Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 74 (1974)

Artikel: Irrfahrten in höheren Dimensionen

Autor: Menzi, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967093

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Irrfahrten in höheren Dimensionen

Von H. Menzi, Zürich

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenstellung der Resultate meiner Dissertation, welche unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. Bühlmann entstanden ist.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ [$\mathfrak{A}$ = Borel-σ-Algebra auf dem Raum Ω, P = Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathfrak{a}$] und eine Folge unabhängiger, gleichverteilter Zufallsvektoren $(X_i)_{i \in IN}$ im IR^n, wobei IN die Menge der natürlichen Zahlen ist und IR^n der n-dimensionale euklidische Raum bedeutet. Die Folge der Zufallsvektoren

$$S_1 = X_1, \quad S_2 = X_1 + X_2, \quad S_3 = X_1 + X_2 + X_3, \ \ldots.$$

nennt man eine Irrfahrt im IR^n oder einen n-dimensionalen Erneuerungsprozess.

Als Beispiel kann man sich im dreidimensionalen Raum einen Massenpunkt vorstellen, der sich im Zeitpunkt 1 im Ort $S_1 = X_1 = (X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)})$, im Zeitpunkt 2 im Ort $S_2 = X_1 + X_2$ usw. befindet.

Im eindimensionalen Fall kann X_1 die Lebensdauer eines Elementes einer Ausscheidegesamtheit bedeuten. Wenn ein Element ausscheidet, wird es durch ein neues ersetzt, dieses wird im Falle seines Ausscheidens wiederum ersetzt usw. $S_1, S_2, S_3, \ldots$ sind dann die Summen der einzelnen (zufälligen) Lebensdauern.

Sei C eine beliebige Borelmenge im IR^n. Dann ist die durch

$$U[C] := \sum_{k=1}^{\infty} P[S_k \in C]$$

definierte Mengenfunktion ein Mass auf der Borel-σ-Algebra des IR^n. Man nennt $U[C]$ das Erneuerungsmass von C. Wenn $Z(C)$ die Zufallsvariable der Anzahl der S_k mit $S_k \in C$ ist und $E[Z(C)]$ der Erwartungswert von $Z(C)$ bezeichnet, dann lässt sich leicht zeigen, dass gilt:

$$E[Z(C)] = U[C].$$

Sei $S(y,a) = \{x \in IR^n \ / \ \|x-y\| \leq a\}$, wobei $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x^{(i)}|\}$ bedeutet (diese Norm wird im folgenden stets verwendet). Nun kann man in unserem ersten

Beispiel $U[S(0,1)]$ als die mittlere Anzahl der «Besuche» des Massenpunktes im Einheitsquader auffassen. Falls C im zweiten Beispiel das Zeitintervall $[0,t]$ ist, so lässt sich $U[C]$ als die erwartete Anzahl Ausscheidungsfälle während dieser Zeit interpretieren.
Für die Dimension Eins bewies Blackwell [2] und [3] unter der Voraussetzung, dass der Erwartungswert $E[X_1] > 0$ ist und X_1 nicht arithmetisch ist (X_1 nimmt nicht nur Werte an, die ein ganzzahliges Vielfaches einer Zahl $s > 0$ sind), als erster, dass für ein Intervall I der Länge $\triangle$ gilt:

$$\lim_{a\to\infty} U[a+I] = \frac{\triangle}{E[X_1]} \quad \text{und} \quad \lim_{a\to-\infty} U[a+I] = 0.$$

Falls $E[X_1] = \infty$, sind beide obigen Grenzwerte gleich Null.
Bickel und Yahav [1] zeigten nun, dass für Irrfahrten im $I\!R^2$ unter den Voraussetzungen, dass 1. die gewählte Norm im $I\!R^2$ polygonal ist, 2. der Erwartungsvektor $E[X_1]$ existiert und verschieden vom Nullvektor ist, 3. $E[X_1]$ nicht parallel zu einer Seite von $S(0,a)$ liegt, 4. die Irrfahrt nicht arithmetisch ist, der Blackwellsatz auch für die Dimension zwei in der folgenden Form gilt:

$$\lim_{a\to\infty} U[S(O,a+\triangle)\setminus S(O,a)] = \frac{\triangle}{\|E[X_1]\|}.$$

In meiner Arbeit wird dieses Ergebnis auf alle endlichen Dimensionen verallgemeinert.
Der Vollständigkeit halber sei auch der folgende allgemeinere Satz aufgeführt:
Sei $T_r^i(n)$ eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}\setminus\{i\}$, $1 \le i \le n$, bestehend aus r Elementen und sei $L_i(T_r^i(n), a, \triangle) := \{x \in I\!R^n \,/\, x^{(j)} > a$ für alle $j \in T_r^i(n), x^{(j)} \le a$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}\setminus T_r^i(n)\setminus\{i\},\ a < x^{(i)} \le a+\triangle\}$. Sei $E[X_1] > 0$ und $E[X_1^{(1)}] \ge E[X_1^{(2)}] \ge \ldots \ge E[X_1^{(n)}]$, dann gilt:

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{T_r^i(n)} U[L_i(T_r^i(n), a, \triangle)] = \frac{\triangle}{E[X_1^{(r+1)}]}$$

für $r = 0, 1, \ldots, n-1$.
Im Falle $r = 0$ kann man daraus leicht den verallgemeinerten Blackwellsatz herleiten.
Es liegt nun nahe, zu fragen wie sich das Erneuerungsmass der Menge $S(0,a+\triangle)\setminus S(0,a)$ verhält, wenn $E[X_1] = 0, E[\|X_1\|^2] < \infty$ ist und a gegen ∞ geht. Darauf gibt der untenstehende Satz eine teilweise Antwort. Doch zunächst müssen wir die Begriffe «transiente» und »rekurrente» Irrfahrt und «Träger» eines Zufallsvektors einführen.

Definition: Eine Irrfahrt im $\mathbb{R}^n$ heisst transient, wenn das Erneuerungsmass jeder kompakten Menge des $\mathbb{R}^n$ endlich ist. Andernfalls heisst die Irrfahrt rekurrent.

Definition: Unter dem Träger $Tr(X)$ des n-dimensionalen Zufallsvektors X mit der Verteilungsfunktion $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, verstehen wir die Menge:

$$Tr(X): = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \int_{y \in U(x)} X\, dF(y) > 0 \text{ für alle Umgebungen } U(x) \text{ von } x\}.$$

Satz: Sei $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Irrfahrt im $\mathbb{R}^3$ mit $E[X_1] = 0$ und $E[\|X_1\|^2] < \infty$. Dann ist $\lim_{a \to \infty} U[S(0,a+) \setminus S(0,a)] = \infty$, falls folgende beiden Kriterien erfüllt sind:

1. Das Erneuerungsmass der folgenden zwölf Mengen ist unendlich für beliebiges $\triangle > 0$:

$$\{x \in R^3 / x^{(i_1)} \leq \triangle,\, x^{(i_2)} \gtreqless 0,\, x^{(i_3)} \gtreqless 0\},$$

wobei $\quad i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\}$ und $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1$.

2. $\bigcup_{k=1}^{\infty} Tr(S_k)$ ist dicht im $\mathbb{R}^3$.

Aus Gründen der Einfachheit wurde der Satz für die Dimension drei formuliert. Er gilt natürlich auch für höhere Dimensionen. Für die Dimensionen Eins und Zwei wird er gegenstandslos, da unter obigen Voraussetzungen dann jede Irrfahrt rekurrent ist (Chung und Fuchs [6]) und somit $U[S(0,a+\triangle) \setminus S(0,a)] = \infty$ ist für jedes a. Chung und Fuchs [6] zeigten auch, dass jede Irrfahrt im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, transient ist.

Beispiel 1: Der Satz gilt für jede symmetrische und nicht arithmetische Irrfahrt im $\mathbb{R}^3$, falls $E[\|X_1\|^2] < \infty$ ist. Wir nennen dabei eine Irrfahrt symmetrisch im $\mathbb{R}^3$, falls die vier Zufallsvektoren X_1, $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, -X_1^{(3)})$, $(X_1^{(1)}, -X_1^{(2)}, -X_1^{(3)})$, $-X_1$ gleichverteilt sind. Kriterium 1 ist aus Symmetriegründen erfüllt. Bickel und Yahav [1] zeigten, dass für symmetrische und nicht arithmetische Irrfahrten im $\mathbb{R}^n$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} Tr(S_k)$ stets dicht ist im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2: Sei $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Irrfahrt im $\mathbb{R}^3$ mit $E[X_1] = 0$ und $E[\|X_1\|^2] < \infty$. Die X_1^i, $1 \leq i \leq 3$, seien voneinander unabhängig und die Verteilungsfunktion von X_1 besitze eine absolut stetige Komponente. Dann lässt sich zeigen, dass die beiden Kriterien erfüllt sind und somit die Aussage des Satzes auf diesen Fall anwendbar ist.

Literaturverzeichnis

[1] *Bickel, P. J.* and *Yahav, J. A.* (1965): Renewal theory in the plane, Ann. Math. Statist. *36*, 946–955.
[2] *Blackwell, D.* (1948): A renewal theorem, Duke math. J. *15*, 145–150.
[3] *Blackwell, D.* (1953): Extension of a renewal theorem, Pacific J. Math. *3*, 315–320.
[4] *Chung, K. L.*: A course in probability theory, Harcourt, Brace & World, Inc. (1968).
[5] *Feller, W.*: An introduction to probability theory and its applications, vol. II, New York, Wiley (1965).
[6] *Fuchs, W. H. J.* and *Chung, K. L.* (1951): On the distribution of values of sums of random variables. Mem. Am. Math. Soc. *6*, 1–12.

Zusammenfassung

Für Irrfahrten in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, werden hier einige Resultate zusammengestellt, die das asymptotische Verhalten des Erneuerungsmasses bestimmter Teilungen des $\mathbb{R}^n$ zum Gegenstand haben.

Résumé

Pour des «marches aléatoires» dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, on montre quelques résultats ayant trait au comportement asymptotique de la mesure de renouvellement.

Riassunto

Per «cammini aleatori» in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, si riassumono alcuni risultati che hanno per oggetto il comportamento asintotico della misura di rinnovo di determinati insiemi parziali.

Summary

For random walks in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, some results are summarized which concern the asymptotical behaviour of the renewal measure of certain sets in $\mathbb{R}^n$.