Betrachtungen zur Näherungsformel von Lidstone

B.
Wissenschaftliche Mitteilungen*

Betrachtungen zur Näherungsformel von Lidstone

Von Heinrich Jecklin, Zürich

Herrn Prof. Dr. P. Nolfi zum 70. Geburtstag gewidmet

Die Näherungsformel von Lidstone für die Prämie der gemischten Versicherung auf zwei verbundene Leben lautet bekanntlich

$$P_{xy:\overline{n}|} \sim P_{x:\overline{n}|} + P_{y:\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}, \tag{1}$$

woraus

$$\frac{1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}. \tag{2}$$

Für $i = 0$ folgt hieraus insbesondere

$$\frac{1}{\ddot{e}_{xy:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\ddot{e}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{e}_{y:\overline{n}|}} - \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Wie Verfasser gezeigt hat, lässt sich auf Basis von (2) leicht nachweisen, dass die Lidstonesche Näherung auch für das Deckungskapital gilt [1], nämlich

$${}_tV_{xy:\overline{n}|} \sim {}_tV_{x:\overline{n}|} + {}_tV_{y:\overline{n}|} - {}_tV_{\overline{n}|}. \tag{4}$$

---

* Anmerkung des Redaktors:
Die Beiträge der Herren Jecklin und Schaetzle sind Herrn Prof. P. Nolfi zu seinem 70. Geburtstag gewidmet. Dem Jubilar, während dessen Redaktionstätigkeit bei den «Mitteilungen» eine reiche Auswahl interessanter Arbeiten erschienen ist, seien auch die herzlichsten Glückwünsche seines Nachfolgers entboten.
Mit den in diesem Heft publizierten Beiträgen der Herren Frauenfelder, Kaiser und Steinmann/Cleuvenot/Stampfli wird die Reihe der Arbeiten abgeschlossen, die Herrn Prof. H. Ammeter zu seinem 60. Geburtstag gewidmet sind.

Lidstone selbst hat seine Approximation, die an sich plausibel ist, lediglich empirisch erhärtet [2]. Verfasser hat gezeigt, dass sich Approximationen dieser Art auf algebraischem Weg begründen lassen [3]. Daraus folgt, dass die Lidstonesche Näherung nicht nur bei der gemischten Versicherung Anwendung finden kann, sondern ausgedehnt werden kann auf Versicherungswerte beschränkter Dauer n, die auf Tafeln mit zwei Ausscheidehäufigkeiten irgendwelcher Art basieren [4]. Als Beispiel sei die temporäre Aktivitätsrente genannt:

$$\frac{1}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{a}^{i}_{x\cdot\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}, \tag{5}$$

mit

$$\ddot{a}^{i}_{x:\overline{n}|} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} l^{(i)}_{x+t}\, v^{t}}{l^{(i)}_{x}}, \qquad l^{(i)}_{x+1} = l^{(i)}_{x}\,(1-i_x).$$

Oder die Zusatzprämie für anomales Risiko mit konstanter multiplikativer Übersterblichkeit, also mit $q'_x = (1+\alpha)\,q_x$. Die genaue Zusatzprämie für 100prozentige Übersterblichkeit ist

$$Z^{(1)}_{x:\overline{n}|} = P^{*}_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|},$$

wobei $P^{*}_{x:\overline{n}|}$ auf Basis der Sterblichkeit $q^{*}_x = 2\,q_x$ *gerechnet ist. Nun* gilt sicher

$$P^{*}_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} \sim P_{xx:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|},$$

und weiter

$$P_{xx\cdot\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} \sim P_{x:\overline{n}|} - P_{\overline{n}|},$$

was aus (1) für $x = y$ folgt. Nachdem die Zusatzprämie der Übersterblichkeit proportional ist, gilt allgemein

$$Z^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} \sim \alpha\,(P_{x:\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}). \tag{6}$$

Wenn wir, als speziellem Beispiel, in (3) die Ausscheidehäufigkeit q durch $d = 1 - v$ ersetzen, so dass also

$$D_x\,(1-q_x)\,(1-d) = l_{x+1}\,v^{x+1} = D_{x+1},$$

folgt

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\ddot{e}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - \frac{1}{n}, \tag{7}$$

somit eine genäherte Darstellung des temporären Leibrentenwertes durch getrennte Komponenten für Sterblichkeit und Zinswirkung.

Wie wir bereits andernorts gezeigt haben, kann man die Lidstonesche Näherung auch auf geometrischem Weg interpretieren [5], und es soll im folgenden nochmals etwas ausführlicher darauf eingetreten werden. Es wird daraus zu ersehen sein, weshalb diese Approximation innerhalb gewisser Grenzen von x und n gezwungenermassen gute Resultate zeitigen muss. Da man eine Verbindungsrente mit $x \neq y$ gleichwertig durch eine Verbindungsrente auf das gemeinsame mittlere Alter ersetzen kann, genügt es offenbar, den Fall

$$\frac{1}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} \sim \frac{2}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \tag{8}$$

näher zu betrachten. Wir formen die Differenz

$$\Delta = \frac{1}{\ddot{a}_{xx\,\overline{n}|}} - \left(\frac{2}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\right)$$

um wie folgt

$$\Delta = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} + \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - 2\right). \tag{9}$$

Wenn wir hier in der Klammer den Quotienten $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} / \ddot{a}_{xx:\overline{n}|}$ näherungsweise durch $\ddot{a}_{\overline{n}|} / \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = X$ ersetzen, so haben wir es mit einer Hyperbel zu tun

$$Y = X + \frac{1}{X} - 2, \tag{10}$$

von welcher uns nur der Ast mit positivem X interessiert. Nun ist sicher

$$(X-1)^2 \geq 0$$

$$X^2 + 1 \geq 2X$$

also

$$X + \frac{1}{X} - 2 \geq 0.$$

Nachdem wir nur positive X in Betracht ziehen, verläuft die Kurve demnach ganz im ersten Quadranten des rechtwinkligen Koordinatensystems. Für $X = 1$, d.h. für $\ddot{a}_{\overline{1}|} / \ddot{a}_{x:\overline{1}|}$, berührt sie die X-Achse. Nachdem weiter $\ddot{a}_{\overline{n}|} / \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \geq 1$, kommen für unsere Betrachtungen nur X-Werte ≥ 1 in Frage, und es werden diese von einer Grössenordnung sein, die den Wert 1 nur wenig übersteigen. So beträgt beispielsweise $\ddot{a}_{\overline{n}|} / \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ für $x=35$ und $n = 35$ nach S.M. 58/63 zu 3½% lediglich 1,07836.

Wir können die Hyperbel

$$Y = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - 2 \tag{11}$$

auch für gegebenes n als Funktion von x, oder für festes x als Funktion von n darstellen. Wir wollen zeigen, dass $X = \ddot{a}_{\overline{n}|} / \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ sowohl mit x als mit n steigt.

Variation des Eintrittsalters; q_x, i und n gegeben:

Wir setzen voraus, dass $q_{x+\varkappa+\overline{t}|} > q_{x+t}$, dann ist ${}_tp_{x+\varkappa} < {}_tp_x$ und folglich

$$\begin{gathered} \ddot{a}_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+\varkappa\,:\,\overline{n}|} < \ddot{a}_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x\,:\,\overline{n}|} \\ \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+\varkappa\,:\,\overline{n}|}}, \end{gathered} \tag{12}$$

d. h. mit steigendem Eintrittsalter x steigt der Wert des Quotienten. Es ist daher zu vermuten, dass höhere Sterblichkeit auch ein Ansteigen des Quotienten nach sich zieht. Sei $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ auf Basis der Sterblichkeit q_{x+t} gerechnet, und $\ddot{a}^*_{x+\overline{n}|}$ auf Basis von $q^*_{x+\overline{t}|} > q_{x+t}$. Dann ist natürlich ${}_tp^*_x < {}_tp_x$, höhere Sterblichkeit bedingt also kleineren Rentenwert, somit

$$\begin{gathered} \ddot{a}_{\overline{n}|}\, \ddot{a}^*_{x\,:\,\overline{n}|} < \ddot{a}_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x\,:\,\overline{n}|} \\ \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\,:\,\overline{n}|}} < \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}^*_{x:\overline{n}|}}, \end{gathered} \tag{13}$$

d. h. mit steigender Sterblichkeit steigt der Wert des Quotienten. Sein Minimalwert, nämlich 1, würde sich bei der Sterblichkeit Null ergeben.

Und nun Variation der Dauer; x, q_x und i gegeben:

Behauptung: $$\frac{\ddot{a}_{\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} < \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \quad \text{für } m < n.$$

Wir setzen ${}_tp_x = a_t$, $v^t = b_t$, dann lautet die Behauptung

$$\sum_0^{m-1} b_t \sum_0^{n-1} a_t b_t < \sum_0^{m-1} a_t b_t \sum_0^{n-1} b_t .$$

Es ist aber sicher
$$\sum_0^{m-1} b_t \sum_m^{n-1} a_t\, b_t < \sum_0^{m-1} a_t\, b_t \sum_m^{n-1} b_t .$$

Denn beim Ausmultiplizieren entsprechen sich die beiden Seiten in den $m\,(n-m)$ Produkten $b_t\, b_s$ genau, was sofort ersichtlich, wenn $a_t = 1$ gesetzt wird. Dagegen haben die Faktoren a_t links durchwegs Indices $t \geq m$, rechts aber $t < m$, und nachdem a_t eine positive fallende Funktion, ist der Beweis für die letztgenannte Ungleichung erbracht. Nun addiert man beidseitig

$$\sum_0^{m-1} b_t \sum_0^{m-1} a_t\, b_t ,$$

dann ergibt sich

$$\sum_0^{m-1} b_t \left(\sum_0^{m-1} a_t b_t - \sum_m^{n-1} a_t b_t \right) < \sum_0^{m-1} a_t b_t \left(\sum_0^{m-1} b_t + \sum_m^{n-1} b_t \right),$$

d. h.
$$\ddot{a}_{\overline{m}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}_{x:\overline{m}|}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}, \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{14}$$

Mit steigender Dauer steigt also auch der Wert des Quotienten.
Vollständigkeitshalber sei noch die Variation des technischen Zinsfusses betrachter; x, q_x und n gegeben:
Es seien $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ und $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ zum technischen Zinsfuss i gerechnet und $\ddot{a}^*_{\overline{n}|}$ und $\ddot{a}^*_{x:\overline{n}|}$ zum Zinsfuss $i^* > i$. Dann ist $v^* < v$. Wir setzen $v^* = vw$, und es gilt $0 < v \leq 1$, $0 < w \leq 1$.
v^t und w^t sind also positive fallende Funktionen, und nach der Ungleichung von Steffenser [6] gilt

$$\sum a_t b_t c_t \sum c_t \geq \sum a_t c_t \sum b_t c_t ,$$

wenn a_t und b_t positive nicht zunehmende Funktionen und c_t eine positive Funktion. Somit

$$\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x\, v^t w^t \sum v^t > \sum {}_tp_x\, v^t \sum w^t v^t$$

$$\sum {}_tp_x\, v^{*t} \sum v^t > \sum {}_tp_x\, v^t \sum v^{*t}$$

$$\ddot{a}^*_{a:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n}|} > \ddot{a}_{x\cdot\overline{n}|}\, \ddot{a}^*_{\overline{n}|}$$

$$\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > \frac{\ddot{a}^*_{\overline{n}|}}{\ddot{a}^*_{x:\overline{n}|}}, \tag{15}$$

d.h. mit sinkendem Zinssatz steigt der Wert des Quotienten und wird am grössten für $i = 0$, m.a.W. $n \,/\, \ddot{e}_{x:\overline{n}|}$ ist maximal. Um etwas über den praktisch möglichen Maximalwert zu erfahren, basieren wir uns auf die alte Sterbetafel H^{m} der 20 englischen Gesellschaften (publiziert 1869).

So ergibt sich beispielsweise

x	30	30	40	50	60
n	10	40	30	20	10
$n \,/\, \ddot{e}_{x:\overline{n}|}$	1.038	1.273	1.264	1.244	1.176

Aus dem geschilderten Verhalten des Quotienten $\ddot{a}_{\overline{n}|} \,/\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ gegenüber Variation von Sterblichkeit und Zinsfuss ist zu vermuten, dass die Lidstonesche Näherung im allgemeinen um so besser ist, je moderner die Sterbetafel und je höher der technische Zinsfuss. Auch ist klar, dass eine Variation in der Sterblichkeit sich stärker auswirkt als eine solche im Zinsfuss, weil sie einseitig den Nenner des Quotienten beeinflusst.

Zwecks etwas grösserer Klarheit kehren wir zur Hyperbel (11) zurück. Um sie in den Klammerausdruck von (9) zurückzuführen, muss man offenbar den Ausdruck

$$\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) \tag{16}$$

hinzufügen. Wenn wir diesen letzteren Ausdruck für gegebenes x als Funktion von n betrachten, so ergibt sich eine Kurve, die im uns interessierenden Intervall quasi spiegelbildlich zur entsprechenden Hyperbel verläuft, aber mit etwas stärkerer Krümmung. Zum Beispiel:

$x = 35$, Grundlagen S.M. 58/63 zu 3½%.

n	$a = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - 2$	$b = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$	$a + b$
10	0.00004	–0.00001	0.00003
15	0.00009	–0.00004	0.00005
20	0.00018	–0.00010	0.00008
25	0.00034	–0.00025	0.00009
30	0.00062	–0.00069	–0.00007
35	0.00111	–0.00144	–0.00034

Die letzte Kolonne entspricht dem Klammerausdruck in (9).

Als wesentliches Faktum ergibt sich also, dass der Fehler der Lidstoneschen Approximation nicht einfach mit der Dauer n ansteigt, was man a priori zu vermuten geneigt wäre. Die Differenz zwischen genauem Wert und Näherung ist mit wachsendem n vorerst positiv bis zu einem Maximum ansteigend, fällt dann, wird bei bestimmtem n gleich Null und sinkt dann rasch ins Negative. Wir wollen die Dauer $n > 1$, für welche die Lidstonesche Näherung den genauen Prämienwert liefert, als kritische Dauer bezeichnen. Sie muss für gegebenes x – wie aus (9) zu ersehen – offenbar der Bestimmungsgleichung genügen

$$\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} + \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = 2. \tag{17}$$

Die kritische Dauer liegt bei Verwendung moderner Sterbetafeln in der Nähe von $n = 25$, hängt aber im speziellen natürlich noch von Eintrittsalter und Zinsfuss ab.

Wir haben zum Abschluss den Fehler, also die Differenz

$$\Delta = \frac{1}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} - \left(\frac{2}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\right), \tag{18}$$

unter verschiedenen Voraussetzungen berechnet und in nachstehender Tabelle zusammengestellt. Die Angaben verstehen sich in Promille.

Tafel	x	i	n						
			10	15	20	25	30	35	40
HM	40	0	0.134	0.245	0.364	0.459	0.457	0.200	
	30	0	0.077	0.136	0.198	0.266	0.325	0.350	0.282
S.M. 21/30	30	0	0.023	0.044	0.062	0.083	0.093	0.069	–0.048
S.M. 58/63	30	0	0.004	0.006	0.008	0.011	0.007	–0.016	
		2½%	0.002	0.004	0.006	0.003	0 010		
		4%	0.002	0.003	0.005	—	–0.019		

Literatur

[1] *H. Jecklin:* «Näherungswerte für die gemischte Versicherung mehrerer verbundener Leben». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. *46*, Heft 1.

[2] *G. Lidstone:* «On a method of approximately calculating net premiums for endowment assurances on two joint lives». Journal of the Institute of Actuaries, Vol. XXXIII, 1898.

[3] *H. Jecklin:* «Algebraische Begründung einer Klasse versicherungstechnischer Approximationen». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. *50*, Heft 1.
[4] *H. Jecklin:* «On Lidstone's approximate premium formula for endowment assurances on two jöint lives». Institute of Actuaries centenary assembly, 1948, Vol. II.
[5] *H. Jecklin:* «Über gewisse Approximationen der Versicherungsmathematik». Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. *1*, Heft 2.
[6] *A. Berger:* «Mathematik der Lebensversicherung». Verlag Julius Springer, Wien 1939, S. 101.

Zusammenfassung

Zurückgreifend auf frühere Publikationen über die Lidstonesche Näherungsformel für die Prämie der gemischten Versicherung auf verbundene Leben, wird dieselbe erneut untersucht und insbesondere gezeigt, dass sie auf Basis moderner Rechnungsgrundlagen innerhalb gewisser Grenzen bessere Resultate liefert als mit seinerzeitigen Sterbetafeln.

Summary

Referring to earlier publications on the approximation of Lidstone for the premium of an endowment insurance on several lifes the author discusses again this formula. In particular he shows that – within certain limits – by the use of modern technical bases it leads to more exact results than by working with older mortality tables.

Résumé

Revenant aux publications anciennes relatives à la formule d'approximation de Lidstone, qui s'applique aux primes mixtes pour des vies liées, on montre que la formule fournit de meilleurs résultats, dans un domaine limité, en s'appuyant sur des bases de calculs modernes que ceux obtenus à l'aide des tables de mortalité qu'on utilisait autrefois.

Riassunto

Riferendosi a pubblicazioni anteriori viene discussa di nuovo la formula approssimativa di Lidstone per il calcolo dei premi di un'assicurazione mista su diverse teste. In particolare si dimostra che i risultati ottenuti in precedenza per mezzi di anziane tavole di mortalità possono essere migliorati, entro certi limiti, applicando basi moderne di calcolo.