Théorie mathématique des assurances de personnes : modèle markovien

Autor(en): **Consael, R. / Sonnenschein, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **78 (1978)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555042

Théorie mathématique des assurances de personnes

Modèle markovien

Par R. Consael et J. Sonnenschein

Section 1. Propriétés fondamentales des processus markoviens à un nombre fini d'états

1. Probabilités et intensités de transition

Soit $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ l'ensemble des états possibles d'un assuré. Notons $S(t) \in \boldsymbol{N}$ la variable aléatoire représentant l'état de l'assuré à l'instant t compté depuis l'origine du contrat ($t = 0$) et soit

$$P(s,t) = \big(P_{ik}(s,t)\big),\ i \cdot k = 1, 2, \ldots, N$$

la matrice de probabilités de transition avec

$$P_{ik}(s,t) = P\big[S(t) = k \,|\, S(s) = i\big]$$

définie pour $\forall s \geq 0$ et $\forall t \geq s$.
$P(s,t)$ est une matrice stochastique:
$P_{ik}(s,t) \geq 0$ pour $\forall s$ et $t \geq 0$, soit en notation matricielle $P(s,t) \geq 0$

et
$$\sum_{k=1}^{N} P_{ik}(s,t) = 1 \tag{1.1}$$
$$\text{ou } P(s,t)\,e = e.$$

Suite à la définition on a

$$P(s,s) = I \quad \forall s \geq 0,$$

où I est la matrice unité $N \times N$.
La matrice $P(s,t)$ vérifie les équations de Chapman/Kolmogorov.

On a pour $s \leq t \leq u$:

$$P(s,u) = P(s,t) \cdot P(t,u) \tag{1.2}$$

ou
$$P_{ik}(s,u) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(s,t)\,P_{jk}(t,u).$$

Supposons que la fonction d'intervalle $P(s,t)-I$ soit continument dérivable dans le sens que

$$\lim_{t-s\to 0} \frac{P(s,t)-I}{t-s} = M(u) \tag{1.3}$$

existe lorsque l'intervalle $[s,t]$ se contracte au point u, c.-à-d. lorsque $t \geq u$ et $s \leq u$ convergent vers u avec toujours $t-s > 0$ et que $M(u)$ est une fonction continue.
Notons $\mu_{ik}(u)$ les éléments de la matrice $M(u)$.
Il vient pour $i = k$,

$$\mu_{ii}(u) = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{P_{ii}(u, u+\Delta u)-1}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{P_{ii}(u-\Delta u, u)-1}{\Delta u} \leq 0 \tag{1.4}$$

et l'on note $\mu_i(t) = -\mu_{ii}(t)$ d'où $\mu_i(t) \geq 0$.
La matrice diagonale aux éléments $\mu_{ii}(u)$ est notée $D(u)$. Pour $i \neq k$ on obtient:

$$\mu_{ik}(u) = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{P_{ik}(u, u+\Delta u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{P_{ik}(u-\Delta u, u)}{\Delta u} \geq 0. \tag{1.5}$$

Nous notons $N(u) = M(u)-D(u)$ la matrice qui contient les éléments $\mu_{ik}(u)$ non diagonaux et dont la diagonale principale est nulle.
Nous pouvons interpréter $\mu_{ik}(t)\,\Delta t$ comme étant la valeur asymptotique ($\Delta t \to 0$) de la probabilité de transition de l'état i vers l'état k dans l'intervalle Δt et $\mu_i(t)\,\Delta t$ comme étant la valeur asymptotique ($\Delta t \to 0$) de la probabilité de quitter létat i dans l'intervalle de temps Δt.

En vertu de (1.1) on a la relation

$$1-P_{ii}(t, t+\Delta t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(t, t+\Delta t)$$

d'où

$$\mu_i(t) = \sum_{k\neq i} \mu_{ik}(t). \tag{1.6}$$

La relation (1.6) peut encore s'écrire:

$$M(t)e = N(t)e + D(t)e = 0. \tag{1.6'}$$

La fonction $\mu_{ik}(t)$ est appelée *intensité de transition* ou *taux instantané de transition* de l'état i vers l'état k, la fonction $\mu_i(t)$ est appelée *intensité de sortie* de l'état i en t.

2. Equations différentielles de Kolmogorov

Nous supposons que la matrice $M(u)$ est donnée et nous en déduisons la matrice $P(s, t)$.
Tenant compte des relations (1.2) de Chapman/Kolmogorov et de la dérivabilité de $P(s, t) - I$ on obtient:

$$\frac{P(s, t+\Delta t)-P(s, t)}{\Delta t} = \frac{P(s, t)\bigl(P(t, t+\Delta t)-I\bigr)}{\Delta t}$$

ou pour $\Delta t \to 0$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P(s, t)\, M(t). \tag{1.7}$$

D'une manière analogue on trouve:

$$\frac{P(s-\Delta s, t)-P(s, t)}{\Delta s} = \frac{\bigl(P(s-\Delta s, s)-I\bigr)\, P(s, t)}{\Delta s}$$

ou pour $\Delta s \to 0$

$$-\frac{\partial P}{\partial s} = M(s)\, P(s, t). \tag{1.8}$$

(1.7) et (1.8) sont les équations de Kolmogorov prospectives et rétrospectives, respectivement.

3. Relations de récurrence et solution des équations de Kolmogorov

Introduisons les matrices $P^{(n)}(s, t) = \bigl(P_{ik}^{(n)}(s, t)\bigr)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ où $P_{ik}^{(n)}(s, t)$ est la probabilité que l'assuré qui à l'instant $s \geq 0$ se trouve dans i, soit à l'instant $t > s$ dans l'état k après avoir effectué n transitions.
Il résulte de cette définition que $P^{(0)}(s, t)$ est une matrice diagonale vérifiant pour $s \leq t \leq u$ la relation

$$P^{(0)}(s, u) = P^{(0)}(s, t)\, P^{(0)}(t, u) \tag{1.9}$$

avec

$$P^{(0)}(s, s) = I \tag{1.10}$$

et

$$P^{(n)}(s, s) = 0 \text{ pour } n > 0$$

D'autre part on a nécessairement

$$P(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(s,t) \tag{1.11}$$

uniformément en s et t.
La matrice $P^{(0)}$ peut être calculée aisément, en effet:

on a $$P_{ii}^{(0)}(s,t+\Delta t) = P_{ii}^{(0)}(s,t)\cdot P_{ii}^{(0)}(t,t+\Delta t)$$

et par suite $$P_{ii}^{(0)}(s,t+\Delta t) = P_{ii}^{(0)}(s,t)\big(1-\mu_i(t)\Delta t\big)+0(\Delta t).$$

On constate aisément que les $P_{ii}^{(0)}(s,t)$, $i \in \mathbf{N}$ sont continues et dérivables en vertu de la continuité des $\mu_i(t)$ et que

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ii}^{(0)}(s,t) = -\mu_i(t)\, P_{ii}^{(0)}(s,t)$$

ou $$\frac{\partial}{\partial t} P^{(0)}(s,t)\; P^{(0)}(s,t)\, D(t). \tag{1.12}$$

Tenant compte de (1.7), on obtient:

$$P_{ii}^{(0)}(s,t) = \exp\left(-\int_s^t \mu_i(\tau)d\tau\right) \text{ ou}$$

$$P^{(0)}(s,t) = \exp\left(\int_s^t D(\tau)d\tau\right). \tag{1.13}$$

Semblablement on a:

$$-\frac{\partial}{\partial s} P^{(0)}(s,t) = D(s)\, P^{(0)}(s,t).$$

Pour trouver la valeur de $P^{(n)}(s,t)$ pour $n > 0$ on utilise la récurrence suivante.

Soit $m \geq 0$ et $n \geq 0$. Si l'assuré est dans l'état i en $s \geq 0$ et dans l'état k en $t > s$ ayant passé par $m+n+1$ transitions dans l'intervalle $[s,t]$, alors on peut scinder l'intervalle $[s,t]$ en 3 intervalles partiels:

$$[s,t] = [s,\tau] \cup\,]\tau, \tau+\Delta\tau[\, \cup [\tau+\Delta\tau, t]$$

avec $s < \tau < t$ tels qu'il y ait m transitions en $[s,\tau]$, 1 transition en $]\tau,\tau+\Delta\tau[$ et n transitions dans $[\tau+\Delta\tau, t]$. La probabilité d'avoir m transitions en $[s,\tau]$ est $P_{ij}^{(m)}(s,\tau)$, la probabilité d'avoir 1 transition en $]\tau,\tau+\Delta\tau[$ est $\mu_{jl}(\tau)\Delta\tau+0(\Delta\tau)$

et la probabilité d'avoir n transitions en $[\tau+\Delta\tau, t]$ est $P_{lk}^{(n)}(\tau+\Delta\tau, t)$. Comme j et l sont arbitraires avec $j \neq l$ et que τ est arbitraire on aura pour $\Delta\tau \to 0$:

$$P_{ik}^{(m+n+1)}(s, t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l \neq j} \int_{s}^{t} P_{ij}^{(m)}(s, \tau)\, \mu_{jl}(\tau)\, P_{lk}^{(n)}(\tau, t)\, d\tau. \tag{1.14}$$

Nous avons négligé le terme $0(\Delta\tau)$ du fait que l'intégrand est borné pour $\tau \in [s, t]$. Sous forme matricielle on obtient

$$P^{(m+n+1)}(s, t) = \int_{s}^{t} P^{(m)}(s, \tau)\, N(\tau)\, P^{(n)}(\tau, t)\, d\tau. \tag{1.15}$$

Pour s et t donnés on peut écrire (1.15) sous forme d'un produit (∞) de convolution généralisée défini par (1.14):

$$P^{(m+n+1)} = P^{(m)} \infty P^{(n)}. \tag{1.16}$$

Suite à sa définition, ce produit de convolution est commutatif et associatif pour les $P^{(i)}: i = 0, 1, \ldots$; on a en particulier $P^{(1)} = P^{(0)} \infty P^{(0)}$ et

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} \infty P^{(0)} = \ldots = P^{(0)\infty n+1} \tag{1.17}$$

où $P^{(0)\infty n}$ représente la n-ième puissance de convolution généralisée.

La formule (1.15) nous permet de calculer de proche en proche les $P^{(0)}$, $P^{(1)} \ldots P^{(n)}, \ldots$ et par suite

$$P(s, t = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(s, t),$$

la solution unique des équations de Kolmogorov.

On a encore en tenant compte de (1.17):

$$P = P^{(0)} + P \infty P^{(0)} \tag{1.18}$$

et

$$P = P^{(0)} + P^{(0)} \infty P. \tag{1.19}$$

4. Capitaux différés unitaires

Notons $E(s, t) = \big(E_{vl}(s, t)\big)$ la matrice des capitaux différés unitaires. $E_{vl}(s, t)$ est la valeur actuelle d'un capital unitaire payable à l'instant t si l'assuré se trouve dans l'état l sachant qu'il est dans l'état v en s.

On a $E_{vl}(s, t) = P_{vl}(s, t)\, w(s, t)$ où $w(s, t)$ est le facteur d'actualisation

$$w(s, t) = \exp\left(-\int_s^t \delta(\theta)\, d\theta\right).$$

En écriture matricielle:

$$E(s, t) = P(s, t)\, w(s, t). \tag{1.20}$$

$E(s, t)$ est une matrice sous-stochastique:

$$\begin{gathered} E_{ik}(s, t) \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{N} E_{ik}(s, t) = w(s, t) \text{ ou } E(s, t)\, e = w(s, t)\, e, \\ E(s, s) = I \quad \forall s \geq 0. \end{gathered} \tag{1.21}$$

En vertu des équations de Chapman/Kolmogorov et en tenant compte de la relation $w(s, u) = w(s, t)\, w(t, u)$ on trouve pour $s \leq t \leq u$ la relation:

$$E(s, u) = E(s, t)\, E(t, u) \tag{1.22}$$

ou
$$E_{ik}(s, u) = \sum_{j=1}^{N} E_{ij}(s, t)\, E_{jk}(t, u) \qquad \forall i, k \in \mathbf{N}.$$

On peut vérifier aisément que $E(s, t)$ satisfait aussi des équations différentielles du type de Kolmogorov:

$$\frac{\partial E(s, t)}{\partial t} = E(s, t)\, M_E(t) \tag{1.23}$$

et
$$\frac{\partial E(s, t)}{\partial s} = M_E(s)\, E(s, t) \tag{1.24}$$

où $M_E(t)$ est la matrice $M(t)$ dont on diminue chaque élément de la diagonale principale de $\delta(t)$.

Introduisons les matrices $E^{(n)}(s, t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ que nous définissons par

$$E^{(n)}(s, t) = P^{(n)}(s, t)\, w(s, t). \tag{1.25}$$

$E_{vl}^{(n)}(s, t)$ est la v.a. pour un assuré qui à l'instant s se trouve dans l'état v, d'un capital unitaire payable à l'instant t si l'assuré se trouve dans l'état l après avoir effectué exactement n transitions.

On a en particulier

$$E^{(0)}(s,t) = \exp\left(\int_s^t \left(D(\tau) - \delta(\tau)I\right) d\tau\right)$$

avec $$E^{(0)}(s,s) = I \tag{1.26}$$

et $$E^{(n)}(s,s) = 0 \quad \text{pour} \quad n > 0. \tag{1.27}$$

En outre $$E^{(0)}(s,u) = E^{(0)}(s,t) \cdot E^{(0)}(t,u) \tag{1.28}$$

pour $$0 \leq s \leq t < u.$$

En partant de la relation (1.15) on trouve

$$\begin{aligned} E^{(m+n+1)}(s,t) &= \int_s^t P^{(m)}(s,\tau)\, N(\tau)\, P^{(n)}(\tau,t)\, w(s,t)\, d\tau \\ &= \int_s^t E^{(m)}(s,\tau)\, N(\tau)\, E^{(n)}(\tau,t)\, d\tau \end{aligned} \tag{1.29}$$

ou en écriture abrégée:

$$E^{(m+n+1)} = E^{(m)} \infty E^{(n)};$$

en particulier $E^{(n)} = E^{(n-1)} \infty E^{(0)} = \ldots = E^{(0)\infty n+1}$. (1.30)

D'autre part on a aussi:

$$E(s,t) = \sum_{n+0}^{\infty} E^{(n)}(s,t) \tag{1.31}$$

ainsi que $$E = E^{(0)} + E^{(0)} \infty E \tag{1.32}$$

ou $$E = E^{(0)} + E \quad E^{(0)}. \tag{1.33}$$

Section 2. Les assurances de rentes et de capitaux.

1. *Définitions*

Soit A_r une assurance qui prévoit le payement de capitaux (différés) $C_i(t_v)$, $v = 1, 2 \ldots k$ aux instants $t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_k$ à condition que l'assuré se trouve dans l'état i à ces instants et d'une rente d'intensité $R_i(\tau)$ à tout instant τ où l'assuré se trouve dans l'état i; on suppose $R_i(\tau)$ continue.

Notons

$$\alpha_{ii}^{r}(\tau) = \sum_{v=1}^{k} C_i(t_v)\, H(\tau - t_v) + \int_0^{\tau} R_i(v)\, dv$$

où $H(\tau)$ est la fonction de Heavyside définie par:

$$H(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \tau < 0 \\ 1 \text{ pour } \tau \geq 0 \end{cases}$$

et soit $\alpha^r(\tau)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $(\alpha_{11}^r(\tau), \alpha_{22}^r(\tau), \ldots, \alpha_{NN}^r(\tau))$.

L'assurance A_r est univoquement définie par la matrice $\alpha^r(\tau)$.

Soit A_c une assurance qui garantit le payement d'un capital $\alpha_{ij}(\tau)$ à l'instant τ si à cet instant l'assuré transite de l'état i vers l'état j ($i \neq j$). Soit $\alpha^N(\tau)$ la matrice $(\alpha_{ij}(\tau))$, $i, j = 1, 2 \ldots N$, $i \neq j$ dont les éléments diagonaux sont nuls. On appelle assurance générale une assurance qui réunit les garanties de A_r et de A_c. Une assurance générale est définie par la matrice $\alpha(\tau) = \alpha^r(\tau) + \alpha^N(\tau)$. Les obligations π de l'assuré sont définies par des primes $\pi_{ii}(\tau_v)$, $v = 1, 2 \ldots l$ payables aux instants $\tau_1 < \tau_2 \ldots < \tau_l$ si l'assuré se trouve dans l'état i à ces instants et par une prime d'intensité $\pi_i(\tau)$ payable à tout instant τ où l'assuré se trouve dans l'état i.

Soit $\alpha_{ii}^{\pi}(\tau) = \sum_{v=1}^{l} \cdot\ \pi_{ii}(\tau_v)\, H(\tau - \tau_v) + \int_0^{\tau} \pi_i(v)\, dv$ et $\alpha^{\pi}(\tau)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $(\alpha_{11}^{\pi}(\tau), \alpha_{22}^{\pi}(\tau), \ldots, \alpha_{NN}^{\pi}(\tau))$.

Les garanties et les obligations d'une assurance générale sont ainsi définies par les matrices $\alpha(\tau)$ et $\alpha^{\pi}(\tau)$.
On suppose que l'assurance s'étend sur un intervalle de temps $[0, u]$.

2. Valeurs actuelles des rentes, des capitaux différés et des primes

Soit $0 \leq s < t < u$ et soit $a_{vi}^{r}(s:t, u)$ la valeur actuelle à l'instant s, où l'assuré est supposé se trouver dans l'état v, de l'assurance A_r définie par la matrice $\alpha^r(\tau)$ restreinte à l'intervalle $[t, u]$.

Il vient:

$$a^r_{vi}(s:t,u) = \int_t^u E_{vi}(s,\tau)\,d\alpha^r_{ii}(\tau) \quad \text{ou sous forme matricielle}$$

$$a^r(s:t,u) = \int_t^u E(s,\tau)\,d\alpha^r(\tau), \tag{2.1}$$

et en tenant compte des équations de Chapman/Kolmogorov:

$$a^r(s:t,u) = E(s,t)\,a^r(t,u),$$

où par définition

$$a^r(t,u) = a^r(t:t,u).$$

On a évidemment

$$a^r(s,u) = a^r(s,t) + a^r(s:t,u).$$

On trouve d'une manière analogue la valeur actuelle des primes:

$$a^\pi_{vi}(s:t,u) = \int_t^u E_{vi}(s,\tau)\,d\alpha^\pi_{ii}(\tau)$$

et
$$a^\pi(s:t,u) = \int_t^u E(s,\tau)\,d\alpha^\pi(\tau) \quad \text{respectivement.}$$

Si l'on note encore $a(s:t,u)$ la différence:

$$a(s:t,u) = a^r(s:t,u) - a^\pi(s:t,u), \quad \text{alors}$$

on a

$$a(s:t,u) = \int_t^u E(s,\tau)\,d\alpha^D(\tau)$$

avec
$$\alpha D(\tau) = \alpha^r(\tau) - \alpha^\pi(\tau); \quad \text{en particulier:}$$

$$a(s,u) = \int_s^u E(s,\tau)\,d\alpha^D(\tau).$$

3. Equation différentielle de $a(s,u)$

La fonction $a(s,u)$ est discontinue en s pour $s = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ et pour $s = \tau_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Pour d'autres valeurs de s la fonction $a(s, u)$ est dérivable. En dérivant la relation

$$a(s, u) = \int_s^u E(s, \tau)\, d\alpha^D(\tau)$$

par rapport à s aux points de dérivabilité on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a(s, u)}{\partial s} &= -M_E(s)\, a(s, u) - E(s, s)\, \alpha^{D'}(s) \\ &= -M_E(s)\, a(s, u) - \alpha^{D'}(s) \qquad (2.2)\end{aligned}$$

puisque $E(s, s) = I$,

et en tenant compte des discontinuités:

$$d_s a(s, u) = -M_E(s)\, a(s, u)\, ds - d\,\alpha^D(s). \qquad (2.2')$$

4. *Rentes payables après* n *transitions*

Soit $a_{\nu j}^{(n)}(s, u)$ la valeur actuelle en $s < u$ d'une rente et prime définie par $\alpha^D(t)$ à tout instant t de l'intervalle (s, u) où l'assuré se trouve dans l'état j après avoir effectué exactement n transitions et soit $a^{(n)}(s, u)$ la matrice $\left(a_{\nu j}^{(n)}(s, u)\right)$.

$$\text{On a } a^{(n)}(s, u) = \int_s^u E^{(n)}(s, t)\, d\alpha^D(t) \qquad (2.3)$$

et en vertu de (1.30)

$$\begin{aligned}a^{(n)}(s, u) &= \int_s^u E^{(0)}(s, \tau)\, N(\tau)\, a^{(n-1)}(\tau, u)\, d\tau \\ &= \int_s^u E^{(n-1)}(s, \tau)\, N(\tau)\, a^{(0)}(\tau, u)\, d\tau \quad \text{pour} \quad n \geq 1. \qquad (2.3')\end{aligned}$$

En écriture abrégée:

$$a^{(n)}(s, u) = E_{(s,\tau)}^{(0)} \infty\, a_{(\tau,u)}^{(n-1)} = E_{(s,\tau)}^{(n-1)} \infty\, a_{(\tau,u)}^{(0)} \qquad (2{,}4)$$

et en particulier

$a_{(s,u)}^{(1)} = E_{(s,\tau)}^{(0)} \infty\, a_{(\tau,u)}^{(0)}$.

La relation

$$a(s, u) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(n)}(s, u) \tag{2.5}$$

est immédiate ainsi que

$$a(s, u) = a^{(0)} + E^{(0)} \infty\, a = a^{(0)} + E \infty\, a^{(0)}.$$

5. Assurances de capitaux payables en cas de transition d'un état vers un autre

Soit une assurance de capital $\alpha_{jk}(\tau)$, $j \cdot k \in \mathbf{N}$ $(j \neq k)$ payable à tout instant τ de l'intervalle (t, u) où l'assuré transite de l'état j vers l'état k. La fonction $\alpha_{jk}(\tau)$ est supposée intégrable. Comme plus haut nous notons $\alpha^N(\tau)$ la matrice $(\alpha_{jk}(\tau))$ dont la diagonale principale est nulle.
La valeur actuelle de cette assurance à l'instant $s \leq t$ où l'assuré se trouve dans l'état v, s'écrit:

$$A_{vjk}(s\!:\!t, u) = \int_t^u E_{vj}(s, \tau)\, \mu_{jk}(\tau)\, \alpha_{jk}(\tau)\, d\tau. \tag{2.6}$$

Définissons encore $\tilde{\alpha}_{jk}(t)$ pour $j \neq k$ par:

$$\tilde{\alpha}_{jk}(t) = \int_0^t \mu_{jk}(\tau)\, \alpha_{jk}(\tau)\, d\tau$$

et $\tilde{\alpha}_{jk} = 0$ pour $j = k$;

il vient:

$$A_{vjk}(s\!:\!t, u) = \int_t^u E_{vj}(s, \tau)\, d\tilde{\alpha}_{jk}(\tau) \tag{2.7}$$

et en posant

$$A_{vjk}(s, t) = A_{vjk}(s\!:\!s, t) \quad \text{on obtient}$$

$$A_{vjk}(s, t) = \int_s^t E_{vj}(s, \tau)\, d\tilde{\alpha}_{jk}(\tau).$$

Introduison $A_{v+k}(s, t)$ en posant

$$A_{v+k}(s, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} A_{vjk}(s, t)$$

et $A._+.(s,t)$ la matrice $(A_{v+k}(s,t))$ $v, k \in \boldsymbol{N}$; on trouve

$$A._+.(s,t) = \int_s^t E(s,\tau)\, d\tilde{\alpha}(\tau) \tag{2.8}$$

où $\tilde{\alpha}(\tau)$ est la matrice des $(\alpha_{jk}(\tau))j, k \in \boldsymbol{N}$.

On a aussi comme pour les rentes:

$$A._+.(s:t,u) = E(s,t)\, A._+.(t,u) \text{ et}$$

$$A._+.(s,u) = A._+.(s,t) + A._+.(s:t,u).$$

6. *Equations différentielles des assurances de capitaux de transition*

En derivant la relation

$$A.+.(s,u) = \int_s^u E(s,\tau)\, d\tilde{\alpha}(\tau) \quad \text{par rapport à } s \text{ on obtient}$$

$$\frac{\partial A.+.(s,u)}{\partial s} = -M_E(s)\, A.+.(s,u) - E(s,s)\, \tilde{\alpha}'(s)$$

$$= -M_E(s)\, A.+.(s,u) - \tilde{\alpha}'(s). \tag{2.9}$$

7. *Capitaux payables à la* n + *1-ième transition*

Soit $A_{vjk}^{(n+1)}(s,u)$ la valeur actuelle en $s < u$ d'une assurance de capital $\alpha_{jk}(t)$ payable lors du passage de l'état j vers l'état k à condition que ce soit la $n+1$-ième transition dans l'intervalle $[s,u]$, l'assuré se trouvant dans l'état v en s. On a

$$A_{vjk}^{(n+1)}(s,u) = \int_s^u E_{vj}^{(n)}(s,\tau)\, \mu_{jk}(\tau)\, \alpha_{jk}(\tau)\, d\tau$$

et $$A_{v+k}^{(n+1)}(s,u) = \sum_{j \neq k} \int_s^u E_{vj}^{(n)}(s,\tau)\, \mu_{jk}(\tau)\, \alpha_{jk}(\tau)\, d\tau \quad \text{d'où}$$

$$A_{.+.}^{(n+1)}(s,u) = \int_s^u E^{(n)}(s,\tau)\, d\tilde{\alpha}(\tau). \tag{2.10}$$

On a évidemment:

$$A_{\cdot+\cdot}(s,u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\cdot+\cdot}^{(n+1)}(s,u) \tag{2.11}$$

et

$$A_{\cdot+\cdot} = A_{\cdot+\cdot}^{(1)} + E^{(0)} \infty A_{\cdot+\cdot} = A_{\cdot+\cdot}^{(1)} + E \infty A^{(1)} \tag{2.12}$$

8. *Equation d'équivalence*

Considérons un contrat d'assurance généralisé qui garantit dans un intervalle de temps $[o, u]$ à un assuré se trouvant à l'état v à l'origine le payement de rentes et de capitaux définis par A_r et A_c c.-à-d. définis par la matrice $\alpha(t)$.
En contre-partie de ces avantages l'assuré est appelé à payer des primes définies par la matrice $\alpha^{\pi}(t)$.
La relation d'équivalence s'écrit alors:

$$a^{\pi}(o,u)\,e = a^{r}(o,u)e + A_{\cdot+\cdot}(o,u)e,$$

où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

ou $a^{\pi}_{\cdot+}(o,u) = a^{r}_{\cdot+}(o,u) + A_{\cdot++}(o,u)$. $\quad$ (2.13)

Supposons que les $\alpha_{jk}(\tau)$ sont des fonctions de τ mais ne dépendent pas de j ni de k:

$$\alpha_{jk}(\tau) = \gamma(\tau).$$

Il vient

$$A_{vjk}(s,t) = \int_s^t P_{vj}(s,\tau)\,w(s,\tau)\,\mu_{jk}(\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau \quad \text{et}$$

$$A_{vj+}(s,t) = \int_s^t P_{vj}(s,\tau)\,w(s,\tau) \sum_{k\neq j} \mu_{jk}(\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_s^t P_{vj}(s,\tau)\,w(s,\tau)\,\mu_{j}(\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau$$

d'où

$$-A_{\cdot\cdot+}(s,t) = \int_s^t P(s,\tau)\,D(\tau)\,w(s,\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau.$$

Or

$$\frac{\partial P(s,\tau)}{\partial \tau} = P(s,\tau)\,M(\tau) = P(s,\tau)\,D(\tau)+P(s,\tau)\,N(\tau).$$

Il s'ensuit que

$$P(s,\tau)\,D(\tau) = \frac{\partial P(s,\tau)}{\partial \tau} - P(s,\tau)\,N(\tau) \quad \text{et}$$

$$-A_{\cdot\cdot+}(s,t) = \int_s^t \frac{\partial P(s,\tau)}{\partial \tau} w(s,\tau)\gamma(\tau)\,d\tau - \int_s^t P(s,\tau)\,N(\tau)w(s,\tau)\gamma(\tau)\,d\tau.$$

On applique l'intégration par parties à la première intégrale à droite et l'on trouve

$$-A_{\cdot\cdot+}(s,t) = P(s,\tau)w(s,\tau)\gamma(\tau)\Big|_s^t - \int_s^t P(s,\tau)\big(w(s,\tau)\gamma'(\tau)-\delta(\tau)w(s,\tau)\gamma(\tau)\big)\,d\tau$$
$$-\int_s^t E(s,\tau)N(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau.$$

On en déduit:

$$-A_{\cdot\cdot+}(s,t) = E(s,t)\gamma(t)-\gamma(s)I - \int_s^t E(s,\tau)\big(\gamma'(\tau)-\delta(\tau)\gamma(\tau)\big)\,d\tau - A_{\cdot+\cdot}(s,t).$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$A_{\cdot+\cdot}(s,t)+\gamma(s)I = A_{\cdot\cdot+}(s,t)+E(s,t)\gamma(t)+\int_s^t E(s,\tau)\big(\delta(\tau)\gamma(\tau)-\gamma'(\tau)\big)\,d\tau. \tag{2.14}$$

En particulier:

$$A_{\cdot+k}(s,t)+\gamma(s)\delta_{\cdot k} = A_{\cdot k+}(s,t)+E_{\cdot k}(s,t)\gamma(t)+\int_s^t E_{\cdot k}(s,\tau)\big(\delta(\tau)\gamma(\tau)-\gamma'(\tau)\big)\,d\tau$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker.

$A_{\cdot+k}(s,t)+\gamma(s)\delta_{\cdot k}$ représente la valeur actuelle d'un capital $\gamma(s)$ payable en s si en ce moment l'assuré se trouve en k, soit d'un capital $\gamma(\tau)$ payable si au moment τ, $s<\tau<t$ l'assuré entre dans l'état k. $A_{\cdot k+}(s,t)+E.k(s,t)\,\gamma(t)$ représente la valeur actuelle d'un capital $\gamma(\tau)$ payable si au moment τ l'assuré quitte l'état k, soit d'un capital $\gamma(t)$ payable en t si l'assuré est dans l'état k. Enfin $\int_s^t E_{\cdot k}(s,\tau)\big(\delta(\tau)\gamma(\tau)-\gamma'(\tau)\big)\,d\tau$ représente la valeur actuelle d'une rente d'intensité $\delta(\tau)\gamma(\tau)-\gamma'(\tau)$ payable à tout moment τ de l'intervalle $[s,t]$ pourvu que

l'assuré se trouve dans l'état k. Si l'on suppose en outre que $\gamma(\tau) \equiv 1$ et $\delta(\tau) \equiv \delta$ pour $\forall\ \tau \in [s, t]$ il vient:

$$A_{\cdot+\cdot}(s,t)+I = A_{\cdot\cdot+}(s,t)+E(s,t)+\delta \int_s^t E(s,\tau)\,d\tau. \tag{2.15}$$

Section 3. Des réserves mathématiques

Soit une assurance générale définie par les matrices $\alpha(\tau)$ et $\alpha^{\pi}(\tau)$ et soit u la durée de cette assurance; on a $0 \leq \tau \leq u$.
Supposons qu'à l'instant initial $\tau = 0$ l'assuré se trouve dans l'état v. On calcule la réserve mathématique à l'instant s en tenant compte de l'état initial v et de l'état k en s. Notons $V_k(s)$ cette réserve mathématique et $V_{\cdot}(s)$ le vecteur aux composantes $V_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

1. Formes prospective et retrospective de la R.M.

a) La forme prospective:

$$V_k(s) = A_{k++}(s,u)+a^r_{k+}(s,u)-a^{\pi}{}_{k+}(s,u) \tag{3.1}$$

ou

$$V_{\cdot}(s) = A_{\cdot++}(s,u)+a^r{}_{\cdot+}(s,u)-a^{\pi}_{\cdot+}(s,u) \tag{3.1'}$$

b) La forme rétrospective:

Notons $\overline{V}_k(s)$ cette forme. Il vient:

$$a^{\pi}{}_{v+}(o,s) = A_{v++}(o,s)+a^r_{v+}(o,s)+\sum_k E_{vk}(o,s)\,\overline{V}_k(s). \tag{3.2}$$

Si l'on multiplie l'équation (3.1) par $E_{vk}(o,s)$ et que l'on somme sur k on a:

$$\sum_k E_{vk}(o,s)\,V_k(s) = \sum_k E_{vk}(o,k)\big(A_{k++}(s,u)+a^r_{k+}(s,u)-a^{\pi}{}_{k+}(s,u)\big);$$

en additionnant cette dernière relation à la relation (3.2) on trouve en tenant compte de

$$A_{v++}(o,u) = A_{v++}(o,s)+\sum_k E_{vk}(o,s)\,A_{k++}(s,u) \quad \text{et de}$$

$$a_{v+}(o,u) = a_{v+}(o,s)+\sum_k E_{vk}(o,s)\,a_{k+}(s,u)$$

que

$$\sum_k E_{vk}(o,s)\, V_k(s) = A_{v++}(o,u) + a^r_{v+}(o,u) - a^\pi_{v+}(o,u) + \sum_k E_{vk}(o,s)\, \overline{V}_k(s).$$

Or en vertu de la relation d'équivalence on a:

$$A_{v++}(o,u) + a^r_{v+}(o,u) - a^\pi_{v+}(o,u) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_k E_{vk}(o,s)\, V_k(s) = \sum_k E_{vk}(o,s)\, \overline{V}_k(s). \tag{3.3}$$

2. Equations différentielles de Thiele

La réserve mathématique $V_k(s)$ est une fonction dérivable excepté aux points $t_1, t_2, \ldots, t_k$ dates de payement des capitaux différés et aux points $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ dates de payement des primes.
En dérivant la relation (3.1) aux points de dérivabilité par rapport à s et en supposant u fixe il vient:

$$\frac{dV_k(s)}{ds} = \frac{dA_{k++}(s,u)}{ds} + \frac{da^r_{k+}(s,u)}{ds} - \frac{da^\pi_{k+}(s,u)}{ds}$$

$$= \frac{dA_{k++}(s,u)}{ds} + \frac{da_{k+}(s,u)}{ds}.$$

En vertu de (2.2) et de (2.9) on trouve l'équation différentielle de Thiele:

$$\frac{dV.(s)}{ds} = -M_E(s)A._{++}(s,u) - \tilde{\alpha}'._+(s) - M_E(s)a._+(s,u) - \alpha^{D'}_{.+}(s)$$

$$= -M_E(s)V.(s) - \left(\tilde{\alpha}'._+(s) + \alpha^{D'}_{.+}(s)\right). \tag{3.4}$$

On peut exprimer l'équation différentielle de Thiele en termes de différentielles et obtenir ainsi une expression qui est valable en tout point de l'intervalle $[o,u]$:

$$dV.(s) = -M_E(s)V.(s)ds - \left(d\tilde{\alpha}._+(s) + d\alpha^D_{.+}(s)\right) \tag{3.4'}$$

$$= -M_E(s)V.(s)ds - \left(d\tilde{\alpha}._+(s) + d\alpha^r._+(s)\right) + d\alpha^\pi_{.+}(s).$$

3. Primes naturelles, primes de risque et primes d'épargne

Les primes sont définies par la matrice diagonale $\alpha^{\pi}(t)$ qui vérifie l'équation d'équivalence:

$$\alpha^{\pi}_{\cdot +}(o,u) = a^{r}_{\cdot +}(o,u) + A_{\cdot ++}(o,u).$$

Les primes sont dites naturelles si quels que soient s et t

$$o \leq s < t \leq u$$

on a l'équivalence:

$$a^{\pi}_{\cdot +}(s,t) = a^{r}_{\cdot +}(s,t) + A_{\cdot ++}(s,t). \tag{3.5}$$

Pour $t = u$ cette relation entraine $V_{\cdot}(s) = o$ pour tout $s, o \leq s \leq u$.
Par la relation $V_{\cdot}(s) = o$ pour tout s les primes naturelles sont définies univoquement.

Notons $\pi^{(N)}(s)$ la prime naturelle et $\alpha^{\pi(N)}$ la matrice diagonale correspondante.
En vertu de (3.5) on a pour la prime naturelle:

$$d\alpha^{\pi(N)}(s) = d\alpha^{r}(s) + d\tilde{\alpha}(s).$$

Il s'ensuit que l'équation différentielle de Thiele (3.4') peut encore s'écrire:

$$dV_{\cdot}(s) = -M_E(s)\, V_{\cdot}(s) ds + d\alpha^{\pi}_{\cdot +} - d\alpha^{\pi(N)}_{\cdot +}.$$

Notons $\pi^{(R)}(s)$ la prime de risque de l'instant s et $\alpha^{\pi(R)}(s)$ la matrice diagonale correspondante.
Si l'assuré et dans l'état k en s il vient:

$$d\alpha^{\pi(R)}_{k+}(s) = d\alpha^{r}_{k+}(s) + d\tilde{\alpha}_{k+}(s) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(s)\big(V_l(s) - V_k(s)\big) \tag{3.6}$$

Etant donné la relation $\sum_{l=1}^{N} \mu_{kl} = 0$ on peut encore écrire:

$d\alpha^{\pi(R)}_{k+}(s) = d\alpha^{r}_{k+}(s) + d\tilde{\alpha}_{k+}(s) + \sum_{l=1}^{N} \mu_{kl}(s)\, V_l(s)$ ou sous forme matricielle:

$$d\alpha^{\pi}_{\cdot +}{}^{(R)}(s) = d\alpha^{r}_{\cdot +}(s) + d\tilde{\alpha}_{\cdot +}(s) + M(s)\, V_{\cdot}(s). \tag{3.7}$$

Enfin, notons $\pi^{(E)}(s)$ la prime d'épargne et $\alpha^{\pi(E)}(s)$ la matrice diagonale correspondante. La prime d'épargne est définie par la relation:

$$d\alpha^{\pi(E)}_{\cdot +}(s) = d\,V_{\cdot}(s) - \delta(s)\,V_{\cdot}(s)\,ds. \tag{3.8}$$

En additionnant (3.7) et (3.8) et en tenant compte de (3.4′) ainsi que de la relation $M_E(s) = M(s) - \delta(s)I$

on obtient:

$$d\alpha^{\pi}_{\cdot +}(s) = d\alpha^{\pi(R)}_{\cdot +}(s) + d\alpha^{\pi(E)}_{\cdot}(s). \tag{3.9}$$

Référence bibliographique

Hoem, J.H.: Markov Chains Models in life insurance, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band IX, Heft 2, Oktober 1969.

Prof. R. Consael und Sonnenschein
119, Nieuwelaan – B.10
B–1820 Strombeek-Bever

Zusammenfassung

Die Mathematik der Personenversicherung wird mit Hilfe von Markoff-Prozessen behandelt. Dabei wird ganz allgemein unter Personenversicherung eine Versicherung verstanden, bei der beim Übergang von einem Zustand zum andern entweder ein einmaliger Betrag oder aber eine Rente ausbezahlt wird (letztere so lange, als der Versicherte sich in einem gewissen Zustand befindet) gegen eine Prämie, die ihrerseits vom Zustand des Versicherten abhängt.

Résumé

Dans cette note on introduit la théorie des assurances de personnes en supposant qu'un assuré peut se trouver dans un nombre fini d'états et que les probabilités de passage d'un état à un autre peuvent être décrites par un processus markovien.
On nomme assurance de personnes l'opération qui consiste à garantir soit le payement d'un capital au moment du passage de l'assuré d'un état à un autre, soit le payement d'une rente aussi longtemps que l'assuré se trouve dans un certain état, contre versement d'une prime dont le montant depend de l'état dans lequel se trouve l'assuré.

Riassunto

La matematica dell'assicurazione di persone viene trattata con l'aiuto della teoria dei processi di Markov. Cioè un'assicurazione di persone è generalmente definita come assicurazione che al cambiamento da uno stato all'altro paga o un capitale o un'annualità per un premio che dipende esso stesso dallo stato dell'assicurazione.

Summary

The mathematics of the insurance of persons is treated by means of Markov processes. Thereby, insurance of persons is generally defined as an insurance which – at the transition from one state to another – pays either a fixed capital or a rent as long as the person remains in a certain state, subject to a premium which itself depends on the state of the person.