Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Band: 76 (1976)

Artikel: La formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique

Autor: Chuard, Philippe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967179

La formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique

Par Philippe Chuard, Pully

1. Introduction

La technique actuarielle qui est utilisée d'ordinaire lorsqu'on doit tenir compte de l'invalidité, notamment pour les caisses de pensions, comprend des formules dont la construction nécessite des choix entre diverses possibilités. C'est le cas, en particulier, pour la formule de récurrence relative à l'effectif des invalides. La question se pose d'inventorier les partis que l'on peut prendre pour cette formule et d'en examiner les caractéristiques.

Rappelons préalablement deux définitions.

L'*effectif* est un groupe de personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs causes de sortie et d'entrée.

L'*ordre* est un groupe de personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs causes de sortie uniquement; si une seule cause agit, l'ordre est *simple;* si plusieurs causes agissent, l'ordre est *composé.*

Pour la technique actuarielle envisagée ici on sépare les actifs des invalides dans l'ordre l_x des vivants. Considérons les deux cas suivants:

$$l_x = \Lambda_x^a + \Lambda_x^i \tag{1}$$

$$l_x = l_x^{aa} + \lambda_x^i \tag{2}$$

avec

			causes: de sortie	causes: d'entrée
l_x	ordre simple	des vivants	décès	
Λ_x^a	effectif	des actifs	décès, invalidité	réactivité
Λ_x^i	effectif	des invalides	décès, réactivité	invalidité
l_x^{aa}	ordre composé	des actifs	décès, invalidité	
λ_x^i	effectif	des invalides	décès	invalidité

Nous disons que la relation (1) caractérise le *modèle rationnel* et que la relation (2) caractérise le *modèle pratique.* Seul le modèle pratique sera envisagé dans la suite.

2. Relations de base du modèle pratique

Désignant par des *lettres latines* (l, d, b) les *ordres* ainsi que les nombres de personnes qui en dépendent, et par des *lettres grecques* (λ, δ) les *effectifs* ainsi que les nombres de personnes qui en dépendent, nous adoptons les notations suivantes:

l_x vivants d'âge x

l_x^{aa} actifs d'âge x

λ_x^i invalides d'âge x

b_x actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge $x+1$

d_x^{aa} actifs d'âge x décédés à l'état d'actif avant l'âge $x+1$

d_x^{ai} actifs d'âge x devenus invalides puis décédés à l'état d'invalide avant l'âge $x+1$

δ_x^i invalides d'âge x décédés avant l'âge $x+1$

l_{x+1}^{ai} actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge $x+1$, en vie à l'âge $x+1$

λ_{x+1}^{ii} invalides d'âge x, en vie à l'âge $x+1$

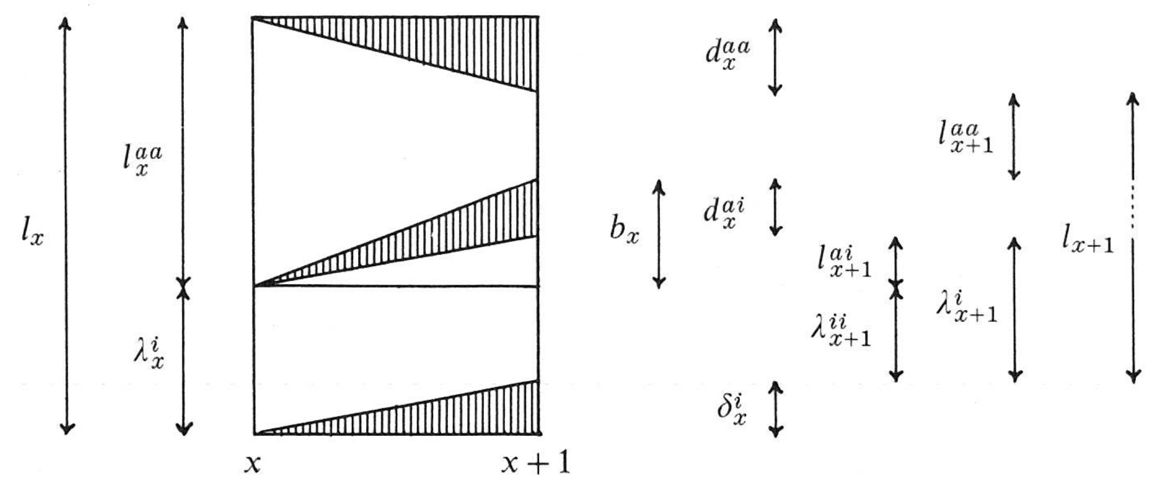
l_{x+1}^{aa} actifs d'âge x, en vie à l'état d'actif à l'âge $x+1$

λ_{x+1}^i invalides d'âge x et actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge $x+1$, en vie à l'âge $x+1$

l_{x+1} vivants d'âge x, en vie à l'âge $x+1$

d_x vivants d'âge x décédés avant l'âge $x+1$

On peut observer que les nombres l et λ sont des *états* attachés à un *instant*, qui est celui de l'âge indiqué en indice. Par contre les nombres d, b et δ sont des *cumuls* attachés à une *durée*, qui est de un an dès l'âge indiqué en indice. Le passage de l_x à l_{x+1} est illustré par le schéma qui suit, dans lequel apparaissent les notations introduites:



Ce schéma permet d'établir immédiatement les relations ci-dessous.

$$l_x = l_x^{aa} + \lambda_x^i \tag{2}$$

$$l_{x+1}^{ai} = b_x - d_x^{ai} \tag{3}$$

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} - d_x^{aa} - b_x \tag{4}$$

$$\lambda_{x+1}^{ii} = \lambda_x^i - \delta_x^i \tag{5}$$

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x+1}^{ii} + l_{x+1}^{ai} \tag{6}$$

$$l_{x+1} = l_{x+1}^{aa} + \lambda_{x+1}^i \tag{7}$$

$$d_x = d_x^{aa} + d_x^{ai} + \delta_x^i \tag{8}$$

$$l_{x+1} = l_x - d_x \tag{9}$$

Constatons que le trait commun de ces relations est de ne pas faire intervenir de probabilités.
Eliminant λ_{x+1}^{ii} entre (5) et (6) on obtient une formule de récurrence pour l'effectif des invalides:

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i - \delta_x^i + l_{x+1}^{ai}. \tag{10}$$

3. Probabilités

3.1. Probabilités indépendantes

Partant des ordres simples		causes de sortie
l_x	pour les vivants	décès
$l_x^{(a)}$	pour les actifs vivants	décès d'actif
$l_x^{(b)}$	pour les non invalides	invalidité
l_x^i	pour les invalides vivants	décès d'invalide

on définit les probabilités indépendantes

$$\left.\begin{aligned} q_x &= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} & \qquad q_x^a &= 1 - \frac{l_{x+1}^{(a)}}{l_x^{(a)}} \\ i_x &= 1 - \frac{l_{x+1}^{(b)}}{l_x^{(b)}} & \qquad q_x^i &= 1 - \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

qui permettent d'écrire les relations

$$l_{x+1} = l_x (1 - q_x) \tag{12}$$

$$\lambda^{ii}_{x+1} = \lambda^i_x (1 - q^i_x) \tag{13}$$

$$l^{aa}_{x+1} = l^{aa}_x (1 - q^a_x)(1 - i_x) \tag{14}$$

$$d_x = l_x q_x \tag{15}$$

$$\delta^i_x = \lambda^i_x q^i_x \tag{16}$$

$$\lambda^i_{x+1} = \lambda^i_x (1 - q^i_x) + l^{ai}_{x+1}. \tag{17}$$

La relation (14) correspond à la situation caractérisée par l'indépendance des événements qui agissent sur q^a_x et i_x.
La formule de récurrence (17) s'obtient en tenant compte de (16) dans (10), ou de (13) dans (6). L'élément l^{ai}_{x+1}, dont elle dépend, sera examiné ultérieurement.

3.2. Probabilités dépendantes

Définissant les probabilités dépendantes par

$$*q^a_x = \frac{d^{aa}_x}{l^{aa}_x} \qquad *i_x = \frac{b_x}{l^{aa}_x} \tag{18}$$

on a les relations

$$d^{aa}_x = l^{aa}_x *q^a_x \tag{19}$$

$$b_x = l^{aa}_x *i_x \tag{20}$$

$$l^{aa}_{x+1} = l^{aa}_x (1 - *q^a_x - *i_x). \tag{21}$$

La formule (21) est obtenue en tenant compte, dans (4), de (19) et de (20).

4. Problème

Les probabilités indépendantes (11) doivent permettre le passage de l_x, décomposé selon (2), à l_{x+1}, décomposé selon (7). Ce passage implique une liaison entre les probabilités dépendantes (18) et les probabilités indépendantes (11), ainsi que le choix d'une formule de récurrence, découlant de (17), pour l'effectif des invalides.

Nous examinerons diverses solutions en les soumettant à trois conditions et en envisageant deux possibilités pour l'expression de l_{x+1}^{ai}.

5. Conditions

5.1. Première condition

Dans l'ordre l_x^{aa} deux causes de sortie, le décès et l'invalidité, agissent de manière symétrique. L'influence de i_x sur q_x^a, dans $^*q_x^a$, doit être la même que celle de q_x^a sur i_x, dans $^*i_x$:

$$^*q_x^a = f(q_x^a, i_x) \quad \Rightarrow \quad ^*i_x = f(i_x, q_x^a), \tag{22}$$

f étant, dans les deux cas, la même fonction.

5.2. Deuxième condition

Compte tenu des formules (14) et (21) on doit avoir:

$$1 - {}^*q_x^a - {}^*i_x = (1 - q_x^a)(1 - i_x). \tag{23}$$

5.3. Troisième condition

Il est évident que les trois probabilités indépendantes de décès q_x, q_x^a et q_x^i doivent être égales si deux d'entre elles le sont:

$$\left.\begin{array}{l} q_x = q_x^a \quad \text{ou} \quad q_x = q_x^i \quad \text{ou} \quad q_x^a = q_x^i \\ \quad \Rightarrow \quad q_x = q_x^a = q_x^i \end{array}\right\} \tag{24}$$

6. Cas N° 1

6.1. Caractéristiques

Au titre 2. a été introduit le nombre l_{x+1}^{ai} des actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge $x+1$ et étant en vie à l'âge $x+1$. Nous caractérisons le cas N° 1 par la relation suivante

$$l_{x+1}^{ai} = b_x \, {}_{\frac{1}{2}}p_x^i \tag{25}$$

qui, en vertu de (3), entraîne

$$d_x^{ai} = b_x \, {}_{\frac{1}{2}}q_x^i. \tag{26}$$

Sachant que

$${}_{\frac{1}{2}}p_x^i = \frac{l_{x+\frac{1}{2}}^i}{l_x^i}, \qquad {}_{\frac{1}{2}}q_x^i = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_x^i,$$

posant en outre

$$l_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2}(l_x^i + l_{x+1}^i)$$

et remplaçant b_x par sa valeur tirée de (20), on transforme (25) et (26) en

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^{aa} * i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) \tag{27}$$

$$d_x^{ai} = l_x^{aa} * i_x \frac{q_x^i}{2}. \tag{28}$$

La formule de récurrence (17) pour l'effectif des invalides devient, compte tenu de (27),

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i (1 - q_x^i) + l_x^{aa} * i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right). \tag{29}$$

Cette formule est une caractéristique du cas No 1. Appliquée par Schaertlin[1], elle est, depuis lors, couramment utilisée. Citons, par exemple, son emploi dans les Tables EVK 1970[2].

Dans la suite, pour l'examen de la troisième condition (24) dans le cas No 1, nous utiliserons la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i)\, q_x = l_x^{aa} * q_x^a + l_x^{aa} * i_x \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i \, q_x^i \tag{30}$$

obtenue en tenant compte, dans (8), de (15), (2), (19), (28) et (16).

[1] Bibliographie citée [4]; page 47.

[2] Bibliographie citée [1]; page 7, formule (11).

6.2. Solution A

Si, pour exprimer les probabilités dépendantes $*q_x^a$ et $*i_x$ au moyen des probabilités indépendantes q_x^a et i_x on prend pour point de départ

$$q_x^a = \frac{d_x^{aa} + \frac{1}{2} b_x \, q_x^a}{l_x^a}, \qquad i_x = \frac{b_x + \frac{1}{2} d_x^{aa} \, i_x}{l_x^a}$$

et qu'on tient compte des relations (18), on obtient les formules

$$*q_x^a = q_x^a \frac{1 - \frac{i_x}{2}}{1 - \frac{q_x^a \, i_x}{4}}, \qquad *i_x = i_x \frac{1 - \frac{q_x^a}{2}}{1 - \frac{i_x \, q_x^a}{4}} \tag{31}$$

indiquées notamment par Saxer[3].

Lorsqu'on remplace $*i_x$ par son expression (31), la formule de récurrence (29) devient

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i \, (1 - q_x^i) + l_x^{aa} \, i_x \frac{1 - \frac{q_x^a}{2}}{1 - \frac{i_x \, q_x^a}{4}} \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right). \tag{32}$$

Les relations (31) de la solution A remplissent la première condition (22); elles ne remplissent pas la deuxième (23) puisqu'elles conduisent à

$$1 - *q_x^a - *i_x = \frac{(1 - q_x^a)\,(1 - i_x) - \frac{q_x^a \, i_x}{4}}{1 - \frac{q_x^a \, i_x}{4}}.$$

[3] Bibliographie citée [3]; page 25, formules (2. 4. 9.).

Quant à la troisième condition (24) elle est satisfaite puisque la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i)\, q_x = l_x^{aa}\, q_x^a \frac{1 - \dfrac{i_x}{2}}{1 - \dfrac{q_x^a\, i_x}{4}} + l_x^{aa}\, i_x \frac{1 - \dfrac{q_x^a}{2}}{1 - \dfrac{i_x\, q_x^a}{4}} \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i\, q_x^i,$$

obtenue en tenant compte de (31) dans (30), est vérifiée identiquement pour $q_x = q_x^a = q_x^i$.

6.3. *Solution B*

Pour exprimer $*q_x^a$ et $*i_x$ en fonction de q_x^a et i_x on peut tenir le raisonnement suivant. Si i_x agit seul entre les âges x et $x+1$, alors l_x^{aa} diminue de $l_x^{aa}\, i_x$ et le nombre moyen des personnes pendant l'année est $l_x^{aa}\left(1 - \dfrac{i_x}{2}\right)$. Par conséquent on peut écrire

$$d_x^{aa} = l_x^{aa}\left(1 - \frac{i_x}{2}\right) q_x^a$$

et, par un raisonnement analogue,

$$b_x = l_x^{aa}\left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right) i_x.$$

Compte tenu des relations (18) on obtient les formules

$$*q_x^a = q_x^a\left(1 - \frac{i_x}{2}\right), \qquad *i_x = i_x\left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right), \tag{33}$$

indiquées notamment par Zwinggi[4].
Lorsqu'on remplace $*i_x$ par son expression (33), la formule de récurrence (29) devient

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i\,(1 - q_x^i) + l_x^{aa}\, i_x\left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right)\left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right). \tag{34}$$

[4] Bibliographie citée [5]; page 31, formules (1.49).

Les relations (33) de la solution B remplissent la première condition (22) et la deuxième (23). La troisième condition (24) n'est pas remplie car la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i)\, q_x = l_x^{aa}\, q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2}\right) + l_x^{aa}\, i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right) \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i\, q_x^i,$$

obtenue en tenant compte de (33) dans (30), n'est pas vérifiée identiquement pour $q_x = q_x^a = q_x^i$.

6.4. Solution C

Il est possible de satisfaire les deuxième (23) et troisième (24) conditions. On pose pour cela

$$^*q_x^a = q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2} \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}}\right), \qquad ^*i_x = i_x \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}}, \tag{35}$$

mais alors la première condition (22) n'est pas remplie.
La formule de récurrence (29) devient dans ce cas

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i (1 - q_x^i) + l_x^{aa}\, i_x \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}} \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right). \tag{36}$$

Quant à la relation obtenue à partir de (30) et (35), et vérifiée identiquement pour $q_x = q_x^a = q_x^i$, elle s'écrit

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i)\, q_x = l_x^{aa}\, q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2} \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}}\right) + l_x^{aa}\, i_x \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}} \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i\, q_x^i.$$

7. Cas N° 2

7.1. Caractéristiques

Nous caractérisons le cas N° 2 par la relation suivante

$$l_{x+1}^{ai} = b_{x\frac{1}{2}}\, p_{x+\frac{1}{2}}^i \tag{37}$$

qui, en vertu de (3), entraîne

$$d_x^{ai} = b_{x\frac{1}{2}}\, q_{x+\frac{1}{2}}^i. \tag{38}$$

Sachant que

$$ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}} = \frac{l^i_{x+1}}{l^i_{x+\frac{1}{2}}}, \qquad {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}, $$

posant en outre

$$ l^i_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(l^i_x + l^i_{x+1}) $$

et remplaçant b_x par sa valeur tirée de (20), on transforme (37) et (38) en

$$ l^{ai}_{x+1} = l^{aa}_x \, {}^*i_x \frac{1-q^i_x}{1-\dfrac{q^i_x}{2}} \tag{39} $$

$$ d^{ai}_x = l^{aa}_x \, {}^*i_x \frac{\dfrac{q^i_x}{2}}{1-\dfrac{q^i_x}{2}}. \tag{40} $$

La structure de la relation (39) se retrouve dans des développements dus à W. Küttner, antérieurs d'une vingtaine d'années à ceux de Schaertlin[5] et cités par Richard[6].

La formule de récurrence (17) pour l'effectif des invalides devient, compte tenu de (39),

$$ \lambda^i_{x+1} = \lambda^i_x (1-q^i_x) + l^{aa}_x \, {}^*i_x \frac{1-q^i_x}{1-\dfrac{q^i_x}{2}}. \tag{41} $$

Cette formule est une caractéristique du cas No 2.

Dans la suite, pour l'examen de la troisième condition (24) dans le cas No 2, nous utiliserons la relation

$$ (l^{aa}_x + \lambda^i_x)\, q_x = l^{aa}_x \, {}^*q^a_x + l^{aa}_x \, {}^*i_x \frac{\dfrac{q^i_x}{2}}{1-\dfrac{q^i_x}{2}} + \lambda^i_x \, q^i_x, \tag{42} $$

obtenue en tenant compte, dans (8), de (15), (2), (19), (40) et (16).

[5] Bibliographie citée [4].

[6] Bibliographie citée [2]; page 109, formule (64) et formule suivante.

7.2. *Solution D*

Reprenons les relations (33) de la solution B

$$*q_x^a = q_x^a\left(1 - \frac{i_x}{2}\right) \qquad *i_x = i_x\left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right). \tag{43}$$

La formule de récurrence (41) devient

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i\,(1 - q_x^i) + l_x^{aa}\, i_x\left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right)\frac{1 - q_x^i}{1 - \dfrac{q_x^i}{2}}. \tag{44}$$

Comme pour la solution B, les deux premières conditions (22) et (23) sont satisfaites. En outre la troisième condition (24) l'est également; en effet la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i)\, q_x = l_x^{aa}\, q_x^a\left(1 - \frac{i_x}{2}\right) + l_x^{aa}\, i_x\left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right)\frac{\dfrac{q_x^i}{2}}{1 - \dfrac{q_x^i}{2}} + \lambda_x^i\, q_x^i,$$

obtenue en tenant compte de (43) dans (42), est vérifiée identiquement pour $q_x = q_x^a = q_x^i$.

7.3. *Condition supplémentaire*

Les conventions qui sont à la base du cas N° 2 satisfont à une condition que ne remplissent pas les solutions qui se rattachent au cas N° 1.
Considérons les trois formules suivantes qui donnent la valeur initiale de la rente future d'invalidité:

$$\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_x^{aa} + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a}(\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^i) \tag{45}$$

$$\ddot{a}_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}} \tag{46}$$

$$\ddot{a}_x^{ai} = \underline{\ddot{a}}_x^{ai} - \frac{1}{2} K_x^{ai}. \tag{47}$$

La formule (45) fait intervenir les valeurs actuelles

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_x^{aa}}{D_x^{aa}} \qquad \ddot{a}_x^{i} = \frac{N_x^{i}}{D_x^{i}}$$

où les nombres de commutation

$$\begin{aligned} D_x &= v^x \, l_x & N_x &= \sum D_x \\ D_x^{aa} &= v^x \, l_x^{aa} & N_x^{aa} &= \sum D_x^{aa} \\ D_x^{i} &= v^x \, l_x^{i} & N_x^{i} &= \sum D_x^{i} \end{aligned}$$

dépendent des nombres de personnes l_x, l_x^{aa}, l_x^{i} que l'on établit au moyen des probabilités indépendantes (11). Laissons provisoirement en suspens la liaison entre λ_x^{i}, qui apparaît dans (45), et les probabilités indépendantes (11).
La formule (46) dépend des nombres de commutation

$$D_x^{ai} = v^{x+1} \, l_{x+1}^{ai} \;\; \ddot{a}_{x+1}^{i} \qquad N_x^{ai} = \sum D_x^{ai}. \tag{48}$$

Dans la formule (47) la valeur actuelle

$$\underline{\ddot{a}}_x^{ai} = \frac{\underline{N}_x^{ai}}{D_x^{aa}} \tag{49}$$

est celle de la rente future d'invalidité avec prorata initial, et

$$K_x^{ai} = \frac{M_x^{ai}}{D_x^{aa}} \tag{50}$$

est la valeur actuelle du capital en cas d'invalidité; ces deux valeurs actuelles dépendent des nombres de commutation

$$\underline{D}_x^{ai} = v^{x+\frac{1}{2}} b_x \, \ddot{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} \qquad \underline{N}_x^{ai} = \sum \underline{D}_x^{ai} \tag{51}$$

$$C_x^{ai} = v^{x+\frac{1}{2}} b_x \qquad M_x^{ai} = \sum C_x^{ai}. \tag{52}$$

Les trois formules (45), (46) et (47) doivent conduire au même résultat. L'équivalence entre (45) et (46) se démontre en tenant compte, dans (48), de

$$l_{x+1}^{ai} = \lambda_{x+1}^{i} - (1 - q_x^{i}) \, \lambda_x^{i}$$

qui découle de (17); la démonstration ne dépend donc pas de la manière dont l_{x+1}^{ai} s'exprime en fonction des probabilités (11) ou (18).

L'équivalence entre (46) et (47) s'exprime, compte tenu des formules (48) à (52), par

$$l^{ai}_{x+1}\,\ddot{a}^{i}_{x+1} = r^{\frac{1}{2}} b_x \left(\ddot{a}^{i}_{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right).$$

Cette condition, si l'on pose

$$\ddot{a}^{i}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + v^{\frac{1}{2}}\,{}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}\,\ddot{a}^{i}_{x+1},$$

devient

$$l^{ai}_{x+1} = b_x\,{}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}. \tag{53}$$

C'est la relation (37) qui est à la base du cas N° 2.
La condition (53) impose, pour λ^i_x qui apparaît dans (45), la formule de récurrence (41) du cas N° 2. Si l'on admet en outre les relations (43) de la solution D, on doit adopter la formule (44).

8. Conclusion

La formule de récurrence pour l'effectif λ^i_x des invalides dépend de deux choix. L'un se rapporte à la formule de l^{ai}_{x+1}, l'autre, à l'expression des probabilités dépendantes $^*q^a_x$ et $^*i_x$ en fonction des probabilités indépendantes q^a_x et i_x.
Très généralement, et depuis longtemps, il est usuel d'adopter la formule de récurrence (29). On se place ainsi dans le cas N° 1 qui a été présenté au titre 6. de cette étude. Dans la formule (29) apparaît la probabilité dépendante $^*i_x$. Pour ne faire intervenir que des probabilités indépendantes, trois possibilités ont été examinées; elles ont conduit aux formules (32), (34) et (36).
Les développements qui précèdent montrent que la formule de l^{ai}_{x+1} qui est à la base du cas N° 2 permet d'établir une relation de récurrence (41) pour λ^i_x telle que trois conditions essentielles peuvent être simultanément remplies. Il n'en va pas de même pour la formule de l^{ai}_{x+1} qui est à la base du cas N° 1. En outre une condition supplémentaire ne peut être satisfaite que dans le cas N° 2. Enfin, à la réflexion, la formule (37) du cas N° 2 paraît être une expression plus correcte de l^{ai}_{x+1} que la formule (25) du cas N° 1.
La solution D, présentée au titre 7.2. et se rattachant au cas N° 2, avec en particulier sa formule de récurrence (44) pour l'effectif des invalides, devrait donc être préférée aux autres.

Bibliographie citée

[1] *Eidgenössische Versicherungskasse:* Technische Grundlagen EVK 1970, Text.
[2] *Richard, P.-J.:* Théorie et pratique des opérations d'assurance, tome 2, 1946.
[3] *Saxer, W.:* Versicherungsmathematik, 1. Teil, 1955.
[4] *Schaertlin, G.:* Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1. Heft, 1906.
[5] *Zwinggi, E.:* Versicherungsmathematik, 2. Auflage, 1958.

Philippe Chuard, actuaire
Professeur ordinaire
à l'Université de Lausanne
Avenue de Lavaux 93
CH-1009 Pully

Zusammenfassung

Die in der versicherungsmathematischen Technik der Pensionskassen für den Bestand der Invaliden gewöhnlich benützte Rekursionsformel führt zu Engpässen, welche eine andere vom Verfasser vorgeschlagene Formel vermeidet.

Résumé

La formule de récurrence ordinairement utilisée pour l'effectif des invalides dans la technique actuarielle destinée aux caisses de pensions conduit à des impasses qu'évite une autre formule, proposée par l'auteur.

Riassunto

Nella teoria delle casse pensioni si utilizza normalmente una formola di ricorrenza per descrivere la collettività degli invalidi. Questa formola può in certi casi creare qualche difficoltà che potrebbe essere evitata usando un'altra formola come propone l'autore.

Summary

The recurrence formula commonly used by pension fund experts for the description of the collective of disabled persons gives rise to a few calculating difficulties. These can be avoided by taking an alternative formula as proposed by the author.