Modèle pratique et modèle rationnel pour actifs et invalides

Par Philippe Chuard, Pully

1. Introduction

Lorsque, notamment dans les assurances de pensions de la prévoyance professionnelle, l'incapacité de travail donne droit à des prestations, on est conduit à utiliser une technique actuarielle dans laquelle on distingue, parmi les vivants, les actifs des invalides. Cette distinction apparaît en premier lieu dans les ordres et effectifs sur lesquels reposent les développements conduisant à l'obtention des valeurs actuelles que l'on désire. Une étude publiée antérieurement[1] a montré comment doit être rectifiée la formule de récurrence communément adoptée pour l'effectif des invalides. La correction proposée permet en outre de faire correspondre au modèle utilisé jusqu'à présent, un autre modèle dans lequel intervient la réactivité des invalides, et de les lier par des relations simples et rigoureuses. Le présent travail se rapporte à la construction de ces relations et à l'usage qu'on peut en faire pour calculer des valeurs actuelles.

2. Définitions et notations

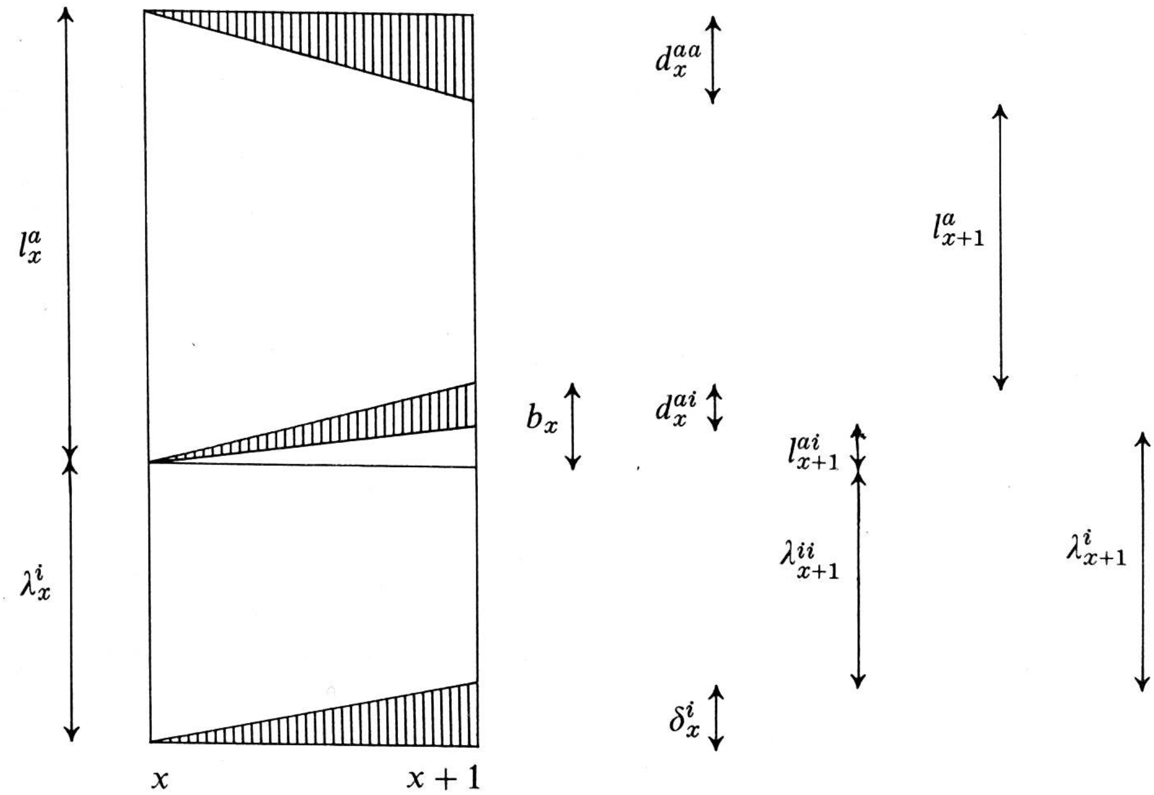
Considérons un certain nombre de vivants de même âge, comprenant des actifs et des invalides, et suivons en l'évolution dans le temps. Le *décès* agit comme cause de diminution, pour les actifs comme pour les invalides. L'*invalidité,* qui fait passer des actifs à l'état d'invalide, agit comme cause de diminution pour les actifs et comme cause d'augmentation pour les invalides. La *réactivité* a l'effet inverse.

Nous disons que cette évolution suit le *modèle pratique* si la réactivité n'intervient pas, et qu'elle suit le *modèle rationnel* si la *réactivité* intervient. Les formules de base, relatives à ces modèles, s'établissent en examinant comment les nombres d'actifs et d'invalides varient entre deux âges consécutifs x et $x+1$. C'est à cette variation que se rapportent les deux schémas suivants ainsi que les notations qu'ils font intervenir.

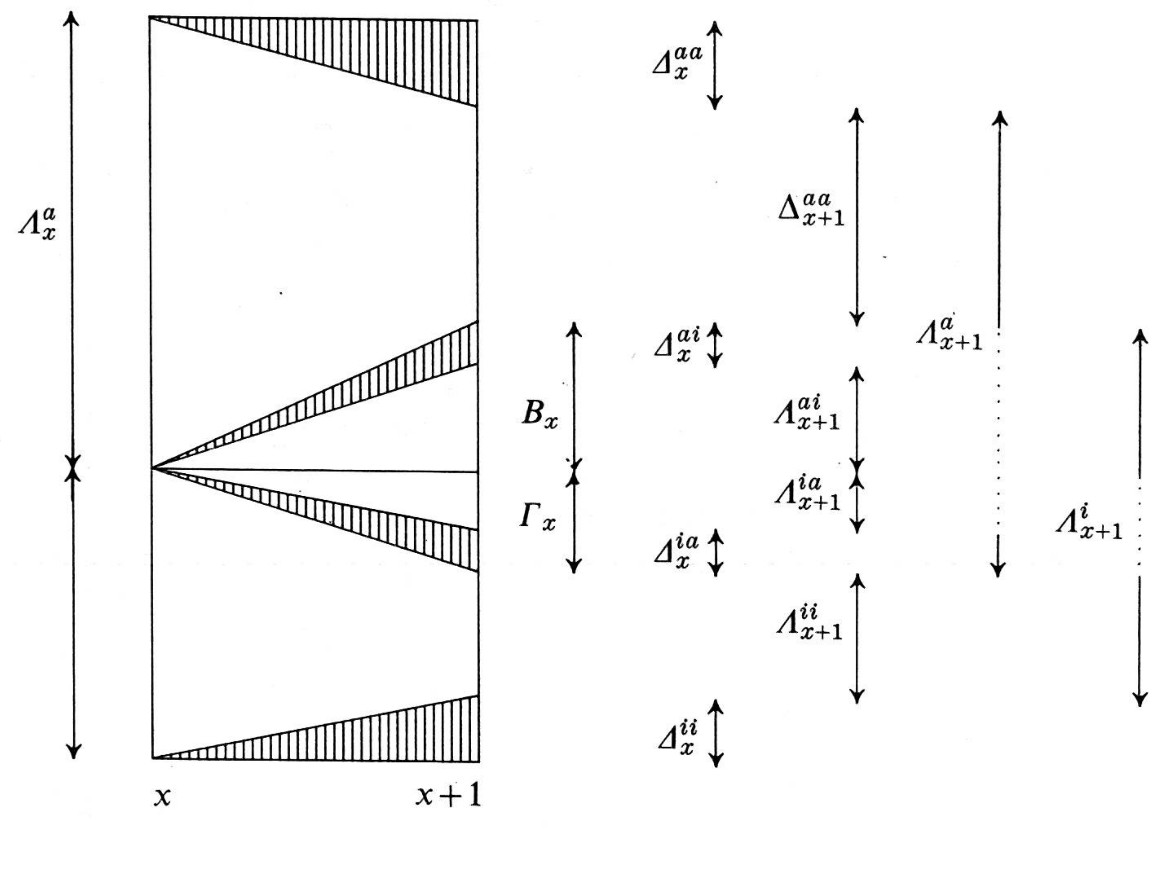
[1] Bibliographie citée [1].

Schémas

Modèle pratique



Modèle rationnel



Notations

Modèle pratique	Modèle rationnel	
l_x^a	Λ_x^a	actifs d'âge x
λ_x^i	Λ_x^i	invalides d'âge x
b_x	B_x	actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge $x+1$
	Γ_x	invalides d'âge x devenus actifs par réactivité avant l'âge $x+1$
d_x^{aa}	Δ_x^{aa}	actifs d'âge x décédés à l'état d'actif avant l'âge $x+1$
d_x^{ai}	Δ_x^{ai}	actifs d'âge x devenus invalides puis décédés à l'état d'invalide avant l'âge $x+1$
δ_x^i		invalides d'âge x décédés avant l'âge $x+1$
	Δ_x^{ia}	invalides d'âge x devenus actifs par réactivité puis décédés à l'état d'actif avant l'âge $x+1$
	Δ_x^{ii}	invalides d'âge x décédés à l'état d'invalide avant l'âge $x+1$
	Λ_{x+1}^{aa}	actifs d'âge x, en vie à l'état d'actif à l'âge $x+1$
l_{x+1}^{ai}	Λ_{x+1}^{ai}	actifs d'âge x, devenus invalides, en vie à l'état d'invalide à l'âge $x+1$
	Λ_{x+1}^{ia}	invalides d'âge x devenus actifs par réactivité, en vie à l'état d'actif à l'age $x+1$
λ_{x+1}^{ii}	Λ_{x+1}^{ii}	invalides d'âge x, en vie à l'état d'invalide à l'âge $x+1$
l_{x+1}^a	Λ_{x+1}^a	actifs d'âge $x+1$
λ_{x+1}^i	Λ_{x+1}^i	invalides d'âge $x+1$

Au sujet des notations introduites, précisons

- qu'il est fait usage de *lettres latines* (l, b, d) pour les *ordres*[2] et les nombres de personnes qui en dépendent, et de *lettres grecques* (λ, δ, Λ, B, Γ, Δ) pour les *effectifs*[3] et les nombres de personnes qui en dépendent,
- qu'il est fait usage de *minuscules* (l, b, d, λ, δ) pour le *modèle pratique*, et de *majuscules* (Λ, B, Γ, Δ) pour le *modèle rationnel.*

On peut en outre attirer l'attention sur le fait que les nombres l, λ, Λ se rapportent à un *instant* (qui est celui de l'âge indiqué en indice), et que les nombres b, d, δ, B, Γ, Δ se rapportent à une *durée* (qui est de un an dès l'âge indiqué en indice). Les premiers sont des *états numériques*, et les seconds des *cumuls.*

[2] *Ordre:* personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs *causes de sortie uniquement.*

[3] *Effectif:* personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs *causes de sortie et d'entrée.*

3. Probabilités

Utilisant des minuscules pour le modèle pratique et des majuscules pour le modèle rationnel, désignons comme suit les *probabilités indépendantes* des événements qui agissent sur les nombres des actifs et des invalides:

Modèle pratique	Modèle rationnel	
q_x^a	Q_x^a	décès d'actif
i_x	I_x	invalidité
q_x^i	Q_x^i	décès d'invalide
	R_x	réactivité

(Nous admettons que la probabilité de réactivité, comme les autres probabilités, dépend de l'âge x.)

A ces probabilités indépendantes on associe les *probabilités dépendantes* ci-après:

Modèle pratique

$$*q_x^{aa} = q_x^a\left(1-\frac{i_x}{2}\right) \tag{1}$$

$$*i_x = i_x\left(1-\frac{q_x^a}{2}\right). \tag{2}$$

Modèle rationnel

$$*Q_x^{aa} = Q_x^a\left(1-\frac{I_x}{2}\right) \tag{3}$$

$$*I_x = I_x\left(1-\frac{Q_x^a}{2}\right) \tag{4}$$

$$*Q_x^{ii} = Q_x^i\left(1-\frac{R_x}{2}\right) \tag{5}$$

$$*R_x = R_x\left(1-\frac{Q_x^i}{2}\right). \tag{6}$$

4. Formules du modèle pratique

L'indépendance du décès d'actif et de l'invalidité conduit à la relation de récurrence de l'ordre des actifs

$$l_{x+1}^{a} = l_{x}^{a}\,(1-q_{x}^{a})\,(1-i_{x}) \tag{7}$$

équivalente, par (1) et (2), à

$$l_{x+1}^{a} = l_{x}^{a}\,(1-{}^{*}q_{x}^{aa}-{}^{*}i_{x}). \tag{8}$$

Si l'on pose

$$^{*}q_{x}^{aa} = \frac{d_{x}^{aa}}{l_{x}^{a}} \text{ et } {}^{*}i_{x} = \frac{b_{x}}{l_{x}^{a}},$$

la relation

$$l_{x+1}^{a} = l_{x}^{a}-d_{x}^{aa}-b_{x},$$

que fait apparaître le schéma du modèle pratique, est équivalente à (8). On peut donc écrire

$$b_{x} = l_{x}^{a}\,{}^{*}i_{x}. \tag{9}$$

Le travail mentionné précédemment[4] montre que, contrairement à ce qui résulte des formules communément adoptées, on doit poser (ce qui, en outre, est intuitivement correct),

$$l_{x+1}^{ai} = b_{x} \quad {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i}. \tag{10}$$

Partant de

$${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{l_{x+1}^{i}}{l_{x+\frac{1}{2}}^{i}} \quad \text{et} \quad l_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{1}{2}\left(l_{x}^{i}+l_{x+1}^{i}\right),$$

où l_{x}^{i} est l'ordre des invalides lié à q_{x}^{i} par

$$l_{x+1}^{i} = l_{x}^{i}\,(1-q_{x}^{i}),$$

on obtient

$${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{1-q_{x}^{i}}{1-\frac{q_{x}^{i}}{2}}. \tag{11}$$

Compte tenu de (10), (9), (2) et (11), l_{x+1}^{ai} peut être exprimé par

$$l_{x+1}^{ai} = l_{x}^{a}\,i_{x}\left(1-\frac{q_{x}^{a}}{2}\right)\frac{1-q_{x}^{i}}{1-\frac{q_{x}^{i}}{2}}. \tag{12}$$

[4] Bibliographie citée [1], formule (37).

D'autre part le schéma du modèle pratique fait apparaître que

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x+1}^{ii} + l_{x+1}^{ai}.$$

Si, dans cette expression, on tient compte de (12) et de

$$\lambda_{x+1}^{ii} = \lambda_x^i (1 - q_x^i)$$

on obtient

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_x^i (1 - q_x^i) + l_x^a\, i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right) \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{q_x^i}{2}}, \tag{13}$$

formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique[5]. Remarquons en passant que si les deux mortalités q_x^a et q_x^i sont égales, ce qu'on peut exprimer par

$$q_x^a = q_x^i = q,$$

les formules (7) et (13) conduisent à

$$l_{x+1}^a + \lambda_{x+1}^i = (l_x^a + \lambda_x^i)(1 - q)$$

ce qui montre que q est également la mortalité q_x des $l_x^a + \lambda_x^i = l_x$ vivants d'âge x. Cette conséquence est logique; sa démonstration est rendue possible par la formule (13) de λ_{x+1}^i.

5. Formules du modèle rationnel

Du schéma pour le modèle rationnel on tire

$$\Lambda_{x+1}^{aa} = \Lambda_x^a - \Delta_x^{aa} - B_x \tag{14}$$

$$\Lambda_{x+1}^{ii} = \Lambda_x^i - \Delta_x^{ii} - \Gamma_x \tag{15}$$

$$\Lambda_{x+1}^{a} = \Lambda_{x+1}^{aa} + \Lambda_{x+1}^{ia} \tag{16}$$

$$\Lambda_{x+1}^{i} = \Lambda_{x+1}^{ii} + \Lambda_{x+1}^{ai}. \tag{17}$$

[5] Bibliographie citée [1], formule (44).

Sur la base d'un raisonnement identique à celui qui conduit aux formules (7) et (8) du modèle pratique on arrive à

$$\Lambda_{x+1}^{aa} = \Lambda_x^a (1-Q_x^a)(1-I_x) \tag{18}$$

$$= \Lambda_x^a (1-{}^*Q_x^{aa} - {}^*I_x) \tag{19}$$

$$\Lambda_{x+1}^{ii} = \Lambda_x^i (1-Q_x^i)(1-R_x) \tag{20}$$

$$= \Lambda_x^i (1-{}^*Q_x^{ii} - {}^*R_x) \tag{21}$$

ainsi qu'à

$$B_x = \Lambda_x^a \, {}^*I_x \tag{22}$$

$$\Gamma_x = \Lambda_x^i \, {}^*R_x. \tag{23}$$

Reprenant les considérations conduisant à (10) dans le modèle pratique, on peut écrire

$$\Lambda_{x+1}^{ai} = B_x \; {}_{\frac{1}{2}}P_{x+\frac{1}{2}}^i \tag{24}$$

$$\Lambda_{x+1}^{ia} = \Gamma_x \; {}_{\frac{1}{2}}P_{x+\frac{1}{2}}^a \tag{25}$$

avec

$$ {}_{\frac{1}{2}}P_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1-Q_x^i}{1-\dfrac{Q_x^i}{2}} \tag{26}$$

$$ {}_{\frac{1}{2}}P_{x+\frac{1}{2}}^a = \frac{1-Q_x^a}{1-\dfrac{Q_x^a}{2}}. \tag{27}$$

Les formules (16), (18), (25), (23), (6), (27), d'une part, et (17), (20), (24), (22), (4), (26), d'autre part, conduisent aux relations de récurrence

$$\Lambda_{x+1}^a = \Lambda_x^a (1-Q_x^a)(1-I_x) + \Lambda_x^i R_x \left(1-\frac{Q_x^i}{2}\right)\frac{1-Q_x^a}{1-\dfrac{Q_x^a}{2}} \tag{28}$$

$$\Lambda_{x+1}^i = \Lambda_x^i (1-Q_x^i)(1-R_x) + \Lambda_x^a I_x \left(1-\frac{Q_x^a}{2}\right)\frac{1-Q_x^i}{1-\dfrac{Q_x^i}{2}} \tag{29}$$

pour l'effectif des actifs et celui des invalides.
A titre de remarque examinons le cas de l'égalité des mortalités Q_x^a et Q_x^i. Posons

$$Q_x^a = Q_x^i = Q.$$

Les formules (28) et (29) conduisent alors à

$$\Lambda_{x+1}^{a} + \Lambda_{x+1}^{i} = (\Lambda_{x}^{a} + \Lambda_{x}^{i})(1-Q),$$

ce qui montre que Q est également la mortalité Q_x des $\Lambda_x^a + \Lambda_x^i$ vivants d'âge x.

6. Passage d'un modèle à l'autre

Le modèle pratique, qui laisse de côté la réactivité, correspond moins bien à la réalité que le modèle rationnel. Par contre il rend possible une technique actuarielle simple. Une question vient à l'esprit: à quelles conditions peut-on obtenir que la variation de l'ordre l_x^a des actifs dans le modèle pratique corresponde à celle de l'effectif Λ_x^a des actifs dans le modèle rationnel, et qu'il en aille de même pour les effectifs λ_x^i et Λ_x^i des invalides? Posons pour cela

$$l_x^a = \Lambda_x^a \qquad l_{x+1}^a = \Lambda_{x+1}^a \tag{30}$$

$$\lambda_x^i = \Lambda_x^i \qquad \lambda_{x+1}^i = \Lambda_{x+1}^i \tag{31}$$

avec

$$q_x^a = Q_x^a \qquad q_x^i = Q_x^i. \tag{32}$$

Les formules (7), (28), (30), (31) et (32) conduisent à la relation

$$i_x = I_x - \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} R_x \frac{1-\dfrac{q_x^i}{2}}{1-\dfrac{q_x^a}{2}}. \tag{33}$$

On obtient le même résultat avec les formules (13), (29), (30), (31) et (32).
Si, faisant intervenir des probabilités dépendantes, on tient compte des relations (2), (4), (6) et (32), la formule (33) devient

$$*i_x = *I_x - \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} *R_x. \tag{34}$$

Les relations (33) et (34) répondent à la question posée. Le résultat obtenu est conforme à ce que l'intuition suggère: si l'on néglige la réactivité, il faut réduire les probabilités d'invalidité.

Le lecteur qui désire une illustration numérique des développements qui précèdent pourra consulter les *tableaux 1 et 2* publiés à la fin de cette étude. Ils contiennent un extrait des résultats obtenus

– à partir des probabilités $^*q_x^{aa}$, $^*i_x$ et q_x^i indiquées, pour les âges x de 20 à 64, dans les tables EVK 1970[6],
– en faisant intervenir des probabilités de réactivité R_x définies par

$$R_x = 0{,}975 - 0{,}015\,x,$$

– en posant $\quad l_{20}^a = 100000, \quad \lambda_{20}^i = 0$

et $\quad l_{65}^i = l_{65}.$

Les probabilités indépendantes q_x^a et i_x indiquées dans les tableaux 1 et 2 sont calculées au moyen des probabilités dépendantes $^*q_x^{aa}$ et $^*i_x$ des tables EVK 1970. La formule pour les probabilités de réactivité R_x est un ajustement simplifié de valeurs obtenues à partir de celles qui sont mentionnées dans les tables VZ 1960[7].

A titre de remarque on peut indiquer d'autres relations qui résultent des conditions (30), (31) et (32). Tout d'abord la formule (34), compte tenu de (9), (22) et (23), conduit à

$$b_x = B_x - \Gamma_x; \tag{35}$$

il est intéressant d'examiner cette relation en se reportant aux schémas des deux modèles.
En outre ces schémas montrent que

$$l_{x+1}^a = l_x^a - d_x^{aa} - b_x$$

$$\Lambda_{x+1}^a = \Lambda_x^a - \Delta_x^{aa} - B_x + \Gamma_x - \Delta_x^{ia};$$

compte tenu de (30) et (35), on a alors

$$d_x^{aa} = \Delta_x^{aa} + \Delta_x^{ia}. \tag{36}$$

On peut également constater que

$$d_x^{aa} + d_x^{ai} + \delta_x^i = \Delta_x^{aa} + \Delta_x^{ai} + \Delta_x^{ia} + \Delta_x^{ii}$$

d'où, en tenant compte de (36),

$$d_x^{ai} + \delta_x^i = \Delta_x^{ai} + \Delta_x^{ii}. \tag{37}$$

[6] Bibliographie citée [2], colonnes 6, 7 et 8.
[7] Bibliographie citée [3], pages 22 et 23.

7. Valeurs actuelles

7.1. Remarque préliminaire

Les développements qui précèdent montrent que l'évolution des Λ_x^a actifs et celle des Λ_x^i invalides du modèle rationnel, reposant sur les probabilités Q_x^a, I_x, Q_x^i et R_x, correspondent exactement à l'évolution des l_x^a actifs et à celle des λ_x^i invalides du modèle pratique si

- on pose $\qquad q_x^a = Q_x^a, \quad q_x^i = Q_x^i,$
- on lie $\qquad i_x$ à I_x et R_x par (33),
- on part de $\qquad l_{20}^a = \Lambda_{20}^a, \quad \lambda_{20}^i = \Lambda_{20}^i = 0,$

  en admettant que 20 ans est l'âge à partir duquel on a les valeurs des probabilités.

Cette correspondance n'implique cependant pas celle des valeurs actuelles calculées sur la base de l'un ou de l'autre modèle. Or, pour l'actuaire, ce sont avant tout les valeurs actuelles qui importent. La substitution du modèle pratique au modèle rationnel ne se justifie donc que si son influence sur les valeurs actuelles est faible. Pour étudier cette question il faut proposer une technique actuarielle pour le calcul de valeurs actuelles dans le modèle rationnel. Puis des valeurs numériques permettront des comparaisons.
Les développements qui suivent sont limités aux valeurs actuelles des rentes de retraite et d'invalidité, ainsi qu'à celle pour l'escompte des cotisations. Ils s'étendraient sans difficulté aux rentes de survivants, dont les formules de valeurs actuelles dépendent également de l'invalidité.

7.2. Valeurs actuelles dans le cas du modèle pratique

Rappelons brièvement la méthode et les formules permettant d'obtenir les valeurs numériques désirées.

Disposant des probabilités $\qquad q_x^a$, i_x et q_x^i

pour des âges x à partir de 20, par exemple,

on établit les ordres l_x, l_x^a et l_x^i

au moyen des formules (7) et (13) ainsi que de

$$l_x = l_x^a + \lambda_x^i$$

$$l_{x+1}^i = l_x^i\,(1-q_x^i)$$

et en partant, par exemple, de $l_{20}^a = 100000, \quad \lambda_{20}^i = 0$

$$l_{20}^i = 100000 \text{ ou } l_{65}^i = l_{65}.$$

Puis, avec les nombres de commutation

$$D_x = v^x\, l_x \qquad N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots$$

$$D_x^a = v^x\, l_x^a \qquad N_x^a = D_x^a + D_{x+1}^a + \ldots$$

$$D_x^i = v^x\, l_x^i \qquad N_x^i = D_x^i + D_{x+1}^i + \ldots$$

on calcule les valeurs actuelles pour la

rente reposant sur la tête d'un *vivant* d'âge x (actif ou invalide) et payable s'il est *vivant*

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad {}_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

rente reposant sur la tête d'un *actif* d'âge x et payable s'il est *actif*

$$\ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_x^a}{D_x^a} \qquad \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa} = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a} \qquad {}_{n|}\ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_{x+n}^a}{D_x^a}$$

rente reposant sur la tête d'un *invalide* d'âge x et payable s'il est *invalide*

$$\ddot{a}_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i} \qquad \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^i = \frac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i} \qquad {}_{n|}\ddot{a}_x^i = \frac{N_{x+n}^i}{D_x^i}.$$

On obtient ensuite les valeurs actuelles pour la

rente reposant sur la tête d'un *actif* d'âge x et payable s'il est *vivant* (actif ou invalide)

$$\ddot{a}_x^a = \ddot{a}_x + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a}(\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^i)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^i\right)$$

$${}_{n|}\ddot{a}_x^a = {}_{n|}\ddot{a}_x + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a}\left({}_{n|}\ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x^i\right)$$

ainsi que les valeurs actuelles pour la

rente future d'invalidité, reposant sur la tête d'un *actif* d'âge x et payable s'il est *invalide*

$$\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x^a - \ddot{a}_x^{aa}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}.$$

Désignons enfin par $\ddot{a}_x^{a+i}$ la valeur actuelle de la rente de retraite et de la rente d'invalidité de même montant. Cette valeur peut être obtenue de deux manières différentes:

$$\ddot{a}_x^{a+i} = {}_{n|}\ddot{a}_x^{aa} + \ddot{a}_x^{ai} = {}_{n|}\ddot{a}_x^a + \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ai}.$$

Le *tableau 3*, à la fin de cette étude, donne, pour des âges de 5 ans en 5 ans, des nombres de commutation calculés avec

- les données auxquelles se rapporte le tableau 2,
- les probabilités de décès q_x de la table EVK 1970 pour les âges x à partir de 65 ans, et en adoptant les conventions de la table pour ces âges[8],
- le taux d'intérêt de 4%.

Signalons que $$N_{x:\overline{65-x}|}^a = D_x^a + D_{x+1}^a + \ldots + D_{64}^a.$$

Le *tableau 4* indique des valeurs actuelles.

7.3. Valeurs actuelles dans le cas du modèle rationnel

Un actif d'âge x, si l'on envisage le modèle rationnel, peut, lorsque le temps s'écoule, passer à l'état d'invalide, puis redevenir actif et ainsi de suite. Le calcul de valeurs actuelles, dans cette situation, nécessite une technique inhabi-

[8] $i_x = 0$ et $q_x^a = q_x^i = q_x$ pour $x \geq 65$.

tuelle. Celle que nous proposons fait intervenir un changement de l'âge initial à partir duquel sont construits ordres et effectifs.

Si, comme on l'a admis précédemment, on dispose des valeurs des probabilités pour les âges dès 20 ans, et qu'on respecte les conditions pour que l'évolution du nombre des actifs et celle du nombre des invalides soient les mêmes dans les deux modèles, les valeurs actuelles, à l'âge de 20 ans, sont également les mêmes dans les deux modèles. Cela découle de ce qu'à cet âge l'effectif des invalides est nul.

Reprenant alors, pour chaque âge x, le même processus de calcul en admettant qu'à cet âge l'effectif des invalides est nul, on obtient les valeurs actuelles, pour l'âge x, dans le cas du modèle rationnel.

Désignons par x_0 l'âge initial à partir duquel, au moyen des probabilités Q_x^a, I_x, Q_x^i et R_x, on construit, dans le cas du modèle rationnel

l'effectif $\Lambda_{[x_0]x}^a$ des actifs et

l'effectif $\Lambda_{[x_0]x}^i$ des invalides

en partant de $\Lambda_{[x_0]x_0}^i = 0$.

Les valeurs obtenues correspondent à celles d'un modèle pratique dans lequel

$$q_x^a = Q_x^a$$

$$q_x^i = Q_x^i$$

$$i_{[x_0]x} = I_x - \frac{\Lambda_{[x_0]x}^i}{\Lambda_{[x_0]x}^a} R_x \frac{1 - \frac{Q_x^i}{2}}{1 - \frac{Q_x^a}{2}}$$

et l'on peut écrire

$$l_{[x_0]x}^a = \Lambda_{[x_0]x}^a \qquad \lambda_{[x_0]x}^i = \Lambda_{[x_0]x}^i.$$

Dès lors, avec la technique actuarielle traditionnelle rappelée au titre 7.2., on peut calculer des valeurs actuelles telles que

$$\ddot{a}_{[x_0]\overline{x:n}|}^{aa}$$

$$\ddot{a}_{[x_0]x}^{a+i} = {}_{n|}\ddot{a}_{[x_0]x}^{aa} + \ddot{a}_{[x_0]x}^{ai} = {}_{n|}\ddot{a}_{[x_0]x}^{a} + \ddot{a}_{[x_0]\overline{x:n}|}^{ai}.$$

Parmi ces valeurs celles pour lesquelles $x = x_0$ sont valables pour le modèle rationnel.
Il suffit donc de renouveler le procédé pour tous les âges x de manière à obtenir les valeurs actuelles du modèle rationnel:

$$\ddot{a}^{aa}_{[x]\overline{x:n|}}$$

$$\ddot{a}^{a+i}_{[x]x} = {}_{n|}\ddot{a}^{aa}_{[x]x} + \ddot{a}^{ai}_{[x]x} = {}_{n|}\ddot{a}^{a}_{[x]x} + \ddot{a}^{ai}_{[x]\overline{x:n|}}.$$

Remarquons en passant que ${}_{n|}\ddot{a}^{a}_{[x]x} = {}_{n|}\ddot{a}_{[x]x}$.

Pour illustrer les développements précédents au moyen de valeurs numériques, considérons par exemple le cas $x_0 = 40$.

Partant de $\qquad l^{a}_{[40]40} = l^{a}_{40} = 97\,901$ et $\lambda^{i}_{[40]40} = 0$

ainsi que des probabilités Q^a_x, Q^i_x, I_x, R_x à partir de $x = 40$ (tableau 1), on obtient les probabilités, ordres et effectifs du *tableau 5*.
Les ordres $l^a_{[40]x}$ et $l_{[40]x}$ (tableau 5) ainsi que les q_x pour $x \geq 65$ conduisent, pour le taux d'intérêt de 4%, aux nombres de commutation du *tableau 6*.
On obtient ensuite les valeurs actuelles du *tableau 7*. Celles de la première ligne ($x = 40$) correspondent à l'emploi du modèle rationnel.
Pour avoir les valeurs actuelles dans le cas du modèle rationnel, il suffit de répéter, pour tous les âges x_0, le procédé indiqué. Le *tableau 8* fournit quelques-unes de ces valeurs.

8. Conclusions

Les développements qui précèdent montrent que si l'on dispose de probabilités

q^a_x de décès d'actif,

q^i_x de décès d'invalide,

I_x d'invalidité,

R_x de réactivité,

on peut remplacer I_x et R_x par une probabilité i_x d'invalidité et, sur la base de q^a_x, q^i_x et i_x, construire un ordre d'actifs l^a_x et un effectif d'invalides λ^i_x (mo-

dèle pratique) qui évoluent exactement comme les nombres d'actifs et d'invalides dépendant de q_x^a, q_x^i, I_x et R_x (modèle rationnel). Cette possibilité de substitution offre en outre un moyen de calculer des valeurs actuelles dans le cas du modèle rationnel.
Pour apprécier l'influence que peut avoir, sur des valeurs actuelles, le remplacement du modèle rationnel (dans lequel interviennent I_x et R_x) par le modèle pratique (qui dépend de i_x mais pas de la réactivité), il est utile de considérer des valeurs numériques. Celles des tableaux 4 et 8 se rapportent aux rentes de retraite et d'invalidité ainsi qu'à l'escompte des cotisations (rente temporaire d'actif) et sont calculées sur des bases plausibles.

Le *tableau 9* indique les différences entre les valeurs actuelles calculées selon les deux modèles. On constate que ces différences sont petites. Pour la valeur actuelle de la rente de retraite et de la rente d'invalidité $(\ddot{a}_x^{a+i})$, la différence relative, rapportée au montant calculé pour la méthode rationnelle, n'atteint pas 0,7%. Pour la valeur actuelle des cotisations $(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa})$, la différence relative n'atteint pas 1,2%.
Le remplacement de la méthode rationnelle par la méthode pratique conduit donc à des différences de valeurs actuelles que l'on peut considérer comme minimes.

Philippe Chuard, actuaire
Professeur ordinaire
à l'Université de Lausanne
Avenue de Lavaux 93
CH-1009 Pully

Bibliographie citée

[1] *Chuard, Ph.:* La formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 76e volume, Berne 1976.
[2] *Eidgenössische Versicherungskasse:* Technische Grundlagen EVK 1970, Bern 1970.
[3] *Versicherungskasse der Stadt Zürich:* Technische Grundlagen VZ 1960, Zürich 1959.

Tableaux

1

x	$q_x^a = Q_x^a$	$q_x^i = Q_x^i$	I_x	R_x
20	0,00075	0,03000	0,00010	0,67500
25	0,00080	0,03513	0,00037	0,60000
30	0,00085	0,03950	0,00053	0,52500
35	0,00105	0,04313	0,00069	0,45000
40	0,00150	0,04600	0,00106	0,37500
45	0,00230	0,04813	0,00218	0,30000
50	0,00396	0,04950	0,00549	0,22500
55	0,00693	0,05013	0,01348	0,15000
60	0,01060	0,05024	0,03539	0,07500

2

x	i_x	l_x^a	λ_x^i	l_x	q_x	l_x^i
20	0,00010	100000	0	100000	0,00075	620941
25	0,00010	99566	46	99612	0,00082	527440
30	0,00010	99109	83	99192	0,00088	436961
35	0,00015	98599	121	98721	0,00110	354411
40	0,00035	97901	190	98091	0,00159	282506
45	0,00100	96771	388	97158	0,00251	222174
50	0,00311	94603	1025	95628	0,00452	173059
55	0,00889	90010	2812	92822	0,00843	134042
60	0,02820	80138	7838	87976	0,01465	103622
65		58507	21256	80063		80063

3

x	D_x	N_x	D_x^a	$N^a_{x:\overline{65-x}\rvert}$	D_x^i	N_x^i
20	100000,0	2248722,7	100000,0	2080899,5	620941,1	8186672,9
25	81873,6	1786412,7	81835,8	1618674,2	433517,6	5478089,4
30	67010,5	1407951,4	66954,2	1240444,9	295195,3	3605031,6
35	54816,0	1098243,4	54748,7	931039,6	196791,9	2339906,9
40	44767,7	845027,7	44680,8	678190,4	128932,2	1502120,1
45	36445,7	638448,8	36300,3	472138,7	83341,1	956090,9
50	29484,0	470614,5	29167,9	305305,7	53357,2	604478,3
55	23522,5	335457,7	22810,0	172403,5	33968,3	379896,6
60	18324,5	228513,5	16691,9	70560,8	21583,3	237057,3
65	13706,6	146316,0	10067,7		13706,6	146316,0

4

x	$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x}\rvert}$	${}_{65-x}\lvert\ddot{a}_x^{aa}$	$\ddot{a}_x^{ai}$	${}_{65-x}\lvert\ddot{a}_x^{a}$	$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}\rvert}$	$\ddot{a}_x^{a+i}$
20	20,809	1,075	0,604	1,463	0,215	1,678
25	19,780	1,313	0,731	1,788	0,256	2,044
30	18,527	1,605	0,886	2,185	0,307	2,492
35	17,006	1,963	1,076	2,672	0,368	3,039
40	15,179	2,405	1,306	3,272	0,439	3,711
45	13,006	2,961	1,575	4,024	0,512	4,536
50	10,467	3,685	1,860	4,987	0,558	5,545
55	7,558	4,712	2,087	6,280	0,519	6,799
60	4,227	6,439	1,950	8,103	0,286	8,389
65		10,675		10,675		10,675

5

x	$i_{[40]x}$	$l^a_{[40]x}$	$\lambda^i_{[40]x}$	$l_{[40]x}$	$q_{[40]x}$
40	0,00106	97901	0	97901	0,00152
45	0,00106	96617	369	96986	0,00250
50	0,00311	94440	1020	95460	0,00451
55	0,00889	89853	2806	92659	0,00843
60	0,02820	79998	7824	87822	0,01465

6

x	$D_{[40]x}$	$N_{[40]x}$	$D^a_{[40]x}$	$N^a_{[40]x:\overline{65-x}\rceil}$
40	44680,8	843526,1	44680,8	677194,2
45	36381,1	637328,9	36242,6	471329,9
50	29432,2	469790,6	29117,6	304774,3
55	23481,3	334870,7	22770,2	172102,5
60	18292,4	228113,7	16662,7	70437,6

7

x	$\ddot{a}^{aa}_{[40]x:\overline{65-x}\rceil}$	${}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{aa}_{[40]x}$	$\ddot{a}^{ai}_{[40]x}$	${}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{a}_{[40]x}$	$\ddot{a}^{ai}_{[40]x:\overline{65-x}\rceil}$	$\ddot{a}^{a+i}_{[40]x}$
40	15,156	2,401	1,322	3,269	0,454	3,723
45	13,005	2,960	1,576	4,023	0,513	4,536
50	10,467	3,684	1,860	4,987	0,558	5,545
55	7,558	4,712	2,087	6,280	0,519	6,799
60	4,227	6,439	1,950	8,103	0,286	8,389

8

x	$\ddot{a}^{aa}_{[x]x:\overline{65-x}\rceil}$	${}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{aa}_{[x]x}$	$\ddot{a}^{ai}_{[x]x}$	${}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{a}_{[x]x}$	$\ddot{a}^{ai}_{[x]x:\overline{65-x}\rceil}$	$\ddot{a}^{a+i}_{[x]x}$
20	20,809	1,075	0,604	1,463	0,215	1,678
25	19,771	1,313	0,735	1,787	0,261	2,048
30	18,514	1,604	0,894	2,184	0,315	2,498
35	16,989	1,961	1,087	2,669	0,379	3,048
40	15,156	2,401	1,322	3,269	0,454	3,723
45	12,972	2,950	1,603	4,017	0,537	4,554
50	10,407	3,655	1,922	4,972	0,605	5,577
55	7,481	4,633	2,209	6,256	0,586	6,842
60	4,184	6,308	2,104	8,086	0,327	8,412
65		10,675		10,675		10,675

9

x	$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x}\rceil} - \ddot{a}^{aa}_{[x]x:\overline{65-x}\rceil}$	${}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{aa}_{x} - {}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{aa}_{[x]x}$	$\ddot{a}^{ai}_{x} - \ddot{a}^{ai}_{[x]x}$	${}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{a}_{x} - {}_{65-x\rceil}\ddot{a}^{a}_{[x]x}$	$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}\rceil} - \ddot{a}^{ai}_{[x]x:\overline{65-x}\rceil}$	$\ddot{a}^{a+i}_{x} - \ddot{a}^{a+i}_{[x]x}$
20	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25	0,008	0,001	−0,005	0,001	−0,005	−0,004
30	0,013	0,001	−0,008	0,001	−0,008	−0,007
35	0,017	0,002	−0,011	0,002	−0,011	−0,009
40	0,022	0,004	−0,016	0,004	−0,015	−0,011
45	0,035	0,010	−0,028	0,007	−0,025	−0,018
50	0,060	0,030	−0,062	0,015	−0,047	−0,032
55	0,077	0,078	−0,121	0,024	−0,067	−0,043
60	0,044	0,130	−0,154	0,017	−0,041	−0,024
65		0,000		0,000		0,000

Calculées avec le nombre de chiffres significatifs que permet l'emploi de l'ordinateur, les valeurs des tableaux ci-dessus n'ont été arrondies que pour l'impression.
Le lecteur désirant des tableaux qui ne sont pas limités à des âges x de 5 ans en 5 ans peut les obtenir en écrivant à l'auteur.

Zusammenfassung

Der Autor beschreibt einen Zusammenhang zwischen den traditionellen aktuariellen Methode der Pensionsversicherung und einem neuen Verfahren, das die Reaktivierung von Invaliden berücksichtigt.

Résumé

L'auteur établit la liaison entre la technique actuarielle traditionnelle pour assurances de pensions et un procédé, qu'il développe, dans lequel intervient la réactivité des invalides.

Riassunto

L'autore presenta la relazione tra la tecnica attuariale tradizionale per le casse di pensione e un nuovo metodo nel quale si tiene conto anche della riattivazione degli invalidi.

Summary

The author describes the relation between the traditional actuarial method for pension-funds and a new procedure which also takes into account the rehabilitation of the disabled.