Numerische Methoden der Zinsrechnung in der Versicherungsmathematik

Autor(en): **Stauber, Kurt**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **76 (1976)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967182

Numerische Methoden der Zinsrechnung in der Versicherungsmathematik*

Von Kurt Stauber

1. Berechnung der versicherungsmathematischen Grössen mit Hilfe des Matrizenkalküls

Kommutationszahlen und Barwerte können im Computer durch Matrizen dargestellt werden. Ausgehend von der Reihe der Abzinsungsfaktoren und der Überlebensordnung, werden zunächst die beiden Vektoren

$$V = \boxed{v^x \; v^{x+1} \ldots v^{\omega}}$$

und

$$L = \begin{array}{|c|} \hline l_x \\ l_{x+1} \\ \vdots \\ l_{\omega} \\ \hline \end{array}$$

gebildet. Durch Multiplikation entsteht

$$V \cdot L = N_x .$$

Der Vektor V lässt sich auf die Matrix

$$V = \begin{pmatrix} v^x & v^{x+1} & \ldots & v^{\omega} \\ 0 & v^{x+1} & \ldots & v^{\omega} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & v^{\omega} \end{pmatrix}$$

erweitern, wobei alle Elemente unterhalb der Vektordiagonalen Null sind.

Daraus ergibt sich das Produkt

$$V \cdot L = N = \begin{array}{|c|} \hline N_x \\ N_{x+1} \\ \vdots \\ N_{\omega} \\ \hline \end{array}$$

* Nach einem an der ETH Zürich, anlässlich der Verleihung des «Walter Saxer-Versicherungs-Hochschulpreises», am 5. Februar 1976 gehaltenen Vortrag.

Die grundlegenden Matrizen V und L werden zunächst normiert, so dass ihre ersten Elemente 1 betragen. Dadurch wird $D_x = 1$.
Werden noch die beiden Hilfsmatrizen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eingeführt, so lassen sich folgende Formeln aufstellen:

Klassische Schreibweise	*Matrixform*	
$D_x = v^x \cdot l_x$	$N = V \cdot L$	(1)
$N_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_0^{n-1} D_{x+t}$	$D = \overset{(x)}{N} - \overset{(x+1)}{N}$	(2)
$S_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_0^{n-1} N_{x+t}$	$S = H \cdot N$	(3)
$C_x = v^{x+1} \cdot (l_x - l_{x+1})$	$M = \overset{(x+1)}{V} \cdot (\overset{(x)}{L} - \overset{(x+1)}{L})$	(4)
$M_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_0^{n-1} C_{x+t}$	$C = \overset{(x)}{M} - \overset{(x+1)}{M}$	(5)
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{N_{x:\overline{n}\rceil}}{D_x}$	$(\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}) = N$	(6)
$A_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{M_{x:\overline{n}\rceil} + D_{x+n}}{D_x}$	$A = M + E + \overset{(x+1)}{N} - \overset{(x)}{N}$	(7)
$= \frac{M_{x:\overline{n}\rceil}}{D_x} + 1 + a_{x:\overline{n}\rceil} - \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$		

Erläuterungen:

- Matrizen sind mit grossen Buchstaben bezeichnet. Die Indizes (x) und $(x+1)$ deuten die Verschiebung der Zeilen oder Spalten um 1 an; beginnt z. B. in $\overset{(x)}{L}$ die erste Zeile mit l_x, so ist in $\overset{(x+1)}{L}$ das erste Element l_{x+1}. Die Zahl der Elemente muss beibehalten werden, nötigenfalls durch Hinzufügen von Nullen.
- Im Gegensatz zur traditionellen Berechnungsweise werden direkt die Werte N_x und erst aus diesen D_x ermittelt.
- Die Verschmelzung der Grundlagen Zins und Sterblichkeit erfolgt auf der Stufe der N_x, statt auf derjenigen der D_x. Dieser Umstand kann für gewisse Untersuchungen von Bedeutung sein.

Die Formelsammlung kann beliebig erweitert werden, solange darin nur Divisionen durch $D_x = 1$ vorkommen. Für die Berechnung von Prämiensätzen, z. B. von $P_{x:\overline{n}|}$ für gemischte Versicherungen, versagt die Matrizenrechnung jedoch, weil die Division durch N nicht ausführbar ist. Die Matrix $P = (P_{x:\overline{n}|})$ muss also durch die herkömmliche schrittweise Berechnung

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{8}$$

erzeugt werden.

Die Formel der Nettoeinlage $A_{x:\overline{n}|}$ der gemischten Versicherung stimmt in traditioneller und in Matrix-Darstellung formal überein, wobei die Matrix E die Rolle der Einheit übernimmt.

2. Zahlenbeispiele für zeitlich konstante technische Zinssätze

2.1. Gesucht seien die Rentenbarwerte für $x = 20, 30, 40$ und 50 und $n = 20, 30$ und 40 zu den Grundlagen GKM 1970, $3\frac{1}{4}\%$.

Ausgangspunkt der Berechnung sind die Matrizen

$$V = \begin{pmatrix} 1\ v\ v^2 & \ldots & v^9 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 1\ v\ v^2 & \ldots & v^9 & \ldots & v^{19} & \ldots & 0 \\ 1\ v\ v^2 & \ldots & v^9 & \ldots & v^{19} & \ldots & v^{29} \end{pmatrix}$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_{21} & l_{31} & l_{41} & l_{51} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{49} & l_{59} & l_{69} & l_{79} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt $V \cdot L$ ergibt das gesuchte Resultat

$$(\text{ä}_{x:\overline{n}|}) = \begin{array}{r} \\ n = 10 \\ 20 \\ 30 \end{array} \begin{array}{cccc} x = 20 & 30 & 40 & 50 \\ \hline 8.648 & 8.637 & 8.571 & 8.377 \\ 14.838 & 14.751 & 14.407 & 13.530 \\ 19.219 & 18.913 & 17.996 & 15.985 \end{array}$$

2.2. Es sind die Rentenbarwerte zu berechnen, wenn das Wertepaar $x:n$ als Parameter aufgefasst wird und die technischen Grundlagen verändert werden. In die Matrix V werden zeilenweise die Abzinsungsfaktoren für $i = 2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, 4, $4\frac{3}{4}$ und $5\frac{1}{2}$% eingesetzt und in L Überlebensordnungen auf Grund multiplikativ veränderter, nämlich mit 2, 1.5, 1 und 0.75 multiplizierter Sterbenswahrscheinlichkeiten GKM 1970.
Nach der Formel (6) ergibt sich für das Parameterpaar $x = 25$, $n = 30$ folgendes Ergebnis:

$$\boxed{\text{ä}_{25:\overline{30}|}}$$

Zins	Sterblichkeit 200%	150%	100%	75%
$2\frac{1}{2}$%	20,354	20,619	20,891	21,029
$3\frac{1}{4}$%	18,649	18,878	19,113	19,232
4%	17,160	17,359	17,563	17,666
$4\frac{3}{4}$%	15,855	16,029	16,206	16,296
$5\frac{1}{2}$%	14,707	14,859	15,013	15,092

Praktischer Hinweis:
Der Anwendung des Matrizenkalküls können gewisse Schranken gesetzt sein, einmal durch die Kapazität des Computers und sodann, wenn bestimmte Rundungsvorschriften zu beachten sind, die bei der Matrixmultiplikation nicht programmiert werden können.

3. Modell mit variablem technischen Zinssatz

In Anlehnung an die tatsächlichen wirtschaftlichen Verhältnisse kann der Zins als diskontinuierliche Funktion der Zeit definiert werden. Jedem Kalenderjahr

t werde der Satz $i_{(t)}$ zugeordnet. Die Abzinsungsfaktoren werden nach der Rekursionsformel

$$v_{(t)} = \frac{v_{(t-1)}}{1+i_{(t_0+t-1)}}$$

berechnet, wobei t_0 das Beginnjahr bedeutet und t die Versicherungsdauer durchläuft, also der Bedingung $0 \leq t \leq n$ gehorcht.
In einem praktischen Beispiel sollen die Rentenbarwerte sowie die einmaligen und periodischen Nettoprämien einer gemischten Versicherung (Summe 10000, $x = 40$, $n = 20$), gleichzeitig für verschiedene Grundlagen, ermittelt werden.

Bei der Festsetzung des technischen Zinssatzes $i_{(t)}$ stützen wir uns auf statistische Angaben des Eidgenössischen Versicherungsamtes, dessen Jahresberichten der mittlere Zinsertrag auf den Kapitalanlagen der schweizerischen Lebensversicherungsgesellschaften seit 1930 entnommen wurden. Der zeitliche Verlauf dieses Zinses ist aus der Graphik I im Anhang zu ersehen (der Wert für das Jahr 1974 ist mangels genauer Angaben geschätzt).
Analog soll in einem bestimmten Kalenderjahr diejenige Sterbenswahrscheinlichkeit gelten, die der Volkssterbetafel des betreffenden Jahrzehnts entspricht.

Schema der verwendeten Volkssterbetafeln

<table>
<tr><th rowspan="2">Verflossene Dauer</th><th colspan="6">Versicherungsbeginn</th></tr>
<tr><th>1930</th><th>1935</th><th>1940</th><th>1945</th><th>1950</th><th>1955</th></tr>
<tr><td>0 – 4 Jahre</td><td rowspan="2">SM 31/41</td><td>SM 31/41</td><td rowspan="2">SM 41/50</td><td>SM 41/50</td><td rowspan="2">SM 50/60</td><td>SM 50/60</td></tr>
<tr><td>5 – 9 Jahre</td><td rowspan="2">SM 41/50</td><td rowspan="2">SM 50/60</td><td rowspan="3">SM 60/70</td></tr>
<tr><td>10 – 14 Jahre</td><td rowspan="2">SM 41/50</td><td rowspan="2">SM 50/60</td><td rowspan="2">SM 60/70</td></tr>
<tr><td>15 – 19 Jahre</td><td>SM 50/60</td><td>SM 60/70</td></tr>
</table>

Die Folge der Sterbenswahrscheinlichkeiten für 40- bis 60jährige Versicherte sind in der *Graphik II* dargestellt. Sie ergeben eine Art Generationentafeln, die allerdings bei Übergang von einem Jahrzehnt ins andere Unstetigkeiten aufweisen. Diese sind jedoch für die vorliegende Untersuchung nicht von Belang.

Der Zeitabschnitt von 1930 bis 1975 wird in sechs, mit I bis VI numerierte Teilabschnitte von je 20 Jahren eingeteilt, beginnend mit 1930, 1935, 1940, 1945, 1950 und 1955. Für jedes Intervall werden die Versicherungswerte berechnet, wenn Zins und Sterblichkeit gemäss den getroffenen Voraussetzungen jährlich ändern. Dadurch sind sechs Reihen von Abzinsungsfaktoren und sechs Überlebensordnungen definiert, in Matrixform angeordnet

$$V = \begin{pmatrix} 1\ v_{(1931)} & \cdots & v_{(1949)} \\ 1\ v_{(1936)} & \cdots & v_{(1954)} \\ 1\ v_{(1941)} & \cdots & v_{(1959)} \\ 1\ v_{(1946)} & \cdots & v_{(1964)} \\ 1\ v_{(1951)} & \cdots & v_{(1969)} \\ 1\ v_{(1956)} & \cdots & v_{(1974)} \end{pmatrix}$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_{41}^{\mathrm{I}} & l_{41}^{\mathrm{II}} & l_{41}^{\mathrm{III}} & l_{41}^{\mathrm{IV}} & l_{41}^{\mathrm{V}} & l_{41}^{\mathrm{VI}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{59}^{\mathrm{I}} & l_{59}^{\mathrm{II}} & l_{59}^{\mathrm{III}} & l_{59}^{\mathrm{IV}} & l_{59}^{\mathrm{V}} & l_{59}^{\mathrm{VI}} \end{pmatrix}$$

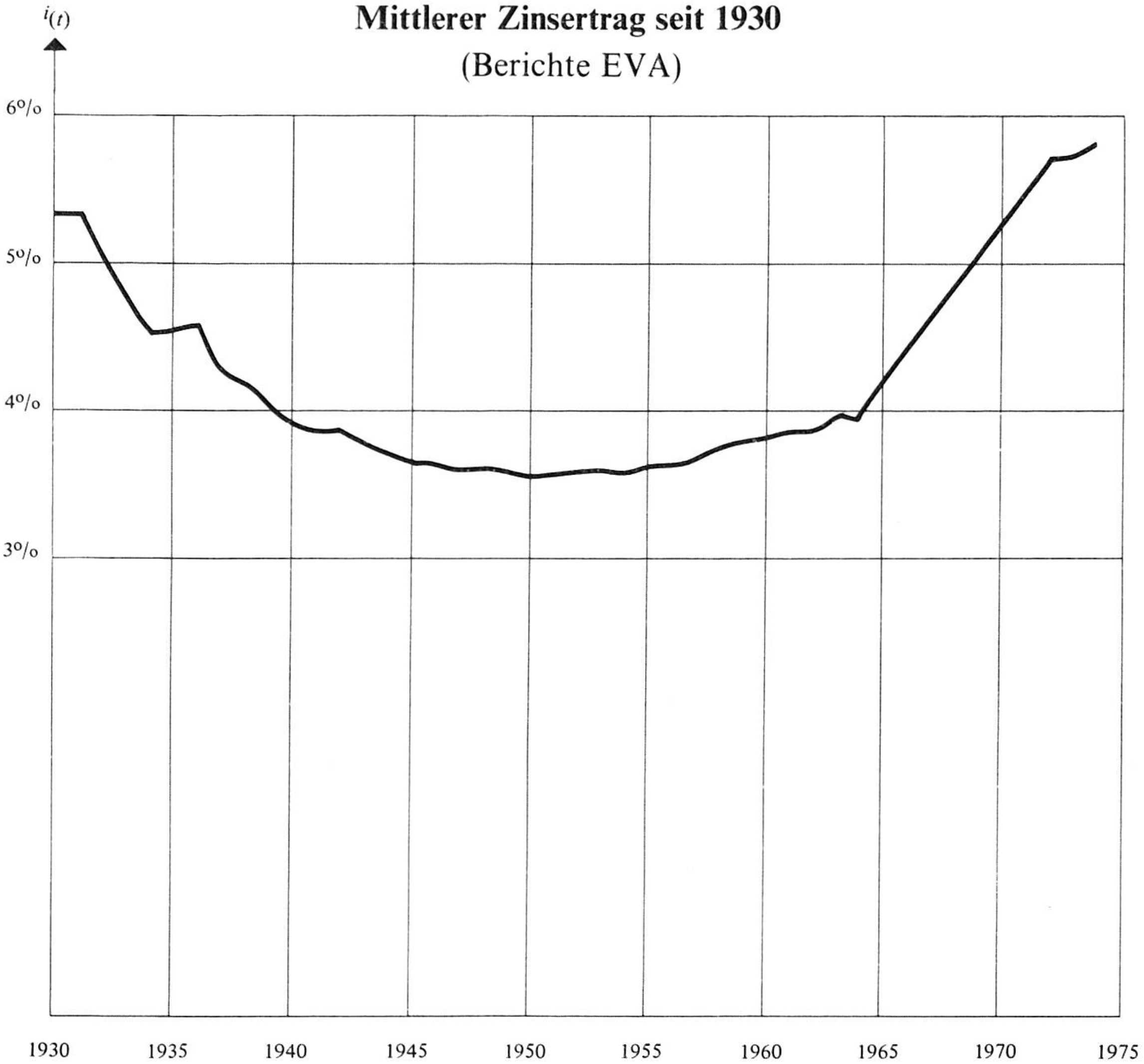
Mit Hilfe von (6), (7) und (8) ergeben sich folgende Resultate

	Zins	Sterblichkeit					
		I	II	III	IV	V	VI
$\ddot{a}_{40:\overline{20}\rceil}$	1930 – 49	12,690	12,756	12,859	12,907	12,980	13,000
	1935 – 54	13,202	13,271	13,380	13,431	13,508	13,529
	1940 – 59	13,524	13,596	13,708	13,761	13,840	13,862
	1945 – 64	13,628	13,701	13,813	13,867	13,946	13,969
	1950 – 69	13,558	13,629	13,741	13,794	13,873	13,895
	1955 – 74	13,294	13,363	13,471	13,522	13,598	13,619
$A_{40:\overline{20}\rceil}$	1930 – 49	4719	4695	4655	4638	4610	4602
	1935 – 54	5023	4999	4960	4942	4914	4907
	1940 – 59	5174	5149	5109	5091	5063	5055
	1945 – 64	5171	5144	5104	5084	5056	5048
	1950 – 69	4972	4943	4899	4878	4848	4839
	1955 – 74	4592	4560	4513	4489	4456	4446
$P_{40:\overline{20}\rceil}$	1930 – 49	372	368	362	359	355	354
	1935 – 54	381	377	371	368	364	363
	1940 – 59	383	379	373	370	366	365
	1945 – 64	379	375	369	367	363	361
	1950 – 69	367	363	357	354	349	348
	1955 – 74	345	341	335	332	328	326

Im Diagonalvektor von links oben nach rechts unten erkennt man die Werte nach Generationen, entsprechend den gewählten sechs Zeitabschnitten. Spaltenvektoren zeigen den Einfluss der Zinsvariation, Zeilenvektoren (von links nach rechts gelesen) denjenigen der Sterblichkeitsverbesserung.

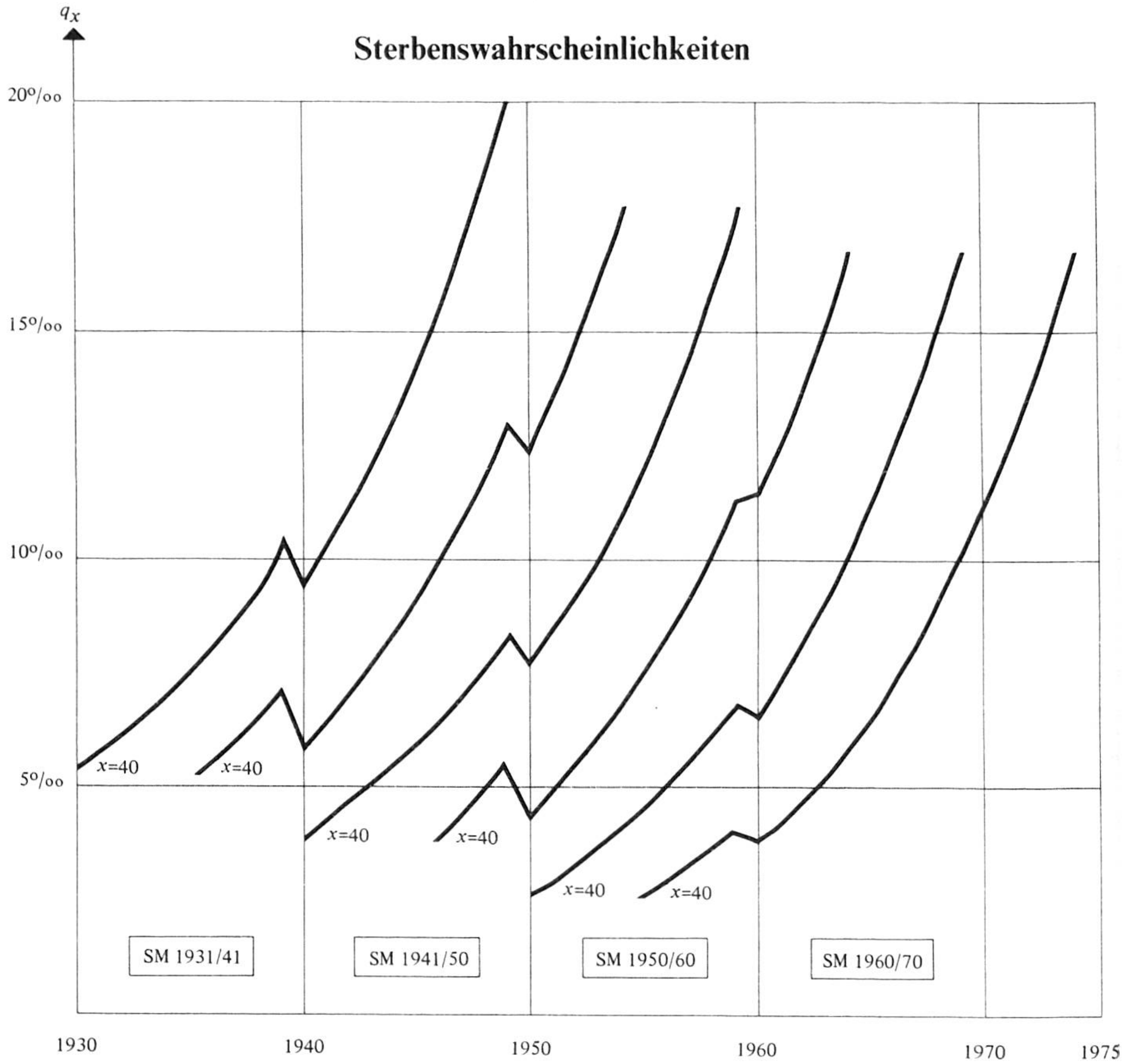
Graphik I

Mittlerer Zinsertrag seit 1930
(Berichte EVA)



Graphik II

Sterbenswahrscheinlichkeiten



Dr. Kurt Stauber
Direktor der Fortuna
Lebens-Versicherungs-Gesellschaft
Freigutstrasse 12
8027 Zürich

Zusammenfassung

1. Für das Rechnen im Computer werden Matrizen der Abzinsungsfaktoren und der Überlebensordnungen erstellt und Formeln für die Berechnung von Versicherungswerten mit Hilfe des Matrizenkalküls angegeben.
2. An zwei konkreten Beispielen wird die praktische Durchführung erläutert, wenn der technische Zinsfuss zeitlich konstant bleibt.
3. Der Zins wird als diskontinuierliche Funktion der Zeit definiert und in einem Beispiel für sechs ausgewählte Zeitabschnitte durch Erfahrungswerte belegt; analog werden sechs Überlebensordnungen gebildet. Mit Hilfe der Matrixdarstellung und der Formeln (6), (7) und (8) werden diese Grundlagen numerisch ausgewertet.

Résumé

1. Afin de calculer des valeurs actuarielles sur un ordinateur à l'aide de matrices, quelques formules connues sont transformées dans un langage approprié.
2. A titre d'exemple, le mécanisme à suivre est illustré dans deux cas numériques, le taux d'intérêt étant considéré constant pendant toute la durée d'assurance.
3. En admettant par contre le taux d'intérêt comme fonction discontinue du temps, un modèle de travail comprenant six périodes à 20 ans situées entre 1930 et 1975 est établi. Les bases techniques correspondent à des taux empiriques dans ces six périodes. Les valeurs actuelles d'une rente temporaire ainsi que les primes uniques et annuelles pour une assurance mixte sont calculées, simultanément pour les 36 combinaisons possibles, au moyen du calcul matriciel avec les formules (6), (7) et (8).

Riassunto

1. Per il calcolo sul computer alcune formole vengono tradotte nella lingua delle matrici.
2. Come primo esempio, questo metodo è applicato su due casi numerici con un tasso d'interesse costante durante tutto il tempo considerato.
3. Poi, l'interesse è definito come funzione discontinua del tempo e determinata su di una base statistica. Lo stesso è fatto per la mortalità. Anche in questo caso i calcoli si fanno colla tecnica delle matrici.

Summary

1. For computer purposes discount factors and mortalities are defined in matrix language and the formulae are translated correspondingly.
2. The technique is illustrated on two numerical cases with time-constant interest rate.
3. Then, the interest rate is considered as a discontinuous function of time determined on the basis of statistical data. Calculations in this case are performed by means of the two matrices for interest and mortality as well as the formulae (6), (7) and (8).