

# Bemerkungen zu den Invaliditätsmessungen

Autor(en): **Frauenfelder, Walter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **73 (1973)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555085>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Bemerkungen zu den Invaliditätsmessungen

Von Walter Frauenfelder, Zürich

## 1. Die zwei Methoden für den Aufbau der Invaliditätsversicherung

Die Invaliditätsversicherung stützt sich technisch auf Hauptgesamtheiten von Lebenden je mit dem Eintrittsalter  $[x]$  und der zugehörigen Absterbeordnung  $l_{[x]+t}$  sowie auf die in der Hauptgesamtheit enthaltene Nebengesamtheit der Aktiven mit der Aktivitätsordnung  $l_{[x]+t}^a$ . Als Differenz der beiden Ordnungen ergibt sich die Nebengesamtheit der Invaliden  $l_{[x]+t}^i$ . Es gilt:

$$l_{[x]+t} = l_{[x]+t}^a + l_{[x]+t}^i$$

Für die technische Behandlung der Invaliditätsversicherung werden in den Lehrbüchern über Versicherungsmathematik im allgemeinen die beiden folgenden – hier etwas vereinfacht dargestellten – Methoden angeführt:

### 1.1. Erste Methode

Die Invaliditätsversicherung nach der ersten Methode stützt sich auf die Begriffe

- (1)  $i_{[x]+t}$  = Wahrscheinlichkeit für einen Versicherten mit dem Eintrittsalter  $[x]$ , im Alter  $[x] + t$  invalid zu werden,
- (2)  $l_{([x]+t)+T}^i$  = Nebengesamtheit der Invaliden mit dem Eintrittsalter  $[x]$  und dem Invalidierungsalter  $(x + t)$ ;  $T = 0, 1, \dots$ ,
- (3)  $l_{[x]+u}^i$  = Invaliditätsordnung  
= Nebengesamtheit aller Invaliden mit dem Eintrittsalter  $[x]$  und dem erreichten Alter  $[x] + u$   
  
=  $\sum l_{([x]+t)+T}^i$  für alle  $t + T = u$ .

Die Invaliditätsordnung  $l_{[x]+u}^i$  verändert sich nicht nur entsprechend der Sterblichkeit der Invaliden, sondern auch entsprechend den Reaktivierungen. Diese

zweite Ursache wird in der Theorie vielfach der Einfachheit halber vernachlässigt, obschon sie – vor allem in den tieferen Altersgruppen – weitaus bedeutungsvoller ist als die Sterblichkeit.

Entsprechend den erwähnten Begriffen berechnet sich die anwartschaftliche Belastung für die jährlich vorschüssige Invaliditätsleistung 1 aus der Summe der invalid gewordenen Versicherten, multipliziert mit dem jeweiligen Barwert  $\ddot{a}_{(x+t):s-x-t}^i$  der laufend werdenden Invaliditätsleistung ( $s$  = Schlussalter):

$$\ddot{a}_{[x]:s-x}^{ai} = \sum_{t=0}^{s-x-1} \frac{v^t \cdot i_{[x]+t} \cdot l_{[x]+t}^a \cdot \ddot{a}_{(x+t):s-x-t}^i}{l_{[x]}^a} \quad (4)$$

### 1.2. Zweite Methode

Die Invaliditätsversicherung nach der zweiten Methode stützt sich auf den Begriff

$$j_{[x]+t} = \text{Wahrscheinlichkeit für einen Versicherten mit dem Eintrittsalter } [x], \text{ im Alter } [x]+t \text{ invalid zu sein.} \quad (5)$$

Für die Definition (5) gilt die Beziehung

$$j_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t}^a}{l_{[x]+t}} = \frac{l_{[x]+t}^i}{l_{[x]+t}} \quad (6)$$

Entsprechend diesen Begriffen berechnet sich die anwartschaftliche Belastung für die jährliche Invaliditätsleistung 1 als Differenz der Barwerte

$$\ddot{a}_{[x]:s-x}^{ai} = \ddot{a}_{[x]:s-x} - \ddot{a}_{[x]:s-x}^a \quad (7)$$

Bei Formel (4) und (7) ist die Fälligkeit der Leistungen je auf Beginn des Jahres angenommen; in der Praxis wird bei Formel (4) häufig die Invalidierung und die Leistung auf Mitte des Jahres angesetzt, woraus die Faktoren  $v^{t+\frac{1}{2}}$  und  $\ddot{a}_{(x+t+\frac{1}{2}):s-x-t-\frac{1}{2}}^i$  anstelle von  $v^t$  und  $\ddot{a}_{(x+t):s-x-t}^i$  resultieren. Es ist zu beachten,

dass Formel (7) nur für die Annahmen gemäss Ziffer 1. zutrifft. Es wird in diesem Zusammenhang z. B. auf *Nolfi: Neue Erfahrungen und Methoden in der Invaliditätsversicherung*, Heft 2/1970, verwiesen.

## 2: Die Invaliditätsmessungen

Entsprechend dem Aufbau der Invaliditätsversicherung stehen auch für die Invaliditätsmessungen zwei Methoden zur Verfügung:

### 2.1. Erste Methode

Meistens wird für Invaliditätsmessungen – so auch bei den gemeinsamen Messungen der Technischen Kommission der Vereinigung Schweizerischer Lebensversicherungs-Gesellschaften – die erste Methode 1.1. mit der Formel (4) verwendet. Als Grundlage dazu werden beobachtet

- (8a) die Häufigkeit, invalid zu werden  
(Quotient aus den beobachteten Invalidenklärungen und dem Bestand an Aktiven unter Risiko),
- (8b) die Sterblichkeit und die Reaktivierungen der Invaliden  
(Quotient aus den beobachteten Sterbefällen bzw. Reaktivierungen und dem Bestand aller Invaliden unter Risiko),
- (8c) Hilfsmessungen für den mittleren Invaliditätsgrad der Invaliden  
(Quotient aus der Anzahl der mit dem jeweiligen Invaliditätsgrad gewichteten Invaliditätsjahre aller beobachteten Invaliden und der Anzahl Invaliditätsjahre aller beobachteter Invaliden).

Die Messung (8a) – aufgeteilt nach Geschlecht und nach erreichtem Alter – kann mit guter Genauigkeit ohne Selektion nach Eintrittsalter durchgeführt werden, was sich sehr vereinfachend auswirkt. Als Resultat davon können die Werte  $i_{x+t}$  berechnet werden.

Die Messung (8b) muss neben der Aufteilung nach Geschlechtern auch nach dem Alter bei Beginn der Invalidität und nach der verflossenen Dauer seit Beginn der Invalidität abgestuft werden. Als Resultat davon können die Barwerte  $\ddot{a}_{(x+t):\overline{s-x-t}}^i$  berechnet werden. Die Messung zerfällt in zahlreiche Teilbestände.

Die Hilfsmessung (8c) klärt den Einfluss der Teilinvaliden ab; hiezu ist neben der Aufteilung nach Geschlechtern eine Aufteilung nach dem Alter bei Beginn der Invalidität notwendig. Diese Hilfsmessung (8c) könnte im übrigen durch Einbezug und Gewichtung der Teilinvaliden mit ihrem Invaliditätsgrad mit den Messungen (8a) und (8b) verknüpft werden, weshalb im folgenden nur noch von den Messungen (8a) und (8b) gesprochen wird.

Für die Auswertung der Messung werden die Werte  $l_{[x]+t}^a$  in der Formel (4) entsprechend den Methoden Cantelli und Jacob meistens durch die Werte  $l_{x+t}$  ersetzt.

## 2.2. Zweite Methode

Den Invaliditätsmessungen kann man auch Formel (7) zugrunde legen. Anstelle der beiden Messungen (8a) und (8b) ist dann nur eine Messung notwendig, nämlich

- (9) die Häufigkeit, invalid zu sein  
(Quotient aus dem Bestand an Invaliden unter Risiko und dem gesamten Bestand an Invaliditätsversicherungen unter Risiko).

Als Resultat der Messung können die Werte  $j_{[x]+t}$  berechnet werden. Die praktische Schwierigkeit der Messung liegt darin, dass die beobachteten Bestände  $l_{[x]+t}$  und  $l_{[x]+t}^i$  nach dem Eintrittsalter  $[x]$  aufgeteilt werden müssen, was eine Bestandeszersplitterung nach sich zieht. Diese Schwierigkeit ist jedoch bei gemeinsamen Messungen und bei Bestandesverwaltung mittels elektronischer Datenverarbeitung nicht allzu gross. Im übrigen ist die Bestandeszersplitterung bei der Messung (9) ähnlich wie bei Messung (8b).

Da vor allem die Auswertung der Messung (9) mittels Formel (7) bedeutend einfacher ist als bei den Messungen (8a) und (8b) mit der zugehörigen Formel (4), fragt man sich, wieso in der Praxis für Invaliditätsmessungen die erste Methode der zweiten Methode bevorzugt wird. Der Grund wird wohl unter anderem in der historischen Entwicklung der Invaliditätsversicherung zu suchen sein, welche in ihren Anfängen den Akzent eher auf die erste Methode als auf die zweite Methode setzte.

## 3. Der Einfluss der Wartefrist

Die Belastung der Invaliditätszusatzversicherung ist von der Dauer der Wartefrist abhängig, weshalb der beobachtete Bestand einheitliche Wartefristen haben muss. Um den Einfluss einer Verlängerung der Wartefrist zu berechnen, können wiederum beide Methoden 1.1. und 1.2. verwendet werden.

Bei Methode 1.1. müssen die Sterbefälle bzw. Reaktivierungen nach abgelaufener Dauer seit Beginn der Invalidität aufgeteilt werden, woraus sich die wegfallende Belastung bei Verlängerung der Wartefrist berechnen lässt.

Bei Methode 1.2. muss der Bestand an Invaliden nach abgelaufener Dauer seit Beginn der Invalidität aufgeteilt werden, woraus sich wiederum die wegfallende Belastung bei Verlängerung der Wartefrist berechnen lässt.

#### **4. Beispiel einer Invaliditätsmessung nach der zweiten Methode**

Es wird im folgenden ein Beispiel für eine Invaliditätsmessung nach der Methode 2.2. angegeben.

Obschon sich das Beispiel auf Beobachtungen aus einem Versicherungsbestand stützt, ist der beobachtete Bestand insbesondere in gewissen Altersgruppen viel zu klein, als dass er zur Ableitung einer signifikativen Tafel verwendet werden könnte. Die im folgenden angegebenen Werte für Invaliditätswahrscheinlichkeiten haben deshalb den Charakter von Beispielen und nicht von Grundlagen II. Ordnung.

Der beobachtete Bestand umfasst obligatorische und fakultative Einzel-Invaliditätszusatzversicherungen Schweiz bei der Rentenanstalt, Männer, Wartefrist 6 Monate, Prämienbefreiung oder Rente; er wurde aus der Summe der Bestände von 1965 bis und mit 1968 gebildet (Policenmessung). Teilweise invalide Versicherte sind entsprechend dem Invaliditätsgrad gezählt. Der Bestand erreichte rund 1 Million unter Risiko stehende Policen und rund 5000 invalide Versicherte. Damit der Bestand durch die Gliederung nach Eintrittsalter sich nicht zu stark zersplitterte, wurden «Zehner-Eintrittsaltersgruppen» gebildet, d.h. die Eintrittsalter 10–19, 20–29, 30–39 usw. sind je in eine Gruppe zusammengefasst. Die beobachteten Ergebnisse sind in Tabelle 1 enthalten. Die darin angegebene «Beobachtete Invaliditätshäufigkeit» bestimmte sich – für jedes Alter jeder Eintrittsaltersgruppe – aus dem Quotienten der Anzahl der beobachteten Invaliden und der entsprechenden Gesamtzahl an Invaliditätszusatzversicherungen unter Risiko. Die Beobachtungen zeigen als auffälliges Merkmal bei tieferen Eintrittsaltern, dass die Wahrscheinlichkeit, invalid zu sein, nur schwach ansteigt. Diese Erscheinung erhellt den starken Einfluss der Reaktivierungen in diesen Zonen. Die beschriebenen Beobachtungen dienten als Ausgangspunkt für das Modell von Invaliditätswahrscheinlichkeiten, wie sie in Tabelle 2 aufgeführt werden.

Über Invaliditätswahrscheinlichkeiten können folgende allgemeine Aussagen gemacht werden:

- a) Die Wahrscheinlichkeit, invalid zu sein, wird für ein bestimmtes Eintrittsalter mit steigendem Alter grösser werden. Die Zunahme ist – vor allem bei jungem Eintrittsalter – kurz nach Abschluss der Versicherung verhältnismässig ausgeprägt; sie schwächt sich dann ab als Folge der Reaktivierungen und steigt in höheren Altern durch die immer zahlreicher werdenden Invalid-erklärungen stark an.
- b) Die Wahrscheinlichkeit, invalid zu sein, ist abhängig vom Eintrittsalter; sie ist für ein bestimmtes erreichtes Alter kleiner, je grösser das Eintrittsalter ist. Die Wahrscheinlichkeit für ein erreichtes Alter  $x + t$  beim Eintrittsalter  $x$  unterscheidet sich von der Wahrscheinlichkeit für das gleiche erreichte Alter, jedoch für das Eintrittsalter  $x_1 > x$ , durch die Nebengesamtheit an Versicherten, welche beim Eintrittsalter  $x$  im Alter  $x_1$  invalid waren und im erreichten Alter  $x + t$  immer noch invalid sind. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintrittsalter  $x$  sind deshalb immer grösser als diejenigen für das Eintrittsalter  $x_1 > x$ . Die Differenz ist im erreichten Alter  $x + t = x_1$  am grössten. Sie vermindert sich anschliessend nach Massgabe der Reaktivierungen und Sterbefälle in der Nebengesamtheit.

Aus den Überlegungen a) und b) lässt sich ableiten, dass die Wahrscheinlichkeiten, invalid zu sein, eine mit steigendem erreichtem Alter und kleiner werdendem Eintrittsalter monoton ansteigende Fläche bilden. Diese Schlussfolgerung gestattet, die Invaliditätswahrscheinlichkeiten für hohe Alter bei tiefem Eintrittsalter, wo im allgemeinen Beobachtungen fehlen werden, näherungsweise abzuschätzen aus den entsprechenden Werten für hohe Alter und hohe Eintrittsalter. So ist in den Beispielen gemäss Tabelle 2 angenommen worden, dass der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Eintrittsalter von 15 bzw. 25 Jahren von 3‰ im Maximum im Alter 25 noch 1,5‰ im Alter 30 und 1‰ im Alter 35 und mehr betrage. Ähnliche Überlegungen sind auch bei den höheren Eintrittsaltern gemacht worden. Die beschriebenen Approximationen dürften durchaus zulässig sein; sie sind in ihrer Auswirkung ähnlich wie der Verzicht auf die Selektion bei der Messung (8a) gemäss erster Methode über die Invalidierungshäufigkeiten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Invaliditätsmessungen nach der zweiten Methode mit den daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten, invalid zu sein, auf verhältnismässig einfache Art eine klare Durchleuchtung der Invaliditätsversicherung ermöglichen.

Tabelle 1a

*Beispiele von beobachteten Invaliditätshäufigkeiten*

(Einzelversicherungen Schweiz 1965–1968, Männer, Wartefrist 6 Monate)

Alter	Eintrittsalter			Alter	Eintrittsalter		
	10–19	20–29	30–39		10–19	20–29	30–39
15				40	0,004742	0,004718	0,003792
16	0,000917			41	0,004347	0,004989	0,004060
17	0,001072			42	0,002449	0,004978	0,004588
18	0,001375			43	0,002511	0,005605	0,004453
19	0,001156			44	0,010569	0,005617	0,005348
20	0,002639	0,000531		45	0,013333	0,008014	0,006611
21	0,002426	0,001377		46	—	0,007981	0,007425
22	0,002841	0,001940		47	—	0,008826	0,007722
23	0,002815	0,001971		48	—	0,008614	0,008105
24	0,003074	0,002281		49	—	0,006009	0,008998
25	0,003786	0,001907		50	—	0,008435	0,010618
26	0,002681	0,001692		51	—	0,005217	0,011333
27	0,004399	0,002090		52	—	0,001032	0,014906
28	0,003563	0,002141		53	—	0,001776	0,016617
29	0,004911	0,002245		54	—	—	0,018024
30	0,004931	0,002233	0,000310	55	—	—	0,021972
31	0,003477	0,002164	0,000885	56	—	0,005555	0,017856
32	0,004772	0,002304	0,000601	57	—	0,032894	0,017025
33	0,003882	0,002521	0,000923	58	—	0,044642	0,012159
34	0,004551	0,002193	0,001239	59	—	0,010416	0,014285
35	0,005324	0,002845	0,001905	60	—	—	0,008888
36	0,006854	0,003432	0,002514	61	—	—	0,017226
37	0,007810	0,003929	0,002034	62	—	0,233333	0,020666
38	0,006541	0,005257	0,003312	63	—	0,233333	0,059302
39	0,004790	0,004430	0,002944	64	—	—	0,080000



Tabelle 1b

*Beispiele von beobachteten Invaliditätshäufigkeiten*

(Einzelversicherungen Schweiz 1965–1968, Männer, Wartefrist 6 Monate)

Alter	Eintrittsalter			Alter	Eintrittsalter		
	40-49	50-59	60		40-49	50-59	60
40	0,000777			55	0,012566	0,010141	
41	0,002585			56	0,018406	0,012860	
42	0,001278			57	0,016794	0,012533	
43	0,002488			58	0,018541	0,014767	
44	0,004199			59	0,027232	0,015413	
45	0,004319			60	0,029961	0,021594	
46	0,005559			61	0,034449	0,028830	0,004587
47	0,005574			62	0,043215	0,025380	0,014376
48	0,006998			63	0,047502	0,038388	0,020655
49	0,006700			64	0,064517	0,039561	0,017399
50	0,007966			65	—	0,069166	0,011306
51	0,009867	0,002191					
52	0,010814	0,004059					
53	0,013884	0,005209					
54	0,013547	0,007869					

Tabelle 2

*Modelle von Invaliditätswahrscheinlichkeiten*  
(Wahrscheinlichkeit, invalid zu sein)

Alter	Eintrittsalter					
	15	25	35	45	55	60
15	—					
16	0,0011					
17	0,0022					
18	0,0023					
19	0,0024					
20	0,0025					
21	0,0026					
22	0,0027					
23	0,0028					
24	0,0029					
25	0,0030	—				
26	0,0031	0,0007				
27	0,0032	0,0014				
28	0,0033	0,0016				
29	0,0034	0,0018				
30	0,0035	0,0020				
31	0,0036	0,0022				
32	0,0037	0,0024				
33	0,0038	0,0026				
34	0,0039	0,0028				
35	0,0040	0,0030	—			
36	0,0045	0,0035	0,0011			
37	0,0050	0,0040	0,0022			
38	0,0055	0,0045	0,0028			
39	0,0060	0,0050	0,0034			
40	0,0065	0,0055	0,0040			
41	0,0070	0,0060	0,0046			
42	0,0075	0,0065	0,0052			
43	0,0080	0,0070	0,0058			
44	0,0085	0,0075	0,0064			
45	0,0090	0,0080	0,0070	—		
46	0,0101	0,0091	0,0081	0,0035		
47	0,0112	0,0102	0,0092	0,0070		
48	0,0123	0,0113	0,0103	0,0080		
49	0,0134	0,0124	0,0114	0,0090		
50	0,0145	0,0135	0,0125	0,0100		
51	0,0156	0,0146	0,0136	0,0110		
52	0,0167	0,0157	0,0147	0,0120		
53	0,0178	0,0168	0,0158	0,0130		
54	0,0189	0,0179	0,0169	0,0140		

Alter	Eintrittsalter					
	15	25	35	45	55	60
55	0,0200	0,0190	0,0180	0,0150	—	
56	0,0230	0,0220	0,0210	0,0180	0,0100	
57	0,0260	0,0250	0,0240	0,0210	0,0190	
58	0,0290	0,0280	0,0270	0,0240	0,0220	
59	0,0320	0,0310	0,0300	0,0280	0,0250	
60	0,0360	0,0350	0,0340	0,0320	0,0280	—
61	0,0400	0,0390	0,0380	0,0360	0,0320	0,0080
62	0,0450	0,0440	0,0430	0,0410	0,0360	0,0160
63	0,0500	0,0490	0,0480	0,0460	0,0400	0,0200
64	0,0560	0,0550	0,0540	0,0520	0,0450	0,0250
65	0,0620	0,0610	0,0600	0,0580	0,0500	0,0300

### Zusammenfassung

Die Invaliditätsmessungen stützen sich im allgemeinen auf die Häufigkeiten, invalid zu werden, sowie auf die Sterblichkeit und Reaktivierung der Invaliden. Der Aufsatz skizziert eine Messung, welche auf der Wahrscheinlichkeit, invalid zu sein, aufbaut.

### Summary

The statistical observations of disability are generally based on the frequency of becoming disabled as well as on the mortality and the rehabilitation of the disabled. The paper describes a method which is founded on the probability of being disabled.

### Résumé

Les statistiques en matière d'invalidité reposent en général sur la probabilité de devenir invalide et, pour les invalides, sur les cas de recouvrement de la capacité de travail. L'étude esquisse une méthode fondée sur la probabilité d'être invalide.

### Riassunto

Le statistiche in materia d'invalidità riposano in genere sulla probabilità di diventare invalido e, per gli invalidi, sui casi di ricupero della capacità lavorativa. L'articolo descrive un metodo fondato sulla probabilità di essere invalido.