

# **Théorie des jeux et diversification des portefeuilles d'investissements**

Autor(en): **Chable, Daniel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **78 (1978)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555063>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

### Théorie des jeux et diversification des portefeuilles d'investissements

Par Daniel Chable, Vevey

Cet article résume les aspects théoriques et méthodologiques du travail écrit présenté par l'auteur lors de la session d'examens 1977 pour l'obtention du diplôme fédéral d'expert en assurances de pensions.

Il est admis de nos jours, notamment en Suisse, que les institutions de prévoyance autonomes doivent placer leur fortune de manière à garantir la sécurité des placements et la répartition des risques tout en assurant un rendement adéquat et en tenant compte des besoins futurs en liquidités. Les incertitudes inhérentes à l'environnement socio-économique font que ces critères de gestion sont en partie contradictoires, notamment la recherche d'une répartition optimale des risques de pertes parallèlement à la poursuite d'un objectif de rendement maximum. La recherche d'une solution à ce problème de diversification est d'autre part compliquée par les prescriptions légales des autorités de surveillance qui imposent des contraintes matérielles, souvent assez strictes, aux possibilités de placements.

Dans une situation aussi complexe la recherche d'un cadre de référence objectif en matière de politiques de placements devient un souci majeur pour les organes responsables de la gestion des institutions de prévoyance autonomes. Or, il existe précisément dans ce domaine d'activité un outil d'aide à la décision qui permet de définir de tels cadres de références face à un avenir incertain, il s'agit de la théorie des jeux de stratégie présentée pour la première fois de façon systématique en 1944 par *J. von Neumann* et *O. Morgenstern* dans leur ouvrage classique «*The Theory of Games and Economic Behaviour*» [7].

Une application de cette technique aux problèmes de la diversification d'un portefeuille d'investissements a par la suite été décrite par *Benjamin* [1] en 1959 et généralisée ultérieurement par *Wolff* [9]. Nous nous proposons à présent de développer un modèle similaire applicable en pratique dans les conditions spécifiques au contexte suisse.

### 1. Le modèle de base

Considérons un jeu fini à deux personnes de somme zéro (cf. *Dresher* [2], *Nolfi* [6]) qui se joue entre un joueur  $I$ , l'investisseur, et un joueur  $M$ , le marché, sur une période de référence donnée  $t$ , normalement de l'ordre d'une année. Ce jeu peut être représenté par une matrice  $G$  comme suit :

		$M$	
	$j$	1 ...	... $n$
$i$	\		
1		$g_{11}$ ...	
⋮		⋮	⋮
⋮		⋮	⋮
⋮		⋮	⋮
⋮		⋮	⋮
$m$		⋮	⋮
	$I$		

Le joueur  $I$  a en début de période une certaine fortune  $F$  à sa disposition; posons  $F = 1$ . Il a d'autre part la possibilité de choix entre un certain nombre de catégories de placements, soit les catégories  $i = 1, \dots, m$ . L'investisseur peut donc répartir sa fortune en début de période sur les différentes catégories de façon à ce que

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1; \quad x_i \geq 0 \quad (1)$$

$x_i$  étant la part de la fortune placée dans la catégorie  $i$ .

Quant au joueur  $M$  il devra réaliser en fin de période ce que nous désignons par un «état de marché»  $j$ , choisi parmi un ensemble  $j = 1, \dots, n$ . Un état de marché peut être représenté par un vecteur  $\pi_j = \{P_{ij}; i = 1, \dots, m\}$ ,  $P_{ij} > 0$ , indiquant les valeurs de chaque placement  $i$  sur le marché en fin de période en cas de réalisation de l'état  $j$ . La signification concrète des états de marché sera plus amplement commentée au paragraphe suivant, et en anticipant quelque peu nous admettons que le marché peut aussi choisir des états  $\lambda$  correspondant à des combinaisons linéaires des  $\pi_j$  de sorte que

$$\pi_\lambda = \sum_{j=1}^n y_j \pi_j \quad (2)$$

avec

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1; \quad y_j \geq 0 \quad (3)$$

L'enjeu de l'affrontement entre les joueurs  $I$  et  $M$  est le gain  $g$  de  $I$  réalisé en fin de période. Pour définir cette mesure d'utilité on part des éléments  $g_{ij}$  de la matrice  $G$  qui ont la signification suivante:

Si  $I$  place toute sa fortune dans la catégorie de placement  $i$  et si  $M$  réalise l'état  $j$ , le gain de l'investisseur en fin de période est

$$g_{ij} = P_{ij} - 1 + d_i \quad (4)$$

où  $d_i$  représente le rendement (intérêt, dividende, etc.) de la catégorie  $i$  pour la période de référence, toutes les valeurs en début de période étant normées à 1. Il est possible de modifier sans difficulté cette définition des  $g_{ij}$  pour tenir compte des variations des cours de changes (placements à l'étranger) et de la dévaluation de la monnaie de référence due à l'inflation.

Lorsque le joueur  $I$  répartit sa fortune selon (1) et que  $M$  réalise un état de marché selon (3) la valeur  $g$  est définie par

$$g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j \quad (5)$$

respectivement, en notation matricielle,

$$g = X * G Y$$

Or, le théorème fondamental de la théorie des jeux finis à deux personnes de somme zéro (théorème du minimax de *von Neumann*) énonce qu'il existe une certaine valeur  $v$  de  $g$  telle que

$$\max_X \min_Y X * G Y = \min_Y \max_X X * G Y = v \quad (6)$$

le montant  $v$  étant appelé la valeur du jeu. Pour une démonstration simple de ce théorème le lecteur pourra se référer à *Wolff* [9], la démonstration en question fait appel à la programmation linéaire qui est à la base du modèle général présenté au paragraphe 4.

De l'égalité (6) il résulte qu'il existe des vecteurs  $X'$  et  $Y'$  tels que

$$\begin{aligned} X' * G Y &\geq v \\ X * G Y' &\leq v \\ X' * G Y' &= v \end{aligned} \quad (7)$$

$X'$  et  $Y'$  sont alors les solutions du jeu ou «stratégies optimales». Lorsque tous les  $x_i$ , respectivement  $y_i$ , sont nuls sauf un on parle de «stratégies pures», sinon de «stratégies mixtes».

Une remarque importante s'impose ici. En effet, dans la plupart des applications de la théorie des jeux les conditions (1) et (3) sont interprétées comme définissant une répartition en probabilité des stratégies pures et les stratégies optimales sont alors les fréquences avec lesquelles il faut jouer les stratégies pures au cours d'un grand nombre de répétitions du jeu. La valeur  $v$  est alors bien entendu à considérer, le cas échéant, comme une espérance de gain. Dans notre application par contre, les stratégies mixtes des joueurs peuvent être matériellement réalisées lors d'une seule et unique partie de jeu, l'interprétation probabiliste n'est donc plus nécessaire et (5) donne alors pour une stratégie  $X'$  en vertu de (7) le gain effectivement réalisable par le joueur  $I$  quelle que soit la stratégie mise en œuvre par le joueur  $M$ .

## 2. Considérations d'ordre pratique

Le marché  $M$  n'étant pas un joueur personnifié comme l'investisseur  $I$  il faut en quelque sorte le simuler. Ceci se fait en établissant à partir de la situation connue en début de période une liste des états de marchés possibles ou envisageables en fin de période. C'est la méthode des scénarios à l'élaboration desquelles toute personne impliquée dans le processus de définition de la politique de placements de l'institution de prévoyance doit en principe participer (membres du conseil de fondation, comité de placements, etc.). L'établissement des scénarios est évidemment, du point de vue des applications, l'élément crucial du modèle; si les scénarios sont établis à la légère les stratégies de diversification seront à la mesure de cette superficialité. Insistons sur le fait que l'on ne demande pas aux personnes participant à l'élaboration des scénarios de donner des probabilités, même subjectives, de réalisation des états de marché envisagés mais de se concentrer sur l'établissement aussi complet et réaliste que possible des états envisageables sans considérations d'ordre statistique qui très souvent ne font que troubler la lucidité de l'investisseur.

De plus, les scénarios sont importants du point de vue formel lorsque l'on admet comme états de marchés possibles également toutes les combinaisons linéaires (2) des états correspondant aux scénarios  $j = 1, \dots, n$ . Ces derniers représentent alors les points extrêmes d'un ensemble convexe et les stratégies mixtes du joueur  $M$  ont ainsi une signification toute aussi concrète que les stratégies mixtes de l'investisseur  $I$ .

Quant à la période de référence, elle est par la force des choses limitée au court terme, c'est-à-dire entre 6 mois et 3 ans.

En effet au niveau actuel de nos connaissances économiques aucun investisseur averti prétendra établir des scénarios valables au-delà de 36 mois. La limite inférieure découle du contexte propre à la Suisse; étant donné l'étroitesse du marché local des changements importants, même partiels, dans la structure d'un portefeuille ne sont réalisables à conditions de marché neutres que dans des délais s'échelonnant entre 6 et 18 mois. Il faut relever que cette approche à court terme, qui implique bien entendu des révisions périodiques, n'est pas en contradiction avec les objectifs à long terme d'une institution de prévoyance, étant donné que l'objectif des placements de celle-ci n'est pas l'investissement à long terme proprement dit mais l'accroissement réel de la fortune à long terme, ce qui n'exclut pas la flexibilité à court terme, bien au contraire. D'autre part, il ne faut pas perdre de vue que les stratégies optimales obtenues par le modèle définissent des portefeuilles de référence à partir desquelles on réalisera la diversification effective qui tiendra compte, en plus, de toutes les contraintes pratiques.

Pour la définition des catégories de placements on peut prendre comme point de départ des catégories générales dont les plus importantes sont les suivantes:

1. Obligations (suisses et étrangères)
2. Actions (suisses et étrangères)
3. Immeubles
4. Hypothèques (1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> rang)
5. Placements à court terme (dépôts à terme, etc.)
6. Créances auprès de l'employeur
7. Métaux précieux (en particulier l'or)

L'utilisation du modèle étant en premier lieu d'ordre stratégique (structuration globale du portefeuille donnant une indication des axes de l'effort principal à suivre dans un contexte économique donné) il est inutile de vouloir pousser trop loin la différenciation des catégories de placements. L'établissement des scénarios serait de ce fait noyé dans des considérations de détails secondaires. Il suffira en général de scinder par exemple les obligations en deux groupes, correspondant aux échéances à long et à moyen terme, et de définir diverses catégories d'actions en fonction des indices boursiers à disposition.

Reste à tenir compte des contraintes légales imposées par les autorités de surveillance sur les placements. Elles sont souvent du type

$$x_i \leq a_i \quad (8)$$

$a_i$  étant un certain pourcentage de la fortune. De façon plus générale elles peuvent être exprimées par des contraintes du genre

$$\sum_{k \in H_r} x_k \leq a(H_r, L_r) \cdot \sum_{l \in L_r} x_l \quad (9)$$

ou  $H_r$  et  $L_r$  signifient des sous-ensembles de l'ensemble des catégories de placements  $i = 1, \dots, m$  et  $a(H_r, L_r)$  un pourcentage défini en fonction de ces sous-ensembles. Ce sont en premier lieu les catégories de placements en actions ou en obligations qui peuvent être soumises à de telles contraintes, cela varie d'une autorité de surveillance à l'autre. Le cas (8) est obtenu en posant

$$H_r = \{i\} \text{ et } L_r = \{1, \dots, m\}.$$

Les investissements en immeubles, les hypothèques ainsi que les créances auprès de l'employeur peuvent être considérés comme des placements permanents et entrent de ce fait à l'aide de (8) comme constantes dans le modèle pour une période de référence donnée; la diversification portera donc essentiellement sur les valeurs mobilières.

### 3. Quelques propriétés des stratégies optimales

Il est facile de démontrer à l'aide de (5) que lorsqu'il existe plusieurs stratégies optimales  $X'$  et  $Y'$  pour les joueurs  $I$  et  $M$  ces stratégies forment des ensembles convexes.

Le problème se pose donc à l'investisseur de choisir une stratégie particulière parmi ces diverses stratégies optimales. Il existe à cet effet plusieurs procédés de choix, citons à titre d'exemple la méthode de *Dresher* ([2], ch. III) qui permet à l'investisseur de choisir une stratégie optimale particulière permettant d'augmenter le gain de façon maximale au cas où l'adversaire  $M$  réaliserait une stratégie non optimale, en supposant qu'il se comporterait alors comme un adversaire ayant commis une erreur qu'il s'efforce de minimiser.

Toutefois, avant de faire un choix dans de tels cas il est indiqué d'analyser au préalable les stratégies optimales de l'adversaire  $M$ . Soit, en effet  $X' = (x'_i)$  et  $Y' = (y'_j)$  des stratégies optimales pour les joueurs  $I$  et  $M$  respectivement. Définissons d'autre par les grandeurs  $L' = X' * G$ ; la  $j$ -ième composante de  $L'$ , soit

$$l'_j = \sum_{i=1}^m g_{ij} x'_i$$

représente le gain de  $I$  si le marché choisit la stratégie pure  $y_j = 1$  et si  $I$  choisit la stratégie optimale  $X'$ . Or, en vertu du théorème du minimax on a

$$\sum_{j=1}^n l_j y'_j = v$$

d'où l'égalité

$$\sum_{j=1}^n (v - l_j) \cdot y'_j = 0; \quad y'_j \geq 0$$

Donc pour tout  $y'_j > 0$  on trouve  $l_j = v$ , c'est-à-dire, si une stratégie pure du joueur  $M$  entre dans la composition d'une de ces stratégies optimales mixtes alors cette stratégie pure, opposée à n'importe quelle stratégie optimale de l'adversaire  $I$  donnera lieu à un gain égal à  $v$ . De telles stratégies pures s'appellent «stratégies actives» du joueur  $M$ ; et la même remarque s'applique évidemment à toute combinaison linéaire (3) de ces stratégies.

Ceci nous permet de définir le «degré d'activité» du marché en posant

$$\delta = \frac{n_a - 1}{n - 1}; \quad 1 \leq n_a \leq n$$

$n_a$  étant le nombre de stratégies actives de  $M$  et  $n$  le nombre de scénarios établis.

Lorsque  $n_a = n$ ,  $\delta = 1$ ; toutes les stratégies pures de  $M$  sont actives et il n'y a aucune possibilité pour l'investisseur  $I$  d'obtenir dans le cadre des scénarios prévus un gain supérieur à  $v$ .

Par contre si  $n_a < n$ ,  $\delta < 1$ ; il existe des scénarios non actifs donc des possibilités de gains accrus pour  $I$  au cas où  $M$  ne joue pas de façon optimale, et les procédés de choix d'une stratégie de placements particulière mentionnés ci-devant peuvent être mis en œuvre.

Lorsque  $\delta = 0$  ( $n_a = 1$ ) la stratégie optimale de  $M$  est une stratégie pure; la ou les stratégies optimales de  $I$  sont alors également des stratégies pures et on est en présence d'un cas particulier d'un jeu avec col. Il existe bien sûr des jeux avec plusieurs cols pour lesquels  $\delta \neq 0$ .

#### 4. Détermination des stratégies optimales

Parmi les méthodes connues pour déterminer les stratégies optimales la programmation linéaire est la plus utile du point de vue des applications, étant donné les facilités que présentent les programmes d'ordinateurs standards qui existent à présent et qui permettent de résoudre rapidement des problèmes



contenant un nombre élevé de variables et d'effectuer des analyses paramétriques très poussées.

Il est en effet possible de représenter le jeu  $G$  par un programme linéaire (cf. *Stiefel* [8], *Wolff* [9]), car en posant  $v > 0$  sans perte de généralité et en introduisant les variables auxiliaires  $p_i$  et  $q_j$  de sorte que

$$p_i = \frac{x_i}{v}; \quad q_j = \frac{y_j}{v}$$

les relations (1) et (3) deviennent

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m p_i &= \frac{1}{v} = P^* \cdot E_m; & p_i &\geq 0 \\ \sum_{j=1}^n q_j &= \frac{1}{v} = Q^* \cdot E_n; & q_j &\geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

$E_m, E_n$  étant des matrices unitaires de rang  $m$ , respectivement  $n$ .

De (7) on obtient alors

$$P'^* G Q' = \frac{1}{v} \tag{11}$$

ce qui nous donne, en relation avec (10):

$$\begin{aligned} P'^* (G Q' - E_m) &= 0 \\ (P'^* G - E_n) Q' &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Etant donné que l'existence de solutions  $P'$  et  $Q'$  est garantie par le théorème du minimax, les relations (12) ne sont autres que les relations de complémentarité de la programmation linéaire qui représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $P'$  et  $Q'$  soient les solutions optimales du programme linéaire

$$\sum_{j=1}^n q_j = \max! \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} q_j \leq 1; \quad q_j \geq 0; \quad i = 1, \dots, m$$

et de son dual

$$\sum_{i=1}^m p_i = \min! \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^m g_{ij} p_i \geq 1; \quad p_i \geq 0; \quad j = 1, \dots, n$$

Pour assurer que  $v > 0$  il suffit que tous les  $g_{ij} > 0$ , or si cela n'est pas le cas cette condition peut être réalisée sans modifier les solutions du jeu en ajoutant une constante positive aux  $g_{ij}$  de sorte que

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + c > 0, \quad \forall i, j \quad (15)$$

La valeur du jeu  $G$  étant alors  $v' = v + c$ . Dans notre cas la condition (15) est obtenue en posant  $c = 1$  en vertu de (4).

Le théorème du minimax étant également valable pour des jeux avec contraintes sur les valeurs  $x_i$  et  $y_j$  (cf. [2], chapitre I) on peut ainsi résoudre le jeu  $G$  en tenant compte des investissements permanents et des contraintes légales du type (9), disons le jeu  $G^+$ , en faisant appel au programme linéaire suivant :

$$PLG^+ \quad \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{v'} = \min! \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^m \hat{g}_{ij} p_i \geq 1; \quad p_i \geq 0; \quad j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\sum_{k \in H_r} p_k - a(H_r, L_r) \cdot \sum_{l \in L_r} p_l \leq 0; \quad a(H_r, L_r) \geq 0; \quad \forall_r \quad (18)$$

Les stratégies optimales  $X'$  et  $Y'$  correspondantes sont alors obtenues en posant

$$x'_i = v' \cdot p_i; \quad i = 1, \dots, m \quad (19)$$

$$y'_j = v' \cdot q_j; \quad j = 1, \dots, n \quad (20)$$

les  $q_j$  étant alors les variables duales de  $PLG^+$ .

On vérifie directement que (18) correspond bien à (9).

Nous utilisons la version duale en raison de (19) puisque dans les applications ce sont en premier lieu les stratégies  $X'$  qui intéressent l'utilisateur.

## 5. Le critère du regret

On peut reprocher au critère de gain  $g$  de donner des solutions optimales trop prudentes puisqu'il est implicitement admis que le marché  $M$  cherche systématiquement à réduire le gain de l'investisseur en se comportant de façon optimale, ce qui n'est en fait pas le cas.

Les procédés de choix mentionnés au chapitre 3 lorsqu'il existe plusieurs stratégies optimales atténuent en partie cette critique.

Mais l'utilisateur peut aussi recourir à un autre critère d'utilité, par exemple en utilisant la notion de «regret» (cf. *Massé* [4], chapitre VII).

Le regret  $r_{ij}$  est défini à partir du gain  $g_{ij}$  comme suit

$$r_{ij} = \max_i g_{ij} - g_{ij}; \quad j = 1, \dots, n \quad (21)$$

En remplaçant  $g_{ij}$  par  $r_{ij}$  et en recherchant des stratégies qui minimisent le regret maximal, à la place de maximiser le gain minimal, en fin de la période de référence, l'investisseur obtient des stratégies de diversification optimales qui réduiront en quelque sorte le regret «ex post» de n'avoir pas choisi le placement donnant le gain maximal correspondant à l'état de marché qui se réalise effectivement. Le critère du regret donne ainsi des stratégies de diversification plus spéculatives que le critère du gain, le gain acquis sera plus bas, mais les possibilités de gains plus élevés au cas où  $M$  ne joue pas de façon optimale seront mieux exploitées au cas où le degré d'activité du marché  $\delta < 1$ .

La détermination numérique des stratégies optimales en utilisant le critère du regret se fait à l'aide de PLG<sup>+</sup> en remplaçant simplement les  $g_{ij}$  par  $-r_{ij}$  (puisque l'on cherche à minimiser le regret) et en faisant de la sorte que  $\hat{r}_{ij} = -r_{ij} + c > 0$ .

Le choix de l'un ou de l'autre critère dépendra de considérations propres à chaque institution de prévoyance qui dépasseront le cadre purement technique. Toutefois, indépendamment de cela, la nature même du jeu  $G$  peut avoir une incidence sur ce choix. En effet d'un théorème connu de la théorie des jeux de chance à somme zéro (cf. *Epstein* [3], p. 70 ss.) il ressort que dans un jeu favorable à un joueur une stratégie optimale pour ce joueur est toujours du type «stratégie prudente», alors qu'au contraire dans un jeu défavorable ou équitable une stratégie optimale est toujours du type «stratégie d'audace». Dans notre contexte le jeu  $G$  serait favorable pour l'investisseur  $I$  si les conditions économiques générales sont telles que le jeu donne un gain  $v$  supérieur au taux d'intérêt technique utilisé dans les tarifs de l'institution de prévoyance, dans ce cas l'approche prudente serait justifiée et une stratégie spéculative devrait être écartée. Par contre dans des conditions économiques instables (inflation, conditions boursières volatiles, etc.), dans lesquelles le jeu  $G$  aboutirait à un gain inférieur au taux technique, une stratégie de diversification basée sur le critère du regret pourrait être envisagée sans pour autant être d'emblée considérée comme spéculative.

## 6. Un exemple numérique

A titre d'illustration des développements précédents considérons un fonds autonome dont le siège se trouve dans le canton de Vaud.

Les placements hypothécaires et immobiliers étant considérés comme des constantes sur la période de référence, les contraintes légales (9) concernent en premier lieu les actions et les métaux précieux; elles peuvent être exprimées sommairement comme suit:

$L_1$ :  $\sum$  actions  $\leq$  30% de la fortune totale;

$L_2$ :  $\sum$  actions étrangères  $\leq$  20% de la fortune totale;

$L_3$ :  $\sum$  métaux précieux (or)  $\leq$  5% de la fortune totale.

Le modèle a pris en charge quatre scénarios établis en 1977 pour une période de référence de 12 mois, à savoir:

$S_1$  scénario «neutre», c'est-à-dire avec des situations de marché identiques en début et en fin de période (sauf pour les obligations suisses);

$S_2$  scénario «pessimiste» représentant une évolution défavorable dans l'ensemble des cours en bourse et des cours de change;

$S_3$  scénario «optimiste», évolution plutôt favorable des cours;

$S_4$  scénario «probable» selon l'avis personnel de plusieurs experts.

Le taux d'inflation en Suisse a été négligé, par contre l'on a tenu compte des fluctuations possibles des cours de change des monnaies étrangères concernées face au franc suisse.

Les 17 catégories de placements variables que voici ont été retenues:

<i>Obligations</i>	<i>Désignation</i>
1. Suisse long terme	OCHL
2. Suisse moyen terme	OCHM
<i>Actions</i>	
Suisse (Indice SBS)	
3. Assurances	ACHA
4. Banques	ACHB
5. Machines/Métaux	ACHM
6. Electricité	ACHE

7. Chimie	ACHC
8. Consommation	ACHK
9. Divers	ACHD
10. Allemagne (Indice général FAZ)	ABRD
11. Japon (Indice général Tokyo)	AJAP
Etats-Unis (Indice $S + P$ )	
12. Industries	USAI
13. Finances	USAF
14. Services	USAU
15. Transports	USAT
<hr/>	
16. Placements suisses à court terme	PCTS
17. Métaux précieux : or	MPOR

Le tableau N° 1 résume les données numériques des scénarios (les vecteurs  $\pi_j$  mentionnés au paragraphe 1) pour la période de référence. Le tableau N° 2 représente la matrice des gains  $G$  obtenue à partir du tableau précédent en appliquant la relation (4) légèrement modifiée pour tenir compte des cours de change. Le programme linéaire auxiliaire  $PLG^+$  permettant de résoudre le jeu  $G^+$  est représenté au tableau N° 3.

Quant au tableau N° 4 il résume les résultats de quatre jeux effectués sur ordinateur, chacun en deux variantes. Ces quatre jeux correspondent au jeu  $G$  avec et sans contraintes légales ( $G^+$ ,  $G^-$ ) qui utilise le critère du gain, et au jeu  $R$  avec et sans contraintes ( $R^+$ ,  $R^-$ ) utilisant le critère du regret. Deux variantes ont été jouées pour chaque jeu mentionné ci-dessus, la première avec l'ensemble complet des 17 catégories de placements mentionnées ci-devant, la deuxième en éliminant du tableau les placements à court terme (PCTS) de façon à pouvoir étudier de façon plus approfondie les effets qu'entraîne l'exclusion de cette catégorie, prépondérante dans la première variante.

Afin de ne pas surcharger ce tableau de synthèse, les catégories ont été regroupées par type de support (obligations sous OCH, actions suisses sous ACH et ainsi de suite), les placements hypothécaires ainsi que les investissements en immeubles y figurent comme parts fixes de la fortune.

A présent ces résultats ont avant tout un intérêt historique. Ils illustrent néanmoins de façon pertinente la souplesse du modèle dans son utilisation, mais rappellent avant tout le fait que la définition d'une stratégie de placements est un processus continu qui doit être répété régulièrement en fonction de l'évolution économique, en vouant un soin particulier à l'établissement d'un éventail de scénarios aussi large et aussi réaliste que possible.

Il va sans dire qu'aucun modèle ne peut remplacer l'activité et le flair d'un gestionnaire de portefeuille averti. Néanmoins, en tant qu'outil permettant de définir des portefeuilles de références, la théorie des jeux présente une utilité certaine. A l'encontre des modèles du type *Markowitz-Sharpe* (cf. [5]) qui impliquent entre autres des analyses statistiques très poussées, la simplicité du présent modèle permet à l'investisseur de se concentrer sur l'essentiel, à savoir la définition des scénarios, en l'incitant à faire des appréciations de situation successives à intervalles réguliers. D'autre part, la méthode des scénarios permet de prendre en compte toutes les opinions émises sans en avantager certaines au détriment des autres. Les stratégies de diversification définies par le modèle peuvent donc effectivement servir comme points de repères objectifs aux organes concernés des institutions de prévoyances autonomes dans leur élaboration de politiques de placements prudentes et avisées.

### Liste de références

- [1] *Benjamin S.*: The Theory of Games and its application to rate of interest. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 85, III, 1959.
- [2] *Dresher M.*: Jeux de Stratégie – Théorie et Applications. Dunod 1965.
- [3] *Epstein R.*: Theory of gambling and statistical logic. Academic Press 1967.
- [4] *Massé P.*: Le Choix des investissements; Chapitre V et VII. Dunod 1959.
- [5] *Moore P.J.*: Mathematical Models in Portfolio Selection. Journal of the Institute of Actuaries. Vol. 98. II. 1972.
- [6] *Nolfi P.*: Hinweise auf die Ergebnisse und Bedeutung der Spieltheorie. Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses 2/1957.
- [7] *v. Neumann J. – Morgenstern O.*: The theory of games and economic behavior. Princeton University Press 1944.
- [8] *Stiefel E.*: Einführung in die Numerische Mathematik; Kapitel II. Teubner Verlag 1961.
- [9] *Wolff K.H.*: Methoden der Unternehmensforschung im Versicherungswesen; Kapitel III. Springer Verlag 1966.

D. Chable  
1605 Chemières/Chexbres

Tableau N° 1  
Tableau des scénarios ( $P, c$ )

Scénarios Catégories de placements	$S_1$		$S_2$		$S_3$		$S_4$	
	$P_1$	$c_1$	$P_1$	$c_1$	$P_1$	$c_1$	$P_1$	$c_1$
<i>Suisse</i>								
Obligations long terme $d = 4,75$	98	100	93,5	100	104,75	100	100	100
Obligations moyen terme $d = 4,5$	97,5	100	96,25	100	101,25	100	100	100
Actions $d = 3,49$								
Banques	100	100	85	100	105	100	100	100
2,79 Assurances	100	100	90	100	110	100	105	100
2,66 Machines	100	100	80	100	105	100	95	100
2,04 Chimie	100	100	90	100	112	100	106	100
3,56 Electricité	100	100	95	100	105	100	103	100
3,26 Consommation	100	100	90	100	107	100	105	100
4,01 Divers	100	100	90	100	100	105	100	100
<i>Allemagne</i>								
Actions: $d = 4$	100	100	87	100	105	102	90	100
<i>Japon</i>								
Actions: $d = 1,7$	100	100	85	92,5	110	102	100	100
<i>USA</i>								
Actions $d = 4,28$								
Finance	100	100	90	96,5	105	103	95	97
4,46 Industries	100	100	90	96,5	110	100	100	97
7,42 Services	100	100	95	96,5	105	100	100	97
3,76 Transports	100	100	88	96,5	110	100	95	97
<i>Placements court terme Suisse</i>	-	$i =$ 4,25%	-	$i =$ 4,5%	-	$i =$ 3,5%	-	$i =$ 4,0%
<i>OR</i>	100	-	110	-	95	-	105,5	-

$P_1$ : valeur boursière en fin de période de référence.

$c_1$ : cours de change en fin de période de référence.  
( $P_0 = 100, c_0 = 100$  en début de période)

$d$ : rendement (resp. intérêt nominal)

Tableau N° 2  
Matrice des gains ( $g_{ij}$ ) du jeu  $G$

M

Scénarios Catégories	M			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
1 OCH L	0,0275	-0,0175	0,095	0,0475
2 OCH M	0,0175	0,0075	0,0575	0,0450
3 ACH B	0,0349	-0,1151	0,0849	0,0349
4 ACH A	0,0279	-0,0721	0,1279	0,0779
5 ACH M	0,0266	-0,1734	0,0766	-0,0234
6 ACH C	0,0204	-0,0796	0,1404	0,0804
7 ACH E	0,0356	-0,0144	0,0856	0,0656
8 ACH K	0,0326	-0,0674	0,1026	0,0826
9 ACH A	0,0401	-0,0599	0,0901	0,0401
10 ABRD	0,0400	-0,0900	0,1118	-0,0600
11 AJAP	0,0170	-0,1982	0,1393	0,0170
12 AUSF	0,0428	-0,0902	0,1256	-0,0290
13 AUSI	0,0446	-0,0885	0,1789	0,0216
14 AUSU	0,0742	-0,0116	0,1579	0,0506
15 AUST	0,0376	-0,1098	0,1717	-0,0341
16 PCTS	0,0425	0,0450	0,0350	0,0400
17 MPOR	0,0000	0,1000	-0,0500	0,0550

Chiffres encadrés:  $g_j = \max_i g_{ij}$  pour le calcul de la matrice des regrets selon paragraphe 5.  
Les éléments  $g_{ij}$  sont calculés en fonction du tableau N° 1 selon la formule:

$$g = \frac{P_1 \cdot c_1 - P_0 \cdot c_0 + d \cdot c_1}{P_0 \cdot c_0}$$



Tableau N° 3  
Programme linéaire PLG<sup>+</sup> avec contraintes légales correspondant au jeu G<sup>+</sup>

L	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	=	min!
	MPOR	PCTS	AUST	AUSU	AUSI	AUSF	AJAP	ABRD	ACHD	ACHK	ACHE	ACHC	ACHM	ACHA	ACHB	OCHM	OCHL		
S <sub>1</sub>	1,0	1,042	1,038	1,074	1,045	1,043	1,017	1,04	1,040	1,033	1,035	1,020	1,026	1,028	1,035	1,017	1,027	≥	1
S <sub>2</sub>	1,1	1,045	0,890	0,988	0,911	0,910	0,802	0,91	0,940	0,933	0,986	0,920	0,827	0,928	0,886	1,007	0,982	≥	1
S <sub>3</sub>	0,95	1,035	1,172	1,158	1,179	1,126	1,140	1,112	1,090	1,103	1,086	1,140	1,077	1,128	1,085	1,057	1,095	≥	1
S <sub>4</sub>	1,055	1,04	0,966	1,051	1,022	0,971	1,017	0,94	1,040	1,083	1,066	1,080	0,977	1,078	1,035	1,045	1,047	≥	1
L <sub>1</sub>	0,5̄1	0,5̄1	0,49	0,49	0,49	0,45	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,5̄1	0,5̄1	≤	0
L <sub>2</sub>	0,3̄4	0,3̄4	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	0,3̄4	≤	0
L <sub>3</sub>	0,915	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	≤	0

-- : signifie coefficient négatif

Les placements fixes ne figurent pas dans ce tableau; les pourcentages figurant dans les contraintes L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub> se réfèrent donc à la fortune résiduelle et non à la fortune totale.

**Tableau N° 4**  
**Diversification globale: Répartition en % de la fortune totale**

Catégorie de placement	1 <sup>re</sup> Variante				2 <sup>e</sup> Variante			
	G+	G-	R+	R-	G+	G-	R+	R-
OCH	-	-	13,5	-	54,0	-	34,0	-
ACH	0,5	-	-	-	-	-	-	-
AJAP	-	-	-	-	-	-	-	-
ABRD	-	-	-	-	-	-	-	-
AUS	7,0	7,5	20,0	42,5	-	32,0	20,0	42,5
PCTS	46,5	46,0	25,5	-	-	-	-	-
OR	5,0	5,5	-	16,5	5,0	27,0	5,0	16,5
HYP	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
IMOB	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0
gmin	4,26	4,27	1,1	1,96	1,54	3,99	0,7	1,96
gmax	4,97	4,33	9,06	9,96	4,8	6,2	8,5	9,96

gmin: gain (taux de rendement) minimal *assuré* par la stratégie de diversification concernée quel que soit l'état de marché réalisé dans le cadre des quatre scénarios: pour les yeux  $\hat{G}$  c'est la valeur du jeu en question.

gmax: gain *maximal réalisable* par la stratégie de diversification concernée si le marché ne se comporte pas de façon optimale.

Ces résultats sont à comparer au taux technique du fonds qui est de 3,75%.

### **Zusammenfassung**

Es wird ein Zweipersonennullsummenspiel zwischen Anleger und Anlagemarkt betrachtet. Zunächst werden die hauptsächlichsten theoretischen Resultate in Erinnerung gerufen, dann folgen einige praktische wichtige Grundsatzüberlegungen. Zum Schluss werden optimale und praktikable Strategien diskutiert.

### **Résumé**

Un jeu de somme zéro entre l'investisseur et le marché des investissements est considéré. D'abord, les résultats théoriques sont résumés, puis quelques importants aspects pratiques sont traités. A la fin, il y a une discussion des stratégies optimales et praticables.

### **Riassunto**

Viene considerato un gioco di somma tra un investitore ed il mercato degli investimenti. Dapprima vengono riassunti i risultati teorici. Successivamente l'autore si occupa di qualche aspetto pratico. Infine si trattano strategie ottimali e praticabili.

### **Abstract**

A two person zero sum game is considered between investor and investment market. First, the main theoretical results are recalled, then some important practical aspects are dealt with. Finally, there is a discussion on optimal and practicable strategies.