entsprechend der Problemstellung nach Lagrange dargestellt:

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z - z_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z_i - z_j)} . \tag{3}$$

Das Iterationspolynom $q^{(m)}(z)$ setze sich zusammen aus s Partialpolynomen $q_k^{(m)}(z)$ vom Grade t_k, deren Höchstkoeffizient immer gleich 1 sein soll:

$$q^{(m)}(z) = \prod_{k=1}^{s} q_k^{(m)}.$$

Soll auch das Iterationspolynom $q^{(m)}$ nach Lagrange dargestellt werden, so müssen vorerst die Stützstellen $\vec{z}$ eindeutig auf die Partialpolynome aufgeteilt werden:

jedem Polynom $q_k^{(m)}$ vom Grade t_k werden t_k-Stützstellen (nach geeigneter Umnumerierung)

$$L_k = \left\{ z_{T_k+1}, \ldots, z_{T_{k+1}} \right\}$$

so zugewiesen, dass gilt:

$$\begin{aligned} &T_{k+1} - T_k = t_k \\ &\bigcap (L_i, L_j) = 0 \qquad\qquad i, j = 1, \ldots, s; \quad i \neq j, \\ &\bigcup_{i=1}^{s} L_i = \vec{z} \end{aligned}$$

d. h. $\vec{z}$ wird eindeutig auf den Vektor $\vec{L}$ abgebildet.

Jedes Partialpolynom $q_k^{(m)}$ wird nun als Lagrange-Polynom an den ihm zugewiesenen Stützstellen L_k aufgebaut

$$q_k^{(m)} = \prod_{j=T_k+1}^{T_{k+1}} (z - z_j) + \sum_{j=T_k+1}^{T_{k+1}} q_k^{(m)}(z_j) \frac{\prod\limits_{(i)} (z - z_i)}{\prod\limits_{(i)} (z_j - z_i)}$$

$$(i) : i = T_k + 1, \ldots, T_{k+1}; \quad i \neq j.$$

Da die Abbildung von $\vec{z}$ auf $\vec{L}$ eindeutig ist, ex. zu jedem z_j ein

$$g_j^{(m)} = q_k^{(m)}(z_j) \qquad \begin{aligned} j &= T_k + 1, \ldots, T_{k+1} \\ k &= 1, \ldots, s \end{aligned}$$

und ein

$$h_j(z) = \frac{\prod\limits_{(i)} (z - z_i)}{\prod\limits_{(i)} (z_j - z_i)}.$$

Man erhält somit

$$q_k^{(m)}(z) = \prod_{j=T_k+1}^{T_{k+1}} (z - z_j) + \sum_{j=T_k+1}^{T_{k+1}} g_j^{(m)} \cdot h_j(z) \tag{4}$$

und damit

$$q^{(m)}(z) = \prod_{k=1}^{S} \left[\prod_{j=T_k+1}^{T_{k+1}} (z - z_j) + \sum_{j=T_k+1}^{T_{k+1}} g_j^{(m)} h_j(z) \right].$$

Bemerkung

Halten wir die Aufteilung von $q^{(m)}$ in die Partialpolynome und die Abbildung von $\vec{z}$ auf $\vec{L}$ fest, so wird das Polynom $q^{(m)}(z)$ eindeutig beschrieben durch den Vektor $\vec{g}^{(m)}$, und damit ist der Vektor $\vec{d}^{(m)}$ nur eine Funktion von $\vec{g}^{(m)}$:

$$\vec{d}^{(m)} = \vec{d}\,(\vec{g}^{(m)}).$$

5. *Variation von $\vec{g}^{(m)}$ und Entwicklung von $\vec{d}^{(m)}$*

Variiert man

$$\vec{g}^{(m)} \text{ zu } \vec{g}^{(m)} + \lambda \Delta \vec{g},$$

wobei: $\lambda =$ positiver reeller Parameter,

$\Delta \vec{g} \in \mathbb{C}^n$,

und entwickelt jede Komponente von $\vec{d}\,(\vec{g}^{(m)} + \lambda\, \Delta\, \vec{g})$ nach Potenzen von λ, so erhält man

$$d_k(\vec{g}^{(m)} + \lambda \Delta \vec{g}) = d_k(\vec{g}^{(m)}) + \left(\operatorname{grad}\left(d_k(\vec{g})\right)\Big|_{\vec{g}^{(m)}}, \Delta \vec{g} \right) \cdot \lambda \tag{5}$$

$$+ \sum_{t=2}^{n} \lambda^t \underbrace{\left[\sum_{*} \frac{\partial^{(t)} d_k(\vec{g})}{\partial g_{j_1} \dots \partial g_{j_t}} \Bigg|_{\vec{g}^{(m)}} \prod_{i=1}^{t} \Delta g_{j_i} \right]}_{r(k,t).}$$

* Summation über alle Permutationen von $j_1, \dots, j_t$ in den Grenzen 1 bis n, wobei $j_i < j_u$ falls $i < u$.

Wir vernachlässigen alle Summanden in λ^t mit $t \geqslant 2$ und bestimmen $\Delta \vec{g}$ aus dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\left(\operatorname{grad}\left(d_k(\vec{g})\right)\Big|_{\vec{g}^{(m)}}, \Delta\vec{g}\right) + d_k(\vec{g}^{(m)}) = 0 \qquad (6)$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

Die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, bei geschickter Aufspaltung von $q^{(m)}$ in Partialpolynome immer regulär.

Setzt man $\Delta \vec{g}$ aus (6) in der Gleichung (5) ein, so erhält man

$$d_k(\vec{g}^{(m)} + \lambda\Delta\vec{g}) = d_k(\vec{g}^{(m)})\,(1 - \lambda) + \sum_{t=2}^{n} \lambda^t r(k,t),$$

und damit gilt

$$||\vec{d}(\vec{g}^{(m)} + \lambda\Delta\vec{g})|| \leqslant ||\vec{d}(\vec{g}^{(m)})|| \cdot (1 - \lambda) + \sum_{t=2}^{n} \lambda^t \sum_{k=1}^{n} r(k,t).$$

Da, wie im Konvergenzbeweis gezeigt werden wird, obere Schranken für

$$\sum_{k=1}^{n} |r(k,t)| < K_t \qquad t = 2, \ldots, n$$

angegeben werden können, kann der Parameter λ so gewählt werden, dass

$$\sum_{t=2}^{n} \lambda^{t-1} \sum_{k=1}^{n} |r(k,t)| \leqslant \frac{1}{2}\, ||\vec{d}(\vec{g}^{(m)})||. \qquad (7)$$

Für $\Delta \vec{g}$ aus Gleichung (6) und λ aus (7) gilt damit

$$||\vec{d}(\vec{g}^{(m)} + \lambda\Delta\vec{g})|| \leqslant ||\vec{d}(\vec{g}^{(m)})|| \cdot (1 - \frac{\lambda}{2}) < ||\vec{d}(\vec{g}^{(m)})||. \qquad (8)$$

Setzt man

$$\vec{g}^{(m+1)} = \vec{g}^{(m)} + \lambda\Delta\vec{g}, \qquad (9)$$

so ist ein neues Iterationspolynom $q^{(m+1)}$ gefunden worden, dessen Norm gegenüber derjenigen von $q^{(m)}$ abgenommen hat.

6. *Untersuchung der Koeffizientenmatrix aus (6)*

Für diese Untersuchung müssen noch die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

– Wurzeln der Partialpolynome $q_k^{(m)}$

$$\vec{u}^{(m)} = \left\{ u_i^{(m)} \,\middle|\, q_k^{(m)} = \prod_{i=T_k+1}^{T_{k+1}} (z - u_i^{(m)});\ \ k = 1, \ldots, s \right\},$$

Koeffizientenmatrix aus (6)

$$A^{(m)} = \left\{ a_{ik} = \left(\operatorname{grad}\left(d_i^{(m)}(\vec{g}) \right) \Big|_{\vec{g}^{(m)}} \right)_k \right\}.$$

a) $s = n$

Ist $s = n$, d.h. ist das Iterationspolynom $q^{(m)}$ ein Produkt von lauter linearen Partialpolynomen, so wird die Determinante von $A^{(m)}$ zu

$$\operatorname{Det}(A^{(m)}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} p(z_i)} \prod_{i=1}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n} (z_i - z_j)(u_j^{(m)} - u_i^{(m)}) \right].$$

Da nach Voraussetzung $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ wird $A^{(m)}$ dann und nur dann singulär, wenn

$$u_i^{(m)} = u_j^{(m)} \text{ für } i, j = 1, \ldots, n \text{ und } i \neq j.$$

b) $s < n$

Auch für den Fall, wo sich $q^{(m)}$ nicht aus lauter linearen Polynomen zusammensetzt, lässt sich die Determinante von $A^{(m)}$ explizite angeben als

$$\operatorname{Det}(A^{(m)}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} p(z_i)} \prod_{i=1}^{s-1} \left\{ \prod_{j=T_i+1}^{T_{i+1}} \left[\prod_{k=T_{i+1}+1}^{n} (z_j - z_k)(u_k^{(m)} - u_j^{(m)}) \right] \right\}.$$

Die Matrix $A^{(m)}$ wird also dann und nur dann singulär, falls ein $u_i^{(m)}$ und $u_j^{(m)}$ mit $i \neq j$ so ex, dass

$$u_i^{(m)} = u_j^{(m)} \text{ und } z_i, z_j \notin \text{im gleichen } L_k,$$

d.h. $A^{(m)}$ bleibt regulär, falls zwei oder mehrere Nullstellen desselben Partialpolynoms $q_k^{(m)}$ miteinander übereinstimmen.

Folgerung

Stimmen die Wurzeln zweier verschiedener Partialpolynome überein, so lässt sich durch die Zusammenfassung der beiden zu einem einzigen neuen Partialpolynom erreichen, dass die Matrix $A^{(m)}$ regulär wird.
Die Zusammenfassung zweier Partialpolynome $q_i^{(m)}$ und $q_k^{(m)}$ zu einem neuen

$$\bar{q}_t^{(m)} = q_i^{(m)} q_k^{(m)} \tag{10}$$

übt keinen Einfluss auf die Norm $\| d^{(m)} \|$ aus.

$\vec{g}^{(m)}$ geht dabei über in

$$\bar{g}_j^{(m)} = g_j^{(m)} \cdot q_i^{(m)}(z_j) \qquad j = T_i + 1, \ldots, T_{i+1}$$
$$\bar{g}_j^{(m)} = g_j^{(m)} \cdot q_k^{(m)}(z_j) \qquad j = T_k + 1, \ldots, T_{k+1},$$

die übrigen $g_j^{(m)}$ werden von der Zusammenfassung nicht berührt.

Bemerkungen

A. Eine Zusammenfassung zweier (linearer) Partialpolynome muss bei allgemeiner Wahl des Startpolynoms $q^{(0)}$ äusserst selten vorgenommen werden, da das hier beschriebene Verfahren bei der numerischen Berechnung eine mehrfache Nullstelle oder eine Wolke von k-Nullstellen von p(z) durch ebenso viele auf einem Kreis um das Zentrum der Wolke *getrennt* angeordnete approximative Nullstellen wiedergibt.
Fallen zufälligerweise im Verlaufe der Iteration zwei Wurzeln von $q^{(m)}$ zusammen, so kann durch eine Veränderung von λ eine Zusammenfassung umgangen werden.

B. Solange $q^{(m)}$ sich aus lauter linearen Partialpolynomen zusammensetzt, lassen sich die Elemente der inversen Matrix

$$B^{(m)} = A^{(m)^{-1}}$$

explizite angeben als

$$b_{ik} = p(z_k) \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z_j - u_i^{(m)})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z_k - z_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (u_j^{(m)} - u_i^{(m)})}.$$

7. Das Verfahren

Aus der in den Abschnitten 1 bis 6 hergeleiteten Theorie lässt sich das folgende Verfahren zur Berechnung der Nullstellen eines Polynoms ableiten

Start: Beliebige Wahl eines Startpolynoms $q^{(o)}(z)$ als Produkt von lauter linearen Partialpolynomen

$$q^{(o)}(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - u_i^{(o)}) = \prod_{i=1}^{n} \left[(z - z_i) + g_i^{(o)}\right].$$

Iteration: Die Anwendung von (9) auf $\vec{g}^{(m)}$ für $m = 0, 1, \ldots$ ergibt eine Folge von Iterationspolynomen $q^{(m)}(z)$. Fallen zwei Wurzeln zweier verschiedener Approximationspolynome zufälligerweise zusammen, so werden die beiden Polynome gemäss (10) zu einem neuen zusammengefasst.

Abbruch: Ist für $m = t$ die Norm $\| \vec{d}^{(t)} \|$ kleiner geworden als ein vorgegebenes eps < 0, so wird der Iterationsprozess abgebrochen.

Als Resultat erhält man ein Polynom $q^{(t)}(z)$, das an allen n-vorgegebenen Stützstellen die Bedingung

$$\frac{|p(z_i) - q^{(t)}(z_i)|}{|p(z_i)|} < \text{eps}$$

erfüllt und von dem wir die Aufspaltung in s Partialpolynome kennen:

$$q^{(t)}(z) = \prod_{i=1}^{s} q_i^{(t)}(z).$$

Sollte der Grad t_k eines oder mehrerer dieser Partialpolynome grösser als zwei sein, so wird das Verfahren auf jedes dieser Partialpolynome von neuem angewendet.
Wie schon unter Abschnitt 6 erwähnt wurde, lassen sich die Zusammenfassungen in der praktischen Rechnung umgehen, womit p(z) approximiert wird durch ein Polynom, von dem wir die Aufspaltung in seine n-linearen Partialpolynome und damit alle n Wurzeln kennen.

8. Skizzierung des Konvergenzbeweises

Abschätzung von $|r(k, t)|$ aus (5)

Die r(k,t) sind endliche Summen von endlichen Produkten in den z_i, $g_i^{(m)}$ und $\Delta g_i^{(m)}$.
Ausgehend von $\|\vec{d}^{(0)}\|$, den z_i und einer unteren Schranke für die $\mathrm{Det}(A^{(m)})$ lassen sich globale Schranken S_1 bzw. S_2 für alle

$$\left.\begin{array}{l} |g_i^{(m)}| < S_1 \\ |\Delta g_i^{(m)}| < S_2 \end{array}\right. \qquad i = 1, \ldots, n; \quad m = 0, 1, \ldots$$

angeben.

Unter Verwendung von S_1 und S_2 lassen sich obere Schranken K_t für

$$\sum_{k=1}^{n} \left| r(k,t) \right| < K_t \qquad t = 2, \ldots, n,$$

ableiten, wobei diese Schranken für alle m = 0, 1, ... gültig sind.

Abschätzung der relativen Abnahme von $\|\vec{d}^{(m+1)}\|$ gegenüber $\|\vec{d}^{(m)}\|$

Setzt man

$$\lambda^{(m)} = \min_t \sqrt[t-1]{\frac{\|\vec{d}^{(m)}\|}{2^t K_t}}$$

so wird

$$\begin{aligned}\|\vec{d}^{(m+1)}\| &< \|\vec{d}^{(m)}\| \cdot (1-\lambda^{(m)}) + \sum_{t=2}^{n} \lambda^{(m)^t} K_t \\ &\leqslant \|\vec{d}^{(m)}\| \cdot (1-\lambda^{(m)}) + \lambda^{(m)} \|\vec{d}^{(m)}\| \sum_{t=2}^{n} \frac{1}{2^t} \\ &< \|\vec{d}^{(m)}\| \cdot (1-\frac{\lambda^{(m)}}{2}).\end{aligned}$$

Die $\|\vec{d}^{(m)}\|$ sind, solange iteriert wird, wegen des Abbruchkriteriums nach unten beschränkt durch eps, woraus sich eine untere Schranke für $\lambda^{(m)}$ ergibt:

$$\lambda_{eps} = \min_t \sqrt[t-1]{\frac{eps}{2^t K_t}} \leqslant \lambda^{(m)} \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Damit erhalten wir aber eine untere Schranke für die relative Abnahme

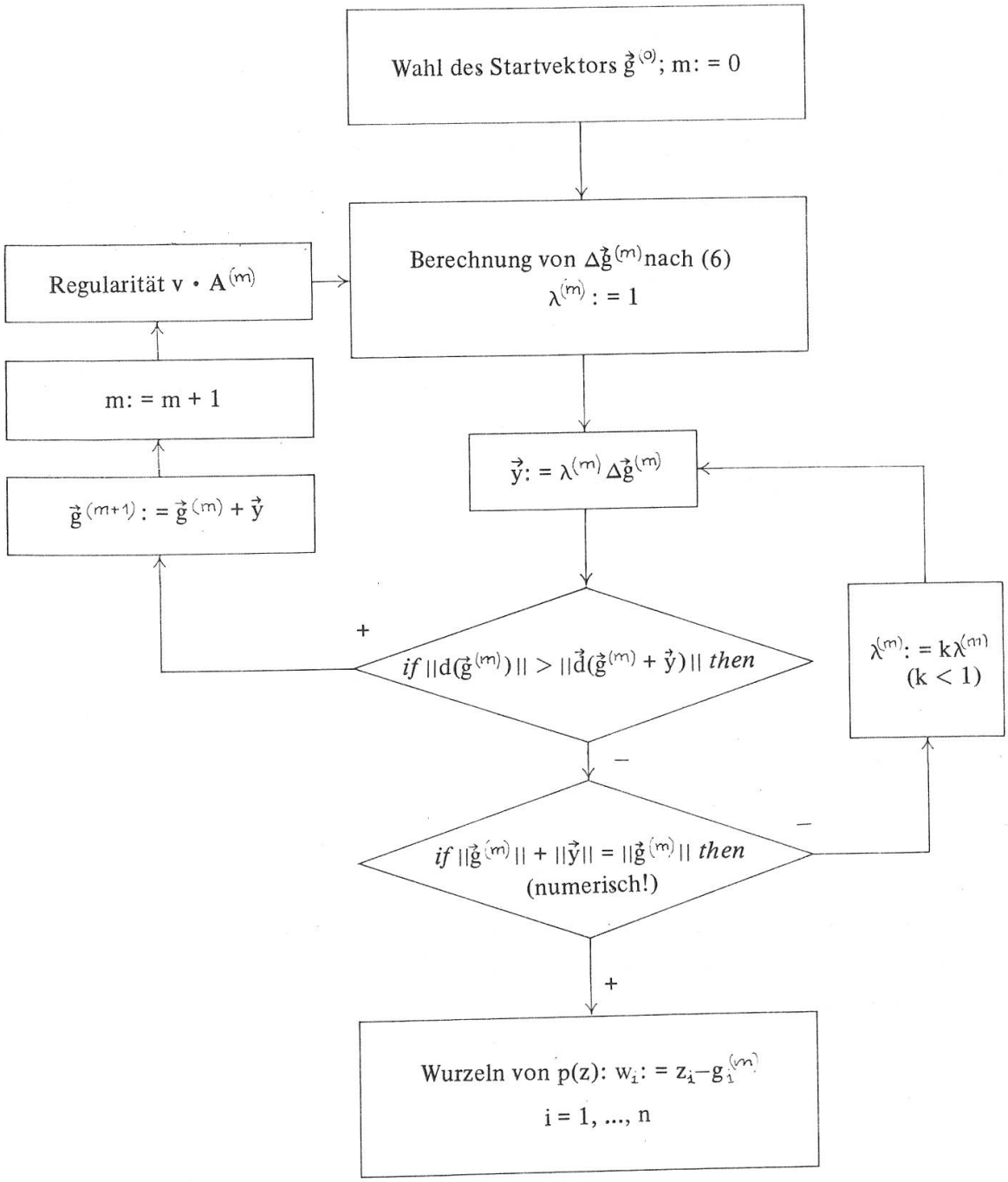
$$\|\vec{d}^{(m+1)}\| \leqslant \|\vec{d}^{(m)}\| \cdot \left(1 - \frac{\lambda_{eps}}{2}\right),$$

die uns zusätzlich noch eine obere Schranke für die maximale Anzahl der notwendigen Iterationsschritte angibt:

$$\text{Anz. Iter. Schr.} < \frac{\ln\left(\frac{eps}{\|\vec{d}^{(0)}\|}\right)}{\ln(1-\frac{\lambda_{eps}}{2})}.$$

9. Praktische Durchführung des Rechenprozesses

Der praktische Ablauf des Verfahrens lässt sich durch das folgende Schema darstellen:


Wahl des Startvektors $\vec{g}^{(0)}$; m: = 0
Berechnung von $\Delta\vec{g}^{(m)}$ nach (6)
$\lambda^{(m)}$: = 1
Regularität v • $A^{(m)}$
m: = m + 1
$\vec{g}^{(m+1)}$: = $\vec{g}^{(m)} + \vec{y}$
$\vec{y}$: = $\lambda^{(m)} \Delta\vec{g}^{(m)}$
+
if $||d(\vec{g}^{(m)})|| > ||\vec{d}(\vec{g}^{(m)} + \vec{y})||$ *then*
$\lambda^{(m)}$: = $k\lambda^{(m)}$
(k < 1)
–
if $||\vec{g}^{(m)}|| + ||\vec{y}|| = ||\vec{g}^{(m)}||$ *then*
(numerisch!)
–
+
Wurzeln von p(z): w_i: = $z_i - g_i^{(m)}$
i = 1, ..., n

Erklärungen zu den einzelnen Rechenschritten

Wahl des Startvektors $\vec{g}^{(o)}$

Sind Näherungswerte $\vec{v}$ für die Wurzeln von p(z) bekannt, so setzen wir

$$\vec{g}^{(0)} = \vec{z} - \vec{v},$$

andernfalls ist es am günstigsten, $\vec{g}^{(o)}$ so zu wählen, dass die zugehörigen Wurzeln $\vec{u}^{(o)}$ ein konstantes Vielfaches der Einheitswurzeln von

$$z^n - 1 = 0$$

darstellen.

Wahl von $\lambda^{(m)}$

$\lambda^{(m)}$ wird im numerischen Algorithmus nicht aus der Gleichung (7) bestimmt, sondern bei jedem Iterationsschritt vorerst 1 gesetzt und, falls notwendig, so lange um den Faktor k verkleinert

$$\lambda^{(m)} := k\lambda^{(m)} \quad (k < 1),$$

bis

$$\|\vec{d}(\vec{g}^{(m)} + \lambda^{(m)} \Delta\vec{g}^{(m)})\| < \|\vec{d}(\vec{g}^{(m)})\|.$$

Die numerische Austestung hat ergeben, dass der Iterationsprozess für ein k in den Grenzen

$$0{,}25 \leqslant k \leqslant 0{,}75$$

je nach der Art der Polynome am schnellsten konvergiert.
(Für Polynome mit mehrfachen Nullstellen oder Wolken von Nullstellen sollte k klein, für Polynome mit deutlich getrennten Nullstellen gross gewählt werden.)

Abbruchkriterien

Als Abbruchkriterium wird nicht eine untere Grenze für $\|\vec{d}^{(m)}\|$ vorgeschrieben, sondern es wird verlangt, dass so lange iteriert wird, bis die Änderung an

$\vec{g}^{(m)}$, hervorgerufen durch den Korrekturvektor $\Delta \vec{g}^{(m)}$, innerhalb der Rechengenauigkeit vernachlässigbar klein geworden ist, d. h. bis numerisch

$$||\vec{g}^{(m)}|| \text{ und } ||\vec{g}^{(m)}|| + ||\lambda^{(m)} \Delta\vec{g}^{(m)}||$$

übereinstimmen.

Regularität von $A^{(m)}$

Fallen zwei Wurzeln des Iterationspolynoms $q^{(m)}$ zufälligerweise zusammen, so trennen wir diese durch eine Verkleinerung des Parameters $\lambda^{(m)}$. Die Austestung hat gezeigt, dass die Regularisierung von $A^{(m)}$ keinerlei Schwierigkeiten bereitet, sofern das Startpolynom $q^{(o)}$ genügend allgemein gewählt wird.

Austestung

Der vorliegende Algorithmus zur Bestimmung der Wurzeln eines Polynoms wurde in Algol programmiert und an einer grossen Zahl verschiedenartiger Polynome (Polynome mit: diskreten Wurzeln, mehrfachen Wurzeln, Wolken von Wurzeln usw.) mit gutem Erfolg ausgetestet. Seine Anwendung ist vor allem dann sinnvoll, wenn wir schon eine gute Näherung der Wurzeln von p(z) kennen. Der Nachteil des Algorithmus besteht darin, dass er einen bedeutend grösseren Rechenaufwand benötigt als beispielsweise das in [5] beschriebene Verfahren.

Literaturangaben

[1] *H. Rutishauser*, Zur Problematik der Nullstellenbestimmung bei Polynomen. Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra, edited by B. Dejon and P. Henrici (Wiley & Sons, New York 1969).

[2] *J. H. Wilkinson*, Rounding errors in algebraic processes. Englewood cliffs (N. J.): Prentice-Hall Inc., 1963.

[3] *B. Dejon* and *K. Nickel*, A Never Failing, Fast Convergent Root Finding Algorithm. Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra, edited by B. Dejon and P. Henrici (Wiley & Sons, New York 1969).

[4] *D. H. Lehmer*, A Machine Method for Solving Polynomial Equations, J. of the ACM *8* (1961).

[5] *W. Kellenberger*, Ein konvergentes Iterationsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms, ZAMP *21* (1970).

Ein konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung der Wurzeln eines Polynoms, Diss. Nr. 4653 der ETH (1971.

Zusammenfassung

Um alle n-Wurzeln eines Polynoms p, das durch n Stützwerte $p(z_i)$ an n paarweise verschiedenen Stützstellen z_i gegeben ist, simultan zu bestimmen, wird p iterativ durch eine Folge von Polynomen $q^{(m)}$, deren Wurzeln bekannt sind, so approximiert, dass $\|\vec{d}^{(m)}\| = \Sigma\ |p(z_i) - q^{(m)}(z_i)|\ /\ |p(z_i)|$ monoton gegen Null konvergiert. Die Folge $q^{(m)}$ geht im wesentlichen aus der Variation der $q^{(m)}(z_i)$ zu $q^{(m)}(z_i) + \lambda\, \Delta q_i^{(m)}$ hervor, wobei λ und die $\Delta q_i^{(m)}$ aus der Entwicklung von $\|\vec{d}^{(m)}\|$ nach Potenzen von λ bestimmt werden.

Summary

To determine simultaneously all the n roots of a polynomial p which is given by n supporting values $p(z_i)$ at n pairs of different points of support z_i, p is approximated iteratively by a series of polynomials $q^{(m)}$, the roots of which are known, whereby $\|\vec{d}^{(m)}\| = \Sigma\,|p(z_i) - q^{(m)}(z_i)|\ /\ |p(z_i)|$ converges monotoneously to zero. The series $q^{(m)}$ is essentially derived from the variation of $q^{(m)}(z_i)$, as related to $q^{(m)}(z_i) + \lambda\, \Delta q_i^{(m)}$, λ and $\Delta q_i^{(m)}$ being determined from the expansion of $\|\vec{d}^{(m)}\|$ according to the powers of λ.

Résumé

Afin de déterminer simultanément toutes les n racines d'un polynôme p, donné par les n ordonnées $p(z_i)$ de n différents points dans le plan complexe, l'auteur approche de p itérativement au moyen d'une suite de polynôme $q^{(m)}$, dont les racines sont connues, de telle sorte que

$$\|\vec{d}^{(m)}\| = \Sigma |p(z_i) - q^{(m)}(z_i)|\ /\ |p(z_i)|$$

converge uniformément vers zéro. La suite $q^{(m)}$ résulte en substance de la variation de $q^{(m)}(z_i)$ par rapport à $q^{(m)}(z_i) + \lambda\, \Delta\, q_i^{(m)}$ où λ et $\Delta\, q_i^{(m)}$ sont tirés du développement de $\|\vec{d}^{(m)}\|$ d'après les puissances de λ.

Riassunto

Per stabilire simultaneamente tutte le radici n di un polinomio p – dato con valori di appoggio $p(z_i)$ a punti di appoggio z_i, in coppie diverse nell'n – la p interativa è approssimata con una successione di polinomi $q^{(m)}$, le radici dei quali sono conosciute, in modo tale che $\|\vec{d}^{(m)}\| = \Sigma\, |p(z_i) - q^{(m)}(z_i)| \,/\, |p(z_i)|$ converge monotonamente verso lo zero. La successione $q^{(m)}$ risulta essenzialmente dalla variazione dalla $q^{(m)}(z_i)$ alla $q^{(m)}(z_i) + \lambda\, \Delta\, q_i^{(m)}$, tenuto conto che λ e la $\Delta\, q_i^{(m)}$ sono stabilite dall'evoluzione di $\|\vec{d}^{(m)}\|$ secondo potenze di λ.