

# Berechnung der Verteilung der Schadenzahlen bei bekannter Verteilung der Wartezeiten

Autor(en): **Tellenbach, U.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **77 (1977)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967009>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Berechnung der Verteilung der Schadenzahlen bei bekannter Verteilung der Wartezeiten

Von U. Tellenbach, Baden

## Zusammenfassung

Die Verteilung der Schadenzahlen wird mit einer neuen Methode berechnet.

## I. Einführung

In der Risikotheorie wird meistens die Poisson-Verteilung als das grundlegende Modell zur Beschreibung der Schadenzahlen angeführt. Eine Poisson-Verteilung resultiert genau dann, wenn man annimmt, dass die Zeitintervalle («Wartezeiten»)  $T_j$  zwischen dem  $j$ -ten und dem  $(j+1)$ -ten Schadenfall stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind gemäss einer Exponentialverteilung. Trifft man etwas allgemeinere Annahmen, indem man zwar die stochastische Unabhängigkeit der Wartezeiten  $T_k$  beibehält, andererseits aber zulässt, dass die Intervalle  $T_k$  durch beliebige Verteilungen  $Q_k(s)$  beschrieben werden, so erhält man eine weit umfassendere Klasse von Schadenverteilungen, welche im folgenden näher untersucht werden sollen.

## II. Grundlegende Beziehungen

Sei  $\xi(t)$  ein stochastischer Prozess, welcher die Verteilung der Schadenfälle beschreibt; bezeichnet  $\xi(\omega, t)$  eine Realisierung des Prozesses, so gilt definitionsgemäss:

$$\xi(\omega, t) = \text{Anzahl der Schadenfälle im Intervall } (0, t) \quad (1)$$

Wir nehmen an, dass der  $j$ -te Schadenfall im Zeitpunkt  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) registriert wird. Ferner bezeichne

$$\begin{aligned} T_0 &= t_1 \\ T_j &= t_{j+1} - t_j \quad (j \geq 1) \end{aligned} \quad (2)$$

das Zeitintervall («Wartezeit») zwischen dem  $j$ -ten und dem  $(j+1)$ -ten Schadenfall. Wir setzen voraus, dass die Wartezeiten  $T_j$  stochastisch unabhängig sind,

und bezeichnen die Verteilungsfunktion der  $j$ -ten Wartezeit  $T_j$  mit  $Q_j(s)$ . Aus der Unabhängigkeit der  $T_0, T_1, \dots$  folgt sofort:

$$F_0(s) = \Pr(T_0 \leq s) = Q_0(s) \quad (\text{Pr} = \text{Probability})$$

$$F_n(s) = \Pr(T_0 + T_1 + \dots + T_n \leq s) = (Q_0 * Q_1 \dots * Q_n)(s). \quad (3)$$

Die Verteilung der Schadenfälle, die wir wie üblich mit  $\{p_n(t)\}$  bezeichnen,

$$p_n(t) = \Pr(\xi(t) = n), \quad (4)$$

ist durch die Verteilungsfunktionen  $Q_j(s)$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) völlig bestimmt:

$$p_0(t) = \Pr(T_0 > t) = 1 - Q_0(t) \quad (5)$$

$$p_n(t) = \int_0^t \Pr(T_n > t-s) d\Pr(T_0 + \dots + T_{n-1} \leq s) \quad (n \geq 1)$$

$$= \int_0^t (1 - Q_n(t-s)) dF_{n-1}(s),$$

d.h.

$$p_n(t) = (Q_0 * \dots * Q_{n-1})(t) - (Q_0 * \dots * Q_{n-1} * Q_n)(t). \quad (6)$$

Wir setzen voraus, dass die folgenden Laplace-Transformationen ( $L$ ) existieren:

$$\phi_j(\theta) = L(Q_j'(s)) = \int_0^{\infty} e^{-\theta s} Q_j'(s) ds \quad (7)$$

$$\psi_j(\theta) = L(p_j'(s)) = \int_0^{\infty} e^{-\theta s} p_j'(s) ds. \quad (8)$$

Aus (5) und (6) ergeben sich nun die folgenden Beziehungen:

$$\psi_0(\theta) = -\phi_0(\theta) \quad (9)$$

$$\psi_n(\theta) = \phi_0(\theta) \dots \phi_{n-1}(\theta) - \phi_0(\theta) \dots \phi_n(\theta). \quad (10)$$

Auflösung von (9) und (10) ergibt:

$$\phi_0(\theta) = -\psi_0(\theta) \quad (11)$$

$$\phi_n(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^n \psi_i(\theta)}{\sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(\theta)}. \quad (12)$$

Wir erkennen somit, dass ein eindeutiger Zusammenhang besteht zwischen der Verteilung der Wartezeiten  $\{Q_j(s)\}$  und der Verteilung der Schadenfälle  $\{p_n(t)\}$ . Im folgenden betrachten wir die Verteilung der Wartezeiten als gegeben und berechnen die entsprechende Verteilung der Schadenfälle. Wir beschränken uns dabei auf den einfachsten Fall, wo die Verteilungsfunktionen der Wartezeiten  $T_1, T_2 \dots$  identisch gleich sind, aber möglicherweise verschieden von der Verteilungsfunktion der Wartezeit  $T_0$ , d. h. es sei

$$Q(s) = Q_0(s) \quad (13)$$

$$P(s) = Q_j(s) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

und ferner

$$\phi_0(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta s} Q'(s) ds \quad (15)$$

$$\phi(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta s} P'(s) ds. \quad (16)$$

Die Formel (10) lautet nun:

$$\psi_n(\theta) = \phi_0(\theta) (\phi(\theta)^{(n-1)} - \phi(\theta)^n). \quad (17)$$

Sei  $\mu = \mu(t)$  die mittlere Anzahl Schadenfälle im Intervall  $(0, t)$ , d. h.

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t). \quad (18)$$

Die Verteilung  $\{p_n(t)\}$  wird oft auch als Funktion des Parameters  $\mu$  angegeben. Es ist deshalb zweckmässig zu fordern, dass die mittlere Anzahl Schadenfälle proportional zur Zeit ist:

$$\mu(t) = ct. \quad (19)$$

Wir zeigen nun, dass die Bedingung (19) bei vorgegebener Verteilung  $P(s)$  durch passende Wahl der Verteilung  $Q(s)$  erfüllt werden kann. Sei  $\lambda(\theta)$  die Laplace-transformierte von  $\mu'(t)$ ; aus (17), (18) und (19) folgt:

$$\lambda(\theta) = L(\mu'(s)) = \frac{c}{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n L(p'_n(s)) = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\phi(\theta))^n, \quad (20)$$

d. h.

$$\frac{c}{\theta} = \frac{\phi_0}{1-\phi} \quad (21)$$

und somit

$$\phi_0 = \frac{c}{\theta} (1 - \phi(\theta)). \quad (22)$$

Rücktransformation von (22) ergibt:

$$Q'(s) = c \left( 1 - \int_0^s P'(u) du \right) = c(1 - P(s)), \quad (23)$$

wobei die Konstante  $c$  durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$1 = \int_0^{\infty} Q'(s) ds = c \int_0^{\infty} (1 - P(s)) ds. \quad (24)$$

### III. Spezielle Modelle

#### A. Eine Verallgemeinerung der Poissonverteilung

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man mit Hilfe der in Abschnitt II entwickelten Theorie die Verteilung  $\{p_n(t)\}$  in einigen Spezialfällen praktisch berechnen kann. Zuerst nehmen wir an, dass  $P(s)$  eine Gamma-Verteilung ist:

$$P'(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-s} s^{\alpha-1}. \quad (25)$$

Aus (23) und (24) folgt sofort

$$Q'(s) = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, t) \right), \quad (26)$$

wobei

$$\gamma(\alpha, t) = \int_0^t e^{-u} u^{\alpha-1} du \quad (27)$$

die unvollständige Gammafunktion ist. Ferner gilt

$$\phi(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^\alpha} \quad (28)$$

$$\phi_0(\theta) = \frac{1}{\alpha\theta} \left( 1 - \frac{1}{(1+\theta)^\alpha} \right) \quad (29)$$

und gemäss (17)

$$\psi_n(\theta) = \frac{1}{\alpha\theta} \left\{ \frac{1}{(1+\theta)^{(n-1)\alpha}} - \frac{2}{(1+\theta)^{n\alpha}} + \frac{1}{(1+\theta)^{(n+1)\alpha}} \right\} \quad (n \geq 1). \quad (30)$$

Durch Rücktransformation von (30) folgt ( $n \geq 2$ )

$$p'_n(t) = L^{-1}(\psi_n(\theta)) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-t'} \left( \frac{t'^{(n-1)\alpha-1}}{\Gamma((n-1)\alpha)} - \frac{2t'^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} + \frac{t'^{(n+1)\alpha-1}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \right) dt' \quad (31)$$

und zudem

$$p'_1(t) = L^{-1}(\psi_1(\theta)) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-t'} \left( \frac{t'^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} - 2 \frac{t'^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) dt'. \quad (32)$$

Differentiation der Gleichungen (31) und (32) führt auf ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der Funktionen  $p_n(t)$ :

$$p''_0(t) = -Q''(t) = \frac{1}{\alpha} P'(s) = \frac{1}{\alpha} e^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (33a)$$

$$p''_1(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-t} \left( \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} - 2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad (33b)$$

$$p''_n(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-t} \left( \frac{t^{(n-1)\alpha-1}}{\Gamma((n-1)\alpha)} - 2 \frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} + \frac{t^{(n+1)\alpha-1}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \right) \quad (n \geq 2). \quad (33c)$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$p'_0(0) = -\frac{1}{\alpha}; \quad p_0(0) = 1. \quad (34a)$$

$$p'_1(0) = \frac{1}{\alpha}; \quad p_1(0) = 0. \quad (34b)$$

$$p'_n(0) = 0; \quad p_n(0) = 0. \quad (n \geq 2) \quad (34c)$$

Für  $\alpha = 1$  lassen sich die Gleichungen (33), (34) analytisch lösen mit dem Resultat

$$p_n(t) = e^{-t} \frac{t^n}{n!}, \quad (35)$$

d.h. es resultiert die wohlbekannte Poisson-Verteilung. Somit dürfen wir die durch die Gleichungen (33), (34) für  $\alpha \neq 1$  definierte Verteilung  $\{p_n(t)\}$  als eine Verallgemeinerung der Poisson-Verteilung auffassen.

### B. Ein spezielles Kumulmodell

Wenn wir das Phänomen der Mehrfachschäden erfassen wollen, dann müssen wir dafür sorgen, dass auch «ausgeartete» Wartezeiten  $T_j = 0$  mit endlicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Diese Bedingung wird durch den folgenden Ansatz erfüllt:

$$P'(s) = p P_1'(s) + (1-p) \delta(s) \quad (0 < p \leq 1) \quad (36a)$$

$$P_1'(s) = a e^{-as}. \quad (36b)$$

Die Verwendung der Delta-Funktion in (36a) ist zwar mathematisch nicht ganz streng, hier aber sehr vorteilhaft, weil sich in dieser Weise die Laplace-Transformationen sehr einfach durchführen lassen. Aus (23), (24) folgt

$$Q'(s) = a e^{-as} \quad (37)$$

und durch Laplace-Transformation ergibt sich aus (36) und (37)

$$\phi_0(\theta) = L(Q'(s)) = \frac{a}{a+\theta} \quad (38)$$

$$\phi(\theta) = L(P'(s)) = p \phi_0(\theta) + (1-p) \quad (39)$$

und somit

$$\begin{aligned} \psi_n(\theta) = \phi_0(\theta) (\phi(\theta)^{(n-1)} - \phi(\theta)^n) &= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r \left(\frac{a}{a+\theta}\right)^{r+1} (1-p)^{(n-1-r)} \\ &\quad - \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} p^s \left(\frac{a}{a+\theta}\right)^{s+1} (1-p)^{(n-s)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Durch Inversion der Laplace-Transformation erhalten wir

$$p'_n(t) = e^{-at} \left( \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r (1-p)^{n-1-r} \frac{a^{r+1} t^r}{r!} - \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \frac{a^{s+1} t^s}{s!} \right). \quad (41)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\int s^m e^{-as} ds = -e^{-ax} \sum_{v=0}^m \frac{m! x^{m-v}}{(m-v)! a^{v+1}} \quad (42)$$

ergibt sich nach einigen Umformungen

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^n e^{-at} \frac{(at)^j}{j!} Q_j^{(n)} \quad (43a)$$

$$Q_j^{(n)} = \sum_{s=j}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} - \sum_{r=j}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r (1-p)^{n-1-r} \quad (43b)$$

$$Q_j^{(n)} = p^j (1-p)^{n-j} \binom{n-1}{j-1}. \quad (43c)$$

(Beachte: Formel (43c) folgt durch vollständige Induktion aus (43b)). Das Schlussresultat lautet somit:

$$p_0(t) = e^{-at} \quad (44a)$$

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^n e^{-at} \frac{(at)^j}{j!} p^j (1-p)^{n-j} \binom{n-1}{j-1} \quad (44b)$$

Im folgenden verifizieren wir noch, dass (44) ein spezielles Kumulmodell repräsentiert. Das Kumulmodell beruht bekanntlich auf der Annahme, dass jedes Schadenereignis einen oder auch mehrere Schadenfälle auslöst. Üblicherweise wird angenommen, dass die Schadenereignisse Poisson-verteilt sind, und die Zahl der Schadenfälle, welche durch ein bestimmtes Schadenereignis ausgelöst werden, ist eine Zufallsvariable  $\kappa$  mit der (diskreten) Verteilungsfunktion  $\{k_j\}$ . Es gilt somit

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^n e^{-at} \frac{(at)^j}{j!} k_n^{*j}. \quad (45)$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, wo die Verteilung  $\{k_j\}$  eine geometrische Verteilung ist:

$$k_j = p(1-p)^{j-1}. \quad (46)$$

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich leicht

$$k_n^{*j} = p^j (1-p)^{n-j} \binom{n-1}{j-1} \quad (47)$$



und weiter

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^n e^{-at} \frac{(at)^j}{j!} p^j (1-p)^{n-j} \binom{n-1}{j-1} \quad (48)$$

in exakter Übereinstimmung mit (44b).

### *C. Berechnung der Verteilung der Schadenzahlen falls die Wartezeiten Gauss-verteilt sind*

Wir nehmen an, dass die Verteilung  $P(s)$  eine (einseitige) Gauss-Verteilung ist.

$$P'(s) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2} \quad (0 \leq s < \infty). \quad (49)$$

Aus (23), (24) folgt

$$Q'(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{s}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right); \quad (\operatorname{erf} = \text{error function}). \quad (50)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Verteilung (50) durch eine exponentielle Verteilung

$$Q'_1(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{\pi}s}{\sqrt{2}\sigma}} \quad (51)$$

mit einer Genauigkeit von etwa 10% approximiert werden kann. Die Berechnung der Verteilung  $\{p_n(t)\}$  mit analytischen Methoden ist sehr schwierig. Andererseits können mit der Monte-Carlo-Methode sehr leicht Schätzwerte  $\hat{p}_n(t)$  berechnet werden. Benützen wir die Approximation (51), so können wir die Wartezeit  $T_0$  als eine exponentiell verteilte Zufallszahl auffassen, und ebenso die Wartezeiten  $T_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) als Gauss-verteilte Zufallszahlen, welche mit Hilfe eines Computers erzeugt werden. In dieser Weise ist es möglich, Realisierungen  $\xi(\omega_i, t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) des stochastischen Prozesses  $\xi(t)$  (siehe Abschnitt I) zu bestimmen. Sei  $a(n, t)$  die Zahl der Realisierungen des Prozesses  $\xi(t)$ , für welche  $n$  Schadenfälle im Zeitintervall  $(0, t)$  auftreten. Dann ist

$$\hat{p}_n(t) = \frac{a(n, t)}{N} \quad (52)$$

ein Schätzwert für  $p_n(t)$ , und dieser Schätzwert ist um so präziser, je grösser die Zahl  $N$  ist. In analoger Weise können übrigens auch Schätzwerte  $\hat{F}(x, t)$  für die Verteilung  $F(x, t)$  des Totalschadens berechnet werden, falls zusätzlich die Verteilung  $S(x)$  der Schadenssummen bekannt ist, doch soll dies hier nicht im Detail ausgeführt werden.

#### IV. Numerische Resultate

Thyrion (1961) hat die Verteilung der Schadenfälle in der Automobilversicherung empirisch untersucht (siehe Tabelle 1); im folgenden sollen die in Abschnitt III entwickelten Methoden auf dieses praktische Problem angewendet werden. Zu diesem Zweck wurden die Differentialgleichungen (33) für  $\alpha = 0.75$  (bzw.  $\alpha = 1$ ) numerisch (bzw. analytisch) gelöst. In Übereinstimmung mit (19) wurde der Parameter  $t$  in beiden Fällen so gewählt, dass der theoretische Mittelwert mit dem empirischen zusammenfällt. Es ist evident, dass die durch (33) definierten Verteilungen die empirischen Daten besser repräsentieren als die Poisson-Verteilung.

Eine weit bessere Beschreibung erhält man, wenn die Mehrfachschäden berücksichtigt werden, und zusätzlich angenommen wird, dass die Wartezeiten Gaussverteilt sind:

$$P'(s) = p P_1'(s) + (1-p)\delta(s) \quad (0 < p \leq 1) \quad (53a)$$

$$P_1'(s) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2}. \quad (53b)$$

Aus (23), (24) folgt

$$Q'(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right). \quad (54)$$

Ähnlich wie in Abschnitt III C können wir mit der Monte-Carlo-Methode Schätzwerte  $\hat{p}_n(t)$  für die gesuchte Verteilung  $p_n(t)$  berechnen. Der Parameter  $\sigma$  bewirkt nur eine Änderung der Zeitskala und kann deshalb beliebig, aber fest, gewählt werden, und danach ist der Parameter  $t$  durch die Forderung bestimmt,

dass der empirische Mittelwert gleich dem theoretischen Mittelwert ist. Schliesslich wird der Parameter  $p$  entsprechend der Methode der kleinsten Quadrate gewählt, d. h.  $p$  ist bestimmt durch die Forderung:

$$V(p) = \sum_{n=0}^7 (p_n^e - \hat{p}_n(t))^2 = \text{Minimum}, \quad (55)$$

wobei  $p_n^e$  die empirische Verteilung der Schadenfälle gemäss Tabelle 1 darstellt. Tabelle 2 enthält wiederum eine Gegenüberstellung der empirischen und theoretischen Werte.

### Verdankungen

Der Autor dankt Herrn Dr. J. Kupper für die Durchsicht des Manuskripts.

### Referenzen

*Thyrion, P.* (1961): Contribution à l'étude du bonus pour un sinistre en assurance automobile. ASTIN Bull. 1, 142–162.

U. Tellenbach  
Dipl. Phys. ETH  
Schönaustrasse 17  
5400 Baden

Tabelle 1

Anzahl Schäden	Anzahl Verträge (empirisch)	$\alpha = 1.0$ (Poisson)	$\alpha = 0.75$
0	7840	7635	7733
1	1317	1636	1455
2	239	175	238
3	42	12.6	30
4	14	0.7	3
5	4	0	0.3
6	4	0	0
7	1	0	0

Tabelle 2

Anzahl Schäden	Anzahl Verträge (empirisch)	Anzahl Verträge (theoretisch)
0	7840	7831
1	1317	1311
2	239	255
3	42	54
4	14	9
5	4	1.3
6	4	0
7	1	0

## Zusammenfassung

Zunächst werden die allgemein bekannten Zusammenhänge zwischen den Verteilungen der Wartezeiten (= Zwischenschadenzeit = Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schäden) und der Schadenzahl hergeleitet. Dann erhält der Autor Differentialgleichungen für eine Verallgemeinerung der Poisson-Verteilung, indem er statt exponentiellverteilter gammaverteilte Wartezeiten annimmt. Auch ergibt sich ein bekanntes Kumulmodell unter der Annahme, dass die Wartezeit gemäss einer Mischung zwischen Gamma und degeneriert verteilt sei. Schliesslich verfolgt der Autor ein Stück weit den Fall einseitig normal verteilter Wartezeiten und diskutiert einige numerische Resultate.

## Résumé

Tout d'abord, l'auteur établit les relations généralement connues entre les répartitions des délais d'attente (= période entre les sinistres = laps de temps entre deux sinistres qui se suivent) et du nombre de sinistres. Ensuite, l'auteur obtient des équations différentielles généralisant la distribution de Poisson, pour laquelle il adopte un délai d'attente distribué selon gamma au lieu de la fonction exponentielle.

Il s'en suit un modèle de cumul connu dans l'hypothèse que le délai d'attente soit distribué selon un mélange de fonctions gamma et de fonctions dégénérées. Enfin, l'auteur analyse le cas de délai d'attente distribué selon la loi normale unilatérale et discute quelques résultats numériques.

## Riassunto

Dapprima si derivano i noti rapporti fra le distribuzioni dei tempi d'attesa (periodo fra due sinistri consecutivi) e del numero di sinistri. Indi l'autore ottiene equazioni differenziali per una generalizzazione della distribuzione poissoniana, supponendo tempi d'attesa distribuiti secondo la funzione gamma.

Risulta pure un noto modello di cumulo ipotizzando un tempo d'attesa distribuito secondo una mescolanza fra gamma e distribuzione degenerata. Infine l'autore si sofferma sull'esame del caso di tempi d'attesa distribuiti secondo una legge unilateralmente normale e ne discute alcuni risultati numerici.

## Summary

First, the author explains the well-known relation between the distribution of waiting times (= time interval between two successive claims) and the number of claims. Next, the author establishes a differential equation in order to generalize the Poisson distribution by adopting gamma-distributed waiting times instead of exponentially distributed ones.

At the same time, a known cumul model is obtained on the assumption that the waiting times are distributed according to a gamma/degenerate mixture. Finally, the author gives an introductory presentation of the case of unilaterally normal distributed waiting times and discusses some numerical results.