

# Über die Wahl von Nutzenfunktionen für die Bestimmung von Versicherungsprämien

Autor(en): **Leepin, Peter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **75 (1975)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967105>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

### Über die Wahl von Nutzenfunktionen für die Bestimmung von Versicherungsprämien

Von Peter Leepin, Basel

#### 1. Aufgabenstellung

Wir gehen davon aus, dass ein Versicherungsträger dem Betrag  $x$  den Nutzen  $u(x)$  zuordnet. Er benützt diese Nutzenfunktion, um mit Hilfe der Gleichung

$$u(x) = \int_0^{\infty} u(x + P - S) d\mathfrak{F} \quad (1)$$

die Nettoprämie  $P$  für die Übernahme eines Risikos mit der Schadenssummenverteilung  $\mathfrak{F}$  für die Summe  $S$  festzulegen unter der Annahme, das derzeitige Vermögen des Versicherungsträgers sei  $x$ . Genauer gesagt stellt  $P$  die Minimalnettoprämie dar, bei welcher ein Abschluss der Versicherung für den Versicherungsträger in Frage kommt.

Die Nutzenfunktion ist nicht objektiv festzulegen; sie ist vom Entscheidungsträger und seiner jeweiligen Situation abhängig. Trotzdem lassen sich eine Reihe von Kriterien aufstellen, die für eine rationale Wahl der Nutzenfunktion beachtet werden müssen; diese Kriterien werden es nahelegen, bestimmte mathematische Kurventypen für die Nutzenfunktion von Versicherungsträgern zu verwenden.

Für spätere Entwicklungen ist es zweckmässig, (1) etwas anders zu schreiben. Wir ersetzen  $S$  durch  $S\xi$  und erhalten statt (1)

$$u(x) = \int_0^{\infty} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}, \quad (1')$$

wobei nun  $\mathfrak{F}$  die Verteilungsfunktion von  $\xi$  darstellt. Diese Aufteilung wird vorgenommen, um das Verhalten von  $P$  für sehr kleine und sehr grosse  $S$  untersuchen zu können. Bei einer Verteilungsfunktion mit einem endlichen Bereich lässt sich  $\xi$  als Schadensgrad interpretieren.

Wir setzen :

$$\int_0^{\infty} \xi d \mathfrak{F} = \mu$$

und

$$\int_0^{\infty} (\xi - \mu)^2 d \mathfrak{F} = \sigma^2.$$

## 2. Bedingungen für die Nutzenfunktion

### 2.1. Direkte Bedingungen

Die Nutzenfunktion  $u(x)$  muss für alle reellen  $x$  existieren und sei dreimal stetig differenzierbar.

Wir nehmen wie üblich an, dass

$$u'(x) > 0.$$

Weiter soll der Versicherungsträger Risikoaversion zeigen, das heisst

$$u''(x) < 0.$$

Der Nutzen ist nicht abhängig vom Massstab für den Geldwert, d.h. dass wir z. B. den gleichen Nutzen erhalten, wenn ein Geldbetrag in Franken oder Rappen ausgedrückt wird. Das bedingt, dass gilt

$$u(x) = f(mx), \quad (2)$$

wobei der Faktor  $m$  es erlaubt, eine Veränderung des Massstabs für  $x$  auszu-schalten. Der Einfachheit halber werden wir vorläufig  $m = 1$  setzen.

Weiter nehmen wir an, dass die Nutzenfunktion hinreichend regulär ist, so dass alle benützten Operationen, insbesondere alle Differentiationen und Integrationen, erlaubt sind.

Aus unseren Bedingungen folgt, dass  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$ .

Das Verhalten bei plus unendlich ist noch nicht festgelegt. Wir verzichten aus einem später ersichtlichen Grund auf die üblichen, aber nicht wesentlichen Bedingungen

$$u(x) \geq 0, \text{ für } x \geq 0 \text{ und } u'(0) = 1.$$

Wir wenden uns nun vorerst der Frage zu, ob es verschiedene Nutzenfunktionen gibt, die für beliebige Schadenverteilungen zur gleichen Prämie führen. Es soll somit gelten

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} \quad (3)$$

und

$$g(x) = \int_0^{\infty} g(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} \quad (4)$$

für beliebige  $\mathfrak{F}$ .

Durch Differentiation nach  $x$  ergibt sich aus (3)

$$f'(x) = \int_0^{\infty} f'(x + P - S\xi) \left(1 + \frac{\delta P}{\delta x}\right) d\mathfrak{F}. \quad (5)$$

Da die entsprechende Beziehung für  $g(x)$  gilt, folgt

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\int_0^{\infty} f'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} g'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}}. \quad (6)$$

Ermitteln wir  $\frac{\delta P}{\delta S}$  aus den beiden impliziten Gleichungen (3) und (4), so erhalten wir

$$\frac{\delta P}{\delta S} = \frac{\int_0^{\infty} f'(x + P - S\xi) \xi d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} f'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}} = \frac{\int_0^{\infty} g'(x + P - S\xi) \xi d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} g'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}} \quad (7)$$

und daraus unter Verwendung von (6)

$$\frac{\int_0^{\infty} f'(x + P - S\xi)\xi d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} g'(x + P - S\xi)\xi d\mathfrak{F}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (8)$$

Differenzieren wir nun beide Seiten von (8) nach  $S$  und setzen  $S = 0$ , so ergibt sich

$$\frac{\{g'(x)f''(x) - g''(x)f'(x)\} \int_0^{\infty} \xi d\mathfrak{F} \int_0^{\infty} \xi(\mu - \xi) d\mathfrak{F}}{\left(g'(x) \int_0^{\infty} \xi d\mathfrak{F}\right)^2} = 0$$

$$\text{oder } \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{g''(x)}{g'(x)}\right) \frac{f'(x) \int_0^{\infty} (\xi - \mu)^2 d\mathfrak{F}}{g'(x)\mu} = 0.$$

Da der Fall  $f'(x) = 0$  und  $g'(x) = 0$  nicht interessiert, ist nur das Verschwinden der ersten Klammer zu untersuchen.

Daraus folgt aber

$$g(x) = a + bf(x) \quad (9)$$

oder

$$f''(x) = f'(x) = 0 \quad (\text{bzw. } g''(x) = g'(x) = 0). \quad (9')$$

Durch Einsetzen in (1) ist leicht zu erkennen, dass diese notwendigen Bedingungen auch hinreichen.

Wir sehen, dass Nutzenfunktionen durch die Bedingung, dass sie für beliebige Schadenssummenverteilungen zur gleichen Prämie führen sollen, bis auf eine lineare Transformation gemäss (9) bestimmt sind. Dieses Resultat ergibt sich bekanntlich auch aus dem Axiomensystem von Neumann/Morgenstern für Nutzenfunktionen. Der Fall (9') berücksichtigt zusätzlich die normalerweise uninteressante Möglichkeit, dass eine der beiden Nutzenfunktionen konstant ist. Im Rahmen dieser Arbeit ist dieser Spezialfall von Bedeutung.

2.2. Bedingungen für die Nutzenfunktion aus dem erwarteten Verhalten der Prämie als Funktion von  $x$

Wir betrachten nun das Verhalten von  $P$ , da sich dieses eher intuitiv beschreiben lässt als dasjenige von  $u(x)$ . Aus (1') folgt durch Entwicklung nach Taylor

$$u(x) = \int_0^{\infty} \left\{ u(x) + (P - S\xi)u'(x) + \frac{(P - S\xi)^2}{2}u''(\vartheta(\xi)) \right\} d\mathfrak{F},$$

wobei die  $\vartheta(\xi)$  Werte zwischen  $(x + P)$  und  $(x + P - S\xi)$  darstellen. Daraus gewinnen wir die Beziehung:

$$P = S\mu - \frac{1}{u'(x)} \int_0^{\infty} \frac{(P - S\xi)^2}{2} u''(\vartheta(\xi)) d\mathfrak{F}.$$

Da  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$ , folgt  $P \geq S\mu$ .

Andererseits können wir aus (1')

$$u(x) = \int_0^{\infty} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}$$

schliessen, dass  $P \leq S\xi_{\max}$ , wenn eine obere Grenze  $\xi_{\max}$  für  $\xi$  vorhanden ist. Die Prämie  $P$  liegt somit zwischen den Grenzen  $S\mu$  und  $S\xi_{\max}$ . Wir erwarten, dass sie mit zunehmendem  $x$  monoton abnimmt. Also muss  $\frac{\delta P}{\delta x} \leq 0$  sein. Da  $P$  nach oben und unten beschränkt ist, gilt weiter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\delta P}{\delta x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\delta P}{\delta x} = 0.$$

Wir betrachten deshalb zuerst das Verhalten der Nutzenfunktion bei  $\frac{\delta P}{\delta x} = 0$ .

Nach (5) gilt dann

$$u'(x) = \int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}.$$

Das bedeutet aber, dass  $u(x)$  und  $u'(x)$  für die Berechnung von  $P$  äquivalent sind. Daraus folgt aber, dass die Bedingungen (9) oder (9') erfüllt sein müssen. Aus (9') ergibt sich für die Nutzenfunktion die Darstellung

$$u(x) = a + b x. \quad (10)$$

Die Bedingung (9) führt zu

$$u(x) = \alpha + \beta u'(x),$$

also einer linearen inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Sie hat die Lösung

$$u(x) = -cd^{-x} + f. \quad (11)$$

Aus den Vorzeichenbedingungen für  $u'(x)$  und  $u''(x)$  in Ziffer 2.1. ergibt sich

$$b > 0, \quad c > 0, \quad d > 1.$$

Es ist zweckmässig,  $f > 0$  anzusetzen.

Für die Prämie  $P$  ergibt sich bei der Beziehung (10)

$$P = S\mu$$

und bei (11)

$$P = \frac{1}{\ln d} \ln \int_0^{\infty} e^{S\xi \ln d} d \mathfrak{F} \quad (12)$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von *Gerber* [3].

Zu der entsprechenden Nutzenfunktion kommt er allerdings unter einer anderen Voraussetzung, nämlich der Forderung nach Additivität von Prämien. Diese Forderung führt zu einer von  $x$  unabhängigen Prämie, kann deshalb nur als Näherung in einem begrenzten Bereich das Verhalten von Versicherungsträgern kennzeichnen.

Für die Nutzenfunktion  $u(x) = -cd^{-x} + f$  gilt

$$u'(x) = c \ln d d^{-x}$$

$$u''(x) = -c(\ln d)^2 d^{-x}.$$

Die zweite Ableitung  $u''(x)$  ist nicht konstant, obwohl die Prämie von  $x$  unabhängig ist, und also offenbar als Mass für die Risikoaversion nicht geeignet. Hingegen wird sich zeigen, dass

$$A(x) = - \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

ein zweckmässiges Mass für die Risikoaversion darstellt. Bei der soeben betrachteten Nutzenfunktion nimmt sie den Wert  $A(x) = \ln d$  an.

Nun untersuchen wir die Frage, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit für beliebige Risiken die Beziehung  $\frac{\delta P}{\delta x} \leq 0$  gilt.

Aus (5) erhalten wir

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{u'(x) - \int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}}. \quad (13)$$

Wir betrachten nun das Verhalten der rechten Seite, wenn  $S$  gegen null strebt, und entwickeln deshalb den Zähler als Funktion von  $S$  nach Taylor und benützen die sich aus (7) ergebenden Beziehungen für die partiellen Ableitungen von  $P$  nach  $S$  an der Stelle null:

$$P'_s(S = 0) = \mu \quad (14)$$

und

$$P''_s(S = 0) = - \frac{u''(x)}{u'(x)} \sigma^2 \quad (15)$$

$$= - \frac{\int_0^{\infty} \left[ Su''(x)(\mu - \xi) + \frac{S^2}{2} \left\{ u'''(x + P(\bar{S}) - \bar{S}\xi)(P'(\bar{S}) - \xi)^2 + u''(x + P(\bar{S}) - \bar{S}\xi)P''(\bar{S}) \right\} \right] d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}},$$

wobei  $0 \leq \bar{S} \leq S$ .



Das Integral über das Glied mit  $S$  verschwindet. Das Integral über den Ausdruck in der geschweiften Klammer geht, wenn  $S$  gegen null strebt, gegen

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{\infty} \left[ u'''(x)(\mu - \xi)^2 - \frac{u''(x)^2}{u'(x)} \sigma^2 \right] d\mathfrak{F}}{u'(x)} = \\ & = \sigma^2 \left[ \frac{u'''(x)}{u'(x)} - \left( \frac{u''(x)}{u'(x)} \right)^2 \right] = \\ & = -\sigma^2 A'(x). \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine  $S$  muss also  $A'(x) \leq 0$  sein, damit  $\frac{\delta P}{\delta x} \leq 0$ .

Da  $A'(x) \leq 0$ , gilt, wie leicht ersichtlich,  $u'''(x) \geq 0$ .

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass diese notwendige Bedingung hinreichend ist. Dazu differenzieren wir (13) nach  $S$  und erhalten unter Verwendung von (7)

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 P}{\delta S \delta x} &= - \frac{u'(x) \int_0^{\infty} u''(x + P - S\xi) \left( \frac{\delta P}{\delta S} - \xi \right) d\mathfrak{F}}{\left( \int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} \right)^2} \\ &= - \frac{u'(x) \int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) \xi d\mathfrak{F}}{\left( \int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} \right)^2} \left( \frac{\int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) \xi A(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) \xi d\mathfrak{F}} - \frac{\int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) A(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}}{\int_0^{\infty} u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}} \right). \end{aligned}$$

Nach unseren Annahmen über die Nutzenfunktion und die Risikoaversion sind der erste Bruch auf der rechten Seite und der anschliessende Klammerausdruck positiv, letzterer in Anwendung einer Ungleichung von *Steffensen* [6], wonach

$$\frac{\int_a^b \varphi(t) f(t) g(t) dt}{\int_a^b \varphi(t) g(t) dt} \geq \frac{\int_a^b f(t) g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt},$$

wobei gilt  $a < b$ ,  $f(t)$  und  $\varphi(t)$  positiv und beide nicht zunehmend oder beide nicht abnehmend und  $g(t)$  positiv. In unserem Falle ist  $t = \xi$ ,  $g(t) = u'(x + P - S\xi)$ ,  $f(t) = A(x + P - S\xi)$  und  $\varphi(t) = \xi$  zu setzen. Da  $\frac{\delta P}{\delta x} = 0$  für  $S = 0$  und die Ableitung  $\frac{\delta P}{\delta x}$  nach  $S$  kleiner/gleich null ist, gilt somit  $\frac{\delta P}{\delta x} \leq 0$  für  $S > 0$ , sobald  $A'(x) \leq 0$ .

Konstantes  $A(x)$  führt, wie bereits gezeigt, zu einer von  $x$  unabhängigen Prämie. Ist  $A'(x) \leq 0$ , ist auch  $\frac{\delta P}{\delta x} \leq 0$ .  $A(x)$  stellt somit ein geeignetes Mass für die Risikoaversion dar.

Wir betrachten nun das Verhalten von  $A(x)$  für absolut grosse  $x$ . Da  $A(x) \geq 0$  und  $A'(x) \leq 0$ , fällt  $A(x)$  mit wachsendem  $x$  gegen eine Grenze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = c, c \geq 0.$$

Daraus folgt, dass  $u(x)$  bei  $+\infty$  sich linear nach (10) oder exponentiell nach (11) verhält. Bei  $-\infty$  ist (11) massgebend. Die Risikoaversion nimmt vom Wert bei  $-\infty$  monoton ab zum Wert bei  $+\infty$ .

### 3. Das Verhalten der Prämie in Abhängigkeit von S

Aus (1')

$$u(x) = \int_0^{\infty} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}$$

folgt, dass für  $S = 0$  gilt  $P = 0$ , da  $u(x)$  monoton ist. Wir erhalten unter Verwendung von (7), (14) und (15)

$$P = S\mu + \frac{S^2}{2} A(x)\sigma^2 + \frac{S^3}{\sigma} (A^2(x) - A'(x)) \int_0^{\infty} (\xi - \mu)^3 d\mathfrak{F} + \dots$$

Mit der Konvergenz dieser Entwicklung steht es allerdings nicht besonders gut. Für beliebige Nutzenfunktionen lässt sich nichts aussagen, da wir das Verhalten der höheren Ableitungen von  $A(x)$  nicht kennen. Betrachten wir den Spezialfall  $A(x) = \ln d$  und die entsprechende Formel (12)

$$P = \frac{1}{\ln d} \ln \int_0^{\infty} e^{S\xi \ln d} d\mathfrak{F}.$$

Die entsprechende Reihenentwicklung ist

$$P = S\mu + \frac{S^2}{2} \sigma^2 \ln d + \frac{S^3}{\sigma} (\ln d)^2 \int_0^{\infty} (\xi - \mu)^3 d\mathfrak{F} + \\ + \frac{S^4}{24} (\ln d)^3 \left\{ \int_0^{\infty} (\xi - \mu)^4 d\mathfrak{F} - 3\sigma^4 \right\} + \dots$$

Sie konvergiert aber nur, solange

$$\int_0^{\infty} e^{S\xi \ln d} d\mathfrak{F} < 2.$$

Diese Bedingung ist für hinreichend grosse  $S$  nicht mehr erfüllt. Die erhaltene Reihenentwicklung ist deshalb nur von beschränkter Bedeutung; zur Bestimmung der Prämie ist im übrigen (1') nicht ungeeignet, so dass die Reihenentwicklung dafür auch nicht benötigt wird. Sobald wir ein Intervall haben, in welchem  $P$  liegt, kann  $P$  durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden.

Wir untersuchen nun das Verhalten der Prämie für  $S \rightarrow \infty$ . Dabei gehen wir

von einer Schadenverteilung mit der oberen Grenze  $\xi_{\max}$  ( $>0$ ) aus. Dann schreibt sich (1'):

$$u(x) = \int_0^{\xi_{\max}} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}.$$

Wir beweisen nun, dass unter den von uns in der Ziffer 2 aufgestellten oder hergeleiteten Bedingungen für  $u(x)$  die Beziehung gilt:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{P}{S} = \xi_{\max}.$$

Vorerst zeigen wir, dass die Ableitung von  $\frac{P}{S}$  nach  $S$  positiv ist, dass also der Prämiensatz  $\frac{P}{S}$  mit  $S$  wächst. Aus (1') folgt durch Entwicklung nach Taylor

$$u(x) = \int_0^{\infty} \left\{ u(x) + (P - S\xi) u'(x) + \int_0^{P - S\xi} (P - S\xi - t) u''(x+t) dt \right\} d\mathfrak{F}$$

und daraus

$$\frac{P}{S} = \mu - \frac{1}{S u'(x)} \int_0^{\infty} \int_0^{P - S\xi} (P - S\xi - t) u''(x+t) dt d\mathfrak{F}.$$

Durch Differentiation nach  $S$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{S}\right)' &= - \frac{S \int_0^{\infty} \int_0^{P - S\xi} \left[ \frac{\delta P}{\delta S} - \xi \right] u''(x+t) dt d\mathfrak{F} - \int_0^{\infty} \int_0^{P - S\xi} (P - S\xi - t) u''(x+t) dt d\mathfrak{F}}{S^2 u'(x)} = \\ &= - \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{P - S\xi} \left[ S \frac{\delta P}{\delta S} - P + t \right] u''(x+t) dt d\mathfrak{F}}{S^2 u'(x)}. \end{aligned}$$

Da aber auch gilt

$$\left(\frac{P}{S}\right)' = \frac{S \frac{\delta P}{\delta S} - P}{S^2},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{S}\right)' &= - \frac{\int_0^\infty \int_0^{P-S\xi} tu''(x+t) dt d\mathfrak{F}}{S^2 u'(x) \left\{ 1 + \frac{\int_0^\infty \int_0^{P-S\xi} u''(x+t) dt d\mathfrak{F}}{u'(x)} \right\}} \\ &= - \frac{\int_0^\infty \int_0^{P-S\xi} tu''(x+t) d\mathfrak{F}}{S^2 \int_0^\infty u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}} = \\ &= - \frac{\int_0^\infty \frac{(P-S\xi)^2}{2} u''(x+\vartheta) d\mathfrak{F}}{S^2 \int_0^\infty u'(x + P - S\xi) d\mathfrak{F}} > 0, \end{aligned}$$

wo  $\vartheta$  zwischen 0 und  $P - S\xi$  liegt.

$\frac{P}{S}$  ist also als Funktion von  $S$  zunehmend und ausserdem nach oben beschränkt

durch  $\xi_{\max}$ , hat also einen Grenzwert.

Wir nehmen an, es gelte

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P}{S} = \bar{\xi} < \xi_{\max}.$$

Nun gilt für ein beliebiges  $\xi_0 > \bar{\xi}_{\max}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{\xi_0} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} + \int_{\xi_0}^{\xi_{\max}} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} < \\ &< u(x + S\bar{\xi}) \int_0^{\xi_0} d\mathfrak{F} + u(x + S\bar{\xi} - S\xi_0) \int_{\xi_0}^{\xi_{\max}} d\mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Wir benützen das Grenzverhalten im Unendlichen gemäss Ziffer 2.2., wobei wir zuerst lineares Verhalten bei  $+\infty$  annehmen.  $S$  sei so gross, dass

$$0 < u(x + S\bar{\xi}) \leq (1 + \varepsilon) \{a + b(x + S\bar{\xi})\}$$

und

$$u(x + S\bar{\xi} - S\xi_0) \leq (1 - \varepsilon) \{f - cd^{-x - S\bar{\xi} + S\xi_0}\} < 0,$$

wobei  $\varepsilon$  eine hinreichend kleine positive Konstante darstellt.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x) &< (1 + \varepsilon) \{a + b(x + S\bar{\xi})\} \int_0^{\xi_0} d\mathfrak{F} + \\ &+ (1 - \varepsilon) \{f - cd^{-x - S(\bar{\xi} - \xi_0)}\} \int_{\xi_0}^{\xi_{\max}} d\mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht aber mit steigendem  $S$  gegen minus unendlich. Es ergibt sich ein Widerspruch, somit muss gelten

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{P}{S} = \bar{\xi}_{\max}.$$

Für das exponentielle Verhalten bei  $+\infty$  ist der Beweis trivial, da dann  $u(x)$  nach oben beschränkt ist.

Wir haben damit ein auch für die Praxis wichtiges Resultat erhalten, das sich unpräzise etwa folgendermassen formulieren lässt:

Bei mit  $x$  abnehmender Risikoaversion steigt der Prämiensatz  $\frac{P}{S}$  mit wachsendem  $S$  und weicht bei hinreichend grossem  $S$  nur wenig vom maximal möglichen Wert  $\xi_{\max}$  ab.

Dieses Ergebnis entspricht u. E. den Erwartungen über ein rationelles Verhalten bei Risikoaversion und bekräftigt die bisherigen Überlegungen.

Das erhaltene Resultat bildet eine Ergänzung zu den Ausführungen am Anfang dieser Ziffer 3. Für kleine  $S$  ist die dort angegebene Reihenentwicklung

$$P = S\mu + \frac{S^2}{2} A(x)\sigma^2 + \dots$$

verwendbar. Für grosse  $S$  konvergiert diese Reihe nicht mehr, und das soeben hergeleitete Grenzverhalten wird massgebend (die Übertragung auf  $\xi_{\max} \rightarrow \infty$  ist selbstverständlich).

Aus unseren Resultaten lassen sich Aussagen über das Verhalten von  $(S\xi_{\max} - P)$  gewinnen für den wichtigen Fall, dass der Wert  $\xi_{\max}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $q > 0$  auftritt und der zweitgrösste Wert von  $\xi$  den endlichen Abstand  $\varepsilon$  von  $\xi_{\max}$  aufweist. Aus (1') folgt dann

$$u(x + P - S\xi_{\max}) = \frac{1}{q} \left\{ u(x) - \int_0^{\xi_{\max} - \varepsilon} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} \right\}.$$

Betrachten wir nun zuerst die Annahme, dass die Nutzenfunktion sich für grosse positive  $x$  linear verhält. Dann geht die rechte Seite der Gleichung für wachsendes  $S$  gegen minus unendlich. Aus der linken Seite folgt, dass damit  $(S\xi_{\max} - P)$  gegen plus unendlich wächst, allerdings für hinreichend grosses  $S$  «langsam», da die rechte Seite als Funktion von  $S$  sich (nahezu) linear, die linke Seite (nahezu) exponentiell verhält. Damit stimmt es überein, dass

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{P}{S} = \xi_{\max}.$$

Wenn sich die Nutzenfunktion auch für grosse positive  $x$  durch eine Exponentialfunktion darstellen lässt, wird

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} u(x + P - S\xi_{\max}) &= \frac{1}{q} \lim_{S \rightarrow \infty} \left\{ u(x) - \int_0^{\xi_{\max} - \varepsilon} u(x + P - S\xi) d\mathfrak{F} \right\} \\ &= \frac{1}{q} \{ u(x) - (1 - q) u(\infty) \}. \end{aligned}$$

Da in diesem Fall  $u(\infty)$  endlich ist, gilt somit

$$\lim_{S \rightarrow \infty} (S \xi_{\max} - P) = A(q, x),$$

wobei  $A(q, x)$  nicht von  $S$  abhängt. Die Prämie wird also so festgesetzt, dass der grösstmögliche Nettoschaden  $(S \xi_{\max} - P)$  die Grenze  $A(q, x)$  nicht übersteigt, unabhängig davon, dass für hinreichend grosses  $S$  mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - q)$  die Prämie grösser ist als der Schaden  $S \xi$ , wobei sogar der Überschuss mit  $S$  gegen unendlich geht.

Diese Art der Festlegung der Prämie für grosses  $S$  ist offensichtlich verwandt mit der Verwendung einer Ruinwahrscheinlichkeit als Entscheidungskriterium. Die bewiesenen Eigenschaften der beiden Modelle für die Nutzenfunktion, exponentiell / linear und exponentiell / exponentiell, erleichtern den Entscheid über die entsprechende Wahl.

#### 4. Nutzenfunktionen bei abnehmender Risikoaversion

Die bisher gemachten Überlegungen genügen nicht, um die mathematische Form der Nutzenfunktion festzulegen. Wir erwarten, dass für grosse  $x$  näherungsweise gilt

$$u(x) = a + bx, \quad \text{oder} \quad u(x) = -c_1 d_1^{-x} + f_1$$

und dass für  $x$  gegen minus unendlich näherungsweise ist

$$u(x) = -c_2 d_2^{-x} + f_2.$$

Betrachten wir zuerst den Fall des linearen Verhaltens bei plus unendlich. Die beiden Bedingungen legen es nahe, die Nutzenfunktion

$$u(x) = a + bx - cd^{-x}$$

zu untersuchen. Natürlich können auch andere relativ einfache Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften gewonnen werden, z.B. ausgehend vom Ansatz

$$A(x) = \frac{\alpha}{1 + \beta \gamma^x}$$

mit  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  und  $\gamma > 1$ .

Dieser Ansatz umfasst auch die Nutzenfunktion (16), für welche

$$A(x) = \frac{\ln d}{1 + \frac{b}{c \ln d} d^x}.$$



Man prüft nun leicht nach, dass die Nutzenfunktion (16) alle unsere Bedingungen in Ziffer 2 erfüllt. Für die Prämie ergibt sich die Beziehung

$$b(P - S\mu) + cd^{-x} \left( 1 - d^{-P} \int_0^{\infty} d^{S\xi} d \mathfrak{F} \right) = 0,$$

eine Art Mittelbildung aus den Prämienbedingungen bei den Risikoaversionen null und  $\ln d$ .

Wir haben bisher nicht berücksichtigt, dass die Nutzenfunktion gemäss (2) unabhängig vom Massstab sein muss. Für  $x$  ist überall  $mx$  einzusetzen. Andererseits können wir wegen der Äquivalenz der Nutzenfunktion bei linearen Transformationen gemäss (9) die Parameter  $a$  und  $b$  wegschaffen. Damit erhalten wir als endgültige Darstellung der Nutzenfunktion

$$u(x) = mx - cd^{-mx} \quad (17)$$

mit  $m > 0$ ,  $c > 0$ ,  $d > 1$ .

In dieser Form ist  $u(0) \neq 0$  und  $u'(0) = 1$  in Abweichung von der üblichen Festsetzung, was jedoch unwesentlich ist. Die erste Bedingung kann durch die Darstellung  $u(x) = c + mx - cd^{-mx}$  erfüllt werden; die zweite erlaubt, keine Unabhängigkeit vom Massstab.

In der uns zur Verfügung stehenden Literatur kommt die vorgeschlagene Nutzenfunktion nicht vor. In einer Arbeit von *K. Borch* [2] wird die nahe verwandte Funktion  $u(x) = x - e^{-x}$  erwähnt.

Wollen wir auch bei  $+\infty$  exponentielles Verhalten anstreben, so liegt der Ansatz

$$u(x) = a - c_1 d_1^{-x} - c_2 d_2^{-x} \quad (18)$$

nahe, wo  $a > 0$ ,  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $d_1 > 1$ ,  $d_2 > d_1$ . Die Risikoaversion hat dabei die Gestalt:

$$A(x) = \ln d_2 - \frac{c_1 \ln d_1 (\ln d_2 - \ln d_1)}{c_1 \ln d_1 + c_2 \ln d_2 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^{-x}}.$$

Sie nimmt vom Wert  $\ln d_2$  bei  $-\infty$  monoton ab zum Wert  $\ln d_1$  bei  $+\infty$ .

Auch für die Nutzenfunktion (18) ist sofort einzusehen, dass alle Bedingungen in Ziffer 2 erfüllt sind.

Die Nutzenfunktion (18) ist neben andern, die unsern Bedingungen nicht genügen, in einer Arbeit von Pratt [4] vorgeschlagen worden. Dieser Autor zeigt darin auch, dass  $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$  ein zweckmässiges Mass für die Risikoaversion darstellt.

Die Prämie kann aus der Gleichung

$$c_1 d_1^{-(x+P)} \left[ d_1^P - \int_0^\infty d_1^{S\xi} d\mathfrak{F} \right] + c_2 d_2^{-(x+P)} \left[ d_2^P - \int_0^\infty d_2^{S\xi} d\mathfrak{F} \right] = 0$$

bestimmt werden.

Wenn wir in (18) ebenfalls zwei Parameter wegschaffen und die Massstabsunabhängigkeit berücksichtigen, erhalten wir

$$u(x) = -d_1^{-mx} - c_2 d_2^{-mx}.$$

Die Anwendbarkeit einer Nutzenfunktion für die Bestimmung von Versicherungsprämien setzt natürlich voraus, dass die Nutzenfunktion bekannt ist. Wenn etwa die hier vorgeschlagene Nutzenfunktion (17) verwendet werden soll, müssen die Parameter  $m$ ,  $c$  und  $d$  festgelegt werden. Eine direkte Bestimmung darf ausgeschlossen werden. Somit bleibt nur die Möglichkeit eines gewissen Experimentierens, also entweder: Angabe der Prämien für einige typische Risikosituationen durch den Entscheidungsträger, was die Bestimmung der Parameter erlaubt oder: Berechnung der Prämien für einige typische Risikosituationen bei verschiedener Wahl der Parameter und Bestimmung der passenden Parameterkombination. Denkbar wäre es, in (17)  $c$  zum vorneherein gleich 1 zu setzen. Ob diese Vereinfachung es erlaubt, das Risikoverhalten der Entscheidungsträger noch genügend zu approximieren, müsste noch untersucht werden.

Die Verwendung von Nutzenfunktionen bietet eine aussichtsreiche Möglichkeit, um zu rationalen Entscheiden in Risikosituationen zu kommen. Da die Wahl einer Nutzenfunktion einen subjektiven Entscheid darstellt, mögen manche Leser nicht mit allen Überlegungen in dieser Arbeit einig gehen.

Insbesondere könnte man Bedenken dagegen haben, dass das Verhalten im Unendlichen die Wahl der Nutzenfunktion entscheidend beeinflusst. Dazu ist immerhin zu bemerken, dass die zur Verfügung stehenden Mittel der Versicherungsträger gross sind und dass ein Bedarf zur Deckung hoher Summen bekanntlich besteht. Das Verhalten der Nutzenfunktion bei absolut grossen Argu-

menten ist somit von praktischer Bedeutung. Negative Argumente müssen ebenfalls in Betracht gezogen werden. Die Prämie für negative Argumente  $x$  hat allerdings keine praktische Bedeutung. Es ist aber u. E. trotzdem vertretbar, das Verhalten in diesem Gebiet zu betrachten und eine «vernünftige» Bestimmung der Prämie auch für diesen Fall zu fordern.

### Literaturverzeichnis

- [1] *Bühlmann H.*: Mathematical Methods in Risk Theory (Springer 1970).
- [2] *Borch K.*: Risk Management and Company Objectives (Berichte des 19. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Band II, Seite 613, 1972, Oslo).
- [3] *Gerber E.*: On Additive Premium Calculation Principles (ASTIN-Bulletin VII, 3, 1974).
- [4] *Pratt J. V.*: Risk Aversion in the Small and in the Large (Econometrica, Vol. 32, S. 122).
- [5] *Schneeweiß H.*: Entscheidungskriterien bei Risiko (Springer 1967).
- [6] *Steffensen J. F.*: Some Recent Researches in the Theory of Statistics and Actuarial Science (Cambridge 1930).

Prof. Dr. Peter Leepin, Direktor  
Basler Versicherungs-Gesellschaft  
Aeschenplatz 7  
4002 Basel

### **Zusammenfassung**

Es werden einige Bedingungen aufgestellt, denen Nutzenfunktionen genügen müssen, damit sie zur Bestimmung von Versicherungsprämien geeignet sind. Bestimmte, relativ einfache Nutzenfunktionen werden vorgeschlagen, welche für diesen Zweck geeignet sind.

### **Résumé**

Après avoir développé quelques conditions nécessaires pour des fonctions d'utilité correspondantes, l'auteur propose des formules mathématiques relativement simples pour des fonctions d'utilité appropriées pour la détermination des primes d'assurances.

### **Riassunto**

Le funzioni d'utilità che servono al calcolo dei premi d'assicurazione devono soddisfare determinate condizioni. Dopo aver esposto tali condizioni l'autore propone certe funzioni d'utilità relativamente semplici atte allo scopo.

### **Summary**

Utility functions, which are used to determine insurance premiums, have to satisfy some conditions. After the development of these conditions, corresponding utility functions are proposed with relatively simple mathematical formulas.

