Ein einfaches Modell für das Obligatorium der beruflichen Vorsorge (Modell mit «Mini-Pool»)

Von Herbert Lüthy, Basel

1. Einleitung

1.1. Allgemeine Beschreibung des Modells

Im folgenden wird ein einfaches Modell vorgestellt, welches zur Finanzierung der Sonderkosten der Eintrittsgeneration im Obligatorium der beruflichen Vorsorge herangezogen werden könnte.
Dabei soll soweit als möglich dem Gesetzesentwurf gefolgt werden, der vom Nationalrat im Dezember 1977 in erster Lesung verabschiedet und an den Ständerat zur Behandlung überwiesen wurde (BVG-Entwurf). Das nachstehende Modell unterscheidet sich daher von diesem Entwurf nur in den Fragen der Finanzierung und der Eintrittsgeneration, alle übrigen Vorschriften könnten ohne weiteres übernommen werden.
Nach dem BVG-Entwurf werden zur Eintrittsgeneration alle erwerbstätigen Personen gezählt, welche bei Einführung des Gesetzes über 25 Jahre alt sind und ein Einkommen von mehr als Fr. 12600.– haben (heutige Werte), also überhaupt einen «koordinierten Lohn» aufweisen. Der koordinierte Lohn entspricht dem vollen (AHV-)Lohn (mit einer Obergrenze von Fr. 37800.–) abzüglich eines sog. Koordinationsabzuges von Fr. 12600.–.
Das Problem der Eintrittsgeneration besteht darin, dass nach der Bundesverfassung nicht nur die bei Beginn des Gesetzes 25jährigen oder Jüngeren in den Genuss des gesetzlichen Mindestschutzes gelangen sollen, sondern die bereits 45jährigen, bei geringeren koordinierten Löhnen sogar auch die bereits 55jährigen. Die Verfassung verlangt nämlich, dass je nach Einkommenshöhe schon 10 bis 20 Jahre nach Inkrafttreten des Gesetzes alle Versicherten der beruflichen Vorsorge die noch festzulegenden Rentenziele erreichen sollen, ungeachtet der Tatsache, dass für diese Versicherten nur eine beschränkte Zahl von Beitragsjahren zum Ansparen der notwendigen Kapitalien zur Verfügung steht. Dies führt dazu, dass für die Eintrittsgeneration höhere als die normalen Beiträge (bei Eintritt im Alter 25) zu erheben oder aber spezielle Finanzierungshilfen in irgendeiner Form zu suchen sind.

Als allgemein zu erreichendes Rentenziel wird im BVG-Entwurf eine Altersrente von etwa 40% des letzten koordinierten Lohnes genannt. Der nachstehende Vorschlag geht daher ebenfalls von dieser Zielvorstellung aus. In einer ersten Phase von etwa 20 Jahren ist es demnach in erster Linie notwendig, die Angehörigen der Eintrittsgeneration durch eine geeignete Finanzierung auf diese Rentenziele zu heben. Zunächst ist dabei von den Fällen auszugehen, in welchen noch keine Vorsorge besteht. Dies dürfte schätzungsweise für 10% bis 20% der künftig dem Obligatorium unterstehenden Personen zutreffen. Müsste nun hier das Ziel von 40% Altersrente ohne weitere Finanzierungshilfen bereits für alle bei Inkrafttreten des Gesetzes 45jährigen und Jüngeren erreicht werden, ergäben sich etwa die folgenden Beitragssätze für die Altersgruppen 25–34; 35–44; 45–54; 55–64 (Männer) bzw. 25–31; 32–41; 42–51; 52–61 (Frauen): Erste 10 Jahre: 8%, 15%, 22%, 24% des koordinierten Lohnes. Nächste 10 Jahre: 8%, 15%, 20%, 22% des koordinierten Lohnes. Im dritten Jahrzehnt könnte dann der Übergang auf die Beitragsstaffel des nationalrätlichen Entwurfs erfolgen, also auf 9%, 14%, 18%, 18%. Dabei muss darauf hingewiesen werden, dass die Beitragssätze in Prozenten der vollen AHV-Löhne im Durchschnitt nur etwa die Hälfte betragen; ferner erfolgt die Finanzierung durch Arbeitnehmer und Arbeitgeber zusammen.
Die Zahlen basieren auf folgenden Grundlagen:
Zinssatz 4%; Individuelle Entwicklung des koordinierten Lohnes gemäss BVG-Entwurf, also Verdoppelung von Alter 25 bis 45, danach konstant; ferner generelle Lohnentwicklung von 2%.
Damit für einen gewissen, relativ niedrigen Bereich der koordinierten Löhne die Rentenziele bereits für 45–55jährige erreicht werden, wie dies in der Bundesverfassung verankert ist, kann zusätzlich ein minimaler Frankenbeitrag festgesetzt werden, beispielsweise 60 bzw. 120 Franken monatlich für die beiden oberen Alterskategorien. Damit werden die verfassungsmässigen Ziele in einfacher Weise erfüllt. Auf diese speziellen Frankenbeiträge wird jedoch im folgenden nicht mehr eingegangen.
Wie bereits beim nationalrätlichen Entwurf wären auch bei diesem Vorschlag die Prozentsätze nur als effektive Beiträge zu erheben, wenn für eine bestimmte Person noch keinerlei berufliche Altersvorsorge besteht. In allen andern Fällen, also in 80–90% aller Fälle, muss nur jederzeit nachweisbar sein, dass das in der Vorsorgeeinrichtung für jeden Einzelnen zurückgelegte Kapital genügt. Dies ist dann der Fall, wenn das vorhandene Deckungskapital so hoch ist wie bei einer Vergleichskasse, die bei Beginn des Obligatoriums noch keinerlei Vorsorge aufweist und danach nach den genannten Sätzen finanziert wird.

Es kann nun dennoch vorkommen, und zwar vor allem bei Vorsorgeeinrichtungen ohne Vorfinanzierung, dass nach den genannten Beitragsstaffeln der ersten 10 bzw. 20 Jahre recht hohe Durchschnittsbelastungen entstehen. Dies wird vor allem dann eintreten, wenn eine solche Einrichtung in ihrem Aktivenbestand überwiegend ältere Personen aufweist. Dabei ist zum vorneherein zu vermuten, dass eine ins Gewicht fallende Überalterung hauptsächlich bei kleinen Vorsorgeeinrichtungen vorkommen wird, da sich bei grösseren Einrichtungen mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit ein Altersausgleich ergibt. Es sollte deshalb für solche Fälle eine zusätzliche Finanzierungshilfe auf dem Wege einer gesamtschweizerischen Solidarität vorgesehen werden. Diese Hilfe darf nun jedoch nicht davon abhängig gemacht werden, ob ein Betrieb bereits eine Vorsorgeeinrichtung aufgebaut hat oder noch nicht, da sonst die unhaltbare Situation entstehen würde, dass die Betriebe mit bereits eingeführter Altersvorsorge benachteiligt, diejenigen ohne eine solche belohnt würden. Die finanzielle Unterstützung muss daher allen Vorsorgeeinrichtungen mit ungünstiger Altersstruktur zukommen.
Zu diesem Zwecke wird die Errichtung eines Pools vorgeschlagen, welcher überall dort die Finanzierung übernimmt, wo eine Vorsorgeeinrichtung im Durchschnitt über einen bestimmten Höchstsatz hinaus finanzieren müsste. Da bei den Sätzen 8%; 15%; 22%; 24% des koordinierten Lohnes (für die ersten 10 Jahre) unter Berücksichtigung der schweizerischen Alters- und Lohnstruktur ein gesamtschweizerischer Durchschnittsbeitrag von etwa 17,25% bis 17,5% errechnet werden kann, könnte beispielsweise ein Höchstsatz für die notwendige Eigenfinanzierung einer Kasse festgelegt werden, der um etwa 1% oder 1,5% darüber liegt, also etwa 18,5% oder 19% der koordinierten Löhne. Fällt der Durchschnittsbeitrag für die Altersleistungen für eine Kasse höher aus als diese Obergrenze, dann übernimmt der Pool die Finanzierung des überschiessenden Teils.
Das Ziel der folgenden Berechnungen ist es, die Kosten eines solchen Systems bzw. die gesamtschweizerisch zu leistenden Solidaritätsbeiträge an einen solchen Pool zu bestimmen. Der generelle Beitrag an den Pool, in Promillen der koordinierten Löhne, sei im folgenden P genannt; Ziel ist also die Berechnung von P. Daneben interessiert jedoch auch, wie hoch die Gesamtzahl der Begünstigten wäre und bis zu welcher Grösse der Vorsorgeeinrichtungen solche Zuschüsse oft auftreten würden.

1.2. Das mathematische Modell

Der Beitragssatz eines zufällig aus der Gesamtheit gezogenen Versicherten kann als Zufallsvariable B bezeichnet werden. (Gesamtheit: alle dem BVG unterstellten Personen).
Die Zufallsvariable B kann die Werte

(b_1, b_2, b_3, b_4)

annehmen. Dieser Vektor wird auch «Beitragsstaffel» genannt, wobei b_i den Beitragssatz für die Altersklasse i darstellt ($i = 1,2,3,4$).
Die Verteilung der Zufallsvariablen B ist durch die Wahrscheinlichkeiten

$$p_i (i = 1,2,3,4)$$

gegeben.
Die so definierte Zufallsvariable B ist sehr ähnlich der Zufallsvariablen «Augenzahl» beim Würfel. B ist die Bezeichnung der Zufallsvariablen; b_i sind die möglichen Werte bei einem Wurf. Ein anderes, sehr ähnliches Modell ist das Ziehen von Kugeln aus einer Urne, wobei den Kugeln die Werte b_i zugeordnet werden.
Vorerst wird angenommen $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = {}^1/_4$, d.h., die 4 Altersklassen werden als gleich gross vorausgesetzt. Ebenfalls wird zunächst die individuelle Lohnentwicklung vernachlässigt; es werden alle b_i auf den gleichen koordinierten Lohn bezogen. (Die Berücksichtigung der effektiv in der Schweiz vorhandenen Alters- und Lohnstruktur wird in Ziffer 3.1. beschrieben).
Für die Zufallsvariable B können der Mittelwert (Erwartungswert) und die Varianz berechnet werden.

– Erwartungswert der Zufallsvariablen B:

$$E(B) = \sum_{i=1}^{4} p_i \, b_i = b_D.$$

b_D entspricht dem gesamtschweizerischen Durchschnittsbeitragssatz

– Varianz der Zufallsvariablen B:

$$\mathrm{Var}(B) = E\{(B - E(B))^2\} = \sigma^2.$$

Beispiel:
Bei der Beitragsstaffel (8, 15, 22, 24) ergibt sich:

$$b_D = 17{,}25; \quad \sigma^2 = 39{,}6875.$$

Im folgenden interessiert nun vor allem der Durchschnittsbeitragssatz einer Vorsorgeeinrichtung mit n Personen. Jeder Versicherte kann genau einem Beitragssatz zugeordnet werden (je nach Alter). Es ist also n mal ein Beitragssatz b_i zufällig auszuwählen und danach das arithmetische Mittel zu bilden.
Zur Verdeutlichung kann man sich die bereits erwähnten Modelle vorstellen: Ein Würfel mit den 4 möglichen Werten b_1, b_2, b_3, b_4 (also beispielsweise ein Tetraeder) wird geworfen. Die Augenzahl ist die Zufallsvariable B, bei n-maligem Werfen entsteht die Folge $B_1, B_2, ..., B_n$. Wird das arithmetische Mittel der Werte dieser Folge gebildet, entsteht die neue Zufallsvariable $B_{D,n}$.
In ähnlicher Weise kann das Urnenmodell herangezogen werden: In einer Riesenurne liegen Kugeln mit den Aufschriften b_1, b_2, b_3, b_4; von jedem b_i gleichviele. Aus dieser Urne werden nun n Kugeln gezogen. Dabei ist die Gesamtzahl der Kugeln so gross, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der Kugel b_i auch bei grossem n nicht verändert wird.
Mathematisch ausgedrückt, ergibt sich also die neue Zufallsvariable $B_{D,n}$:

$$B_{D,n} = \frac{B_1 + B_2 + ... + B_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{n}.$$

$B_{D,n}$ entspricht in unserem Modell dem Durchschnittsbeitragssatz einer Vorsorgeeinrichtung mit n Personen. Wie sich leicht zeigen lässt, hat $B_{D,n}$ den Erwartungswert b_D und die Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$.

Die Verteilungsfunktion von $B_{D,n}$ wird nachfolgend hergeleitet. Eine grafische Darstellung der entsprechenden Dichtefunktion für grössere n findet sich am Schluss des Artikels.
Das Urnenmodell liesse sich verallgemeinern, indem mehrere Urnen verwendet würden. Damit könnten unterschiedliche Alters- und Lohnstrukturen in verschiedenen Branchen berücksichtigt werden. Sollte das hier beschriebene Modell in der Praxis eingeführt werden, wären solche genaueren Untersuchungen wünschenswert. In Ziffer 3.2. wird nochmals auf diese Tatsache hingewiesen und der mögliche Fehler durch Sicherheitsmargen aufzufangen versucht.
Im weiteren werden noch folgende Bezeichnungen verwendet:

$b_D + \Delta$: Obere Belastungsgrenze, $\Delta > 0$ (Δ ist die «Spanne» über dem Durchschnittsbeitrag, welche die zumutbare Belastungsgrenze definiert. Δ ist ebenfalls in Prozenten des koordinierten Lohnes gegeben).

U_n: Anzahl der privatrechtlichen Unternehmungen in der Schweiz mit n Erwerbstätigen (inkl. Arbeitgeber), welche mehr als 30 Wochenstunden arbeiten.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} : \text{Dichte} \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt : \text{Verteilung} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{standardisierte} \\ \text{Normalverteilung}\end{array}$$

2. Grundformel zur Berechnung des Pool-Beitrags P

Die Formel wird vorerst hergeleitet ohne Berücksichtigung der Lohn- und Altersstruktur. Wie die Überlegungen unter Ziffer 3.1. zeigen, kann der allgemeine Fall der Berücksichtigung der Lohn- und Altersstruktur näherungsweise auf diese einfachere Situation zurückgeführt werden.

2.1. Äquivalenzgleichung für P

Nach Definition zahlt der Pool an eine Vorsorgeeinrichtung der Grösse n einen Zuschuss, falls

$$B_{D,n} > b_D + \Delta .$$

Die Höhe des Zuschusses beträgt

$$[B_{D,n} - (b_D + \Delta)] \cdot n .$$

Es interessiert nun einerseits die Wahrscheinlichkeit, dass an eine Vorsorgeeinrichtung der Grösse n ein Zuschuss gezahlt werden muss, also:

$$p(B_{D,n} > b_D + \Delta).$$

Andererseits ist die mittlere Grösse dieses Zuschusses pro Person entscheidend, hier $b_n{}^*$ genannt (in Prozenten des koordinierten Lohnes).

$$\text{Sei}\quad E[B_{D,n}-(b_D+\Delta)\,|\,B_{D,n} > b_D+\Delta]$$

der bedingte Erwartungswert der Grösse $B_{D,n}-(b_D+\Delta)$ unter der Bedingung, dass diese positiv ist, und ferner

$$p(B_{D,n} > b_D+\Delta)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $B_{D,n}-(b_D+\Delta)$ positiv ist, dann gilt für $b_n{}^*$:

$$b_n{}^* = E[B_{D,n}-(b_D+\Delta)\,|\,B_{D,n} > b_D+\Delta]\cdot p(B_{D,n} > b_D+\Delta).$$

Für den gesamtschweizerischen Fonds-Beitrag P gilt dann die Äquivalenzgleichung

$$\underline{\sum_n U_n\cdot n\cdot b_n{}^* = P\cdot\sum_n U_n\cdot n}\qquad \text{(Summe über alle } n\text{)}.$$

Dabei wird die Anzahl der Unternehmungen mit n Personen (U_n) der Anzahl Vorsorgeeinrichtungen mit n Personen gleichgesetzt.
Auf diese Approximation wird unter Ziffer 3.2. noch näher eingegangen.

2.2. Berechnung von $p(B_{D,n} > b_D+\Delta)$ und von $b_n{}^*$ für grosse n

Nach Definition ist $B_{D,n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{n}$

wobei B_i unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung sind (mit endlichem Mittelwert b_D und Varianz σ^2).
Damit ist die Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes gegeben und es gilt

$$p\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} B_i - n\cdot b_D}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le x_0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} F(x_0).$$

Durch Einsetzen von $B_{D,n}$ und Umformung erhält man:

$$p\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} B_i - n\cdot b_D}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le x_0\right) = p\left(B_{D,n} \le b_D+\frac{x_0\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Setzt man ferner $\frac{x_0 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \Delta$, ergibt sich

$$p(B_{D,n} \leq b_D + \Delta) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(x_0)$$

oder $p(B_{D,n} > b_D + \Delta) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - F(x_0)$, mit $x_0 = \frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$.

Damit verbleibt noch die Berechnung von $b_n{}^*$.
Setzen wir wieder

$$x_0 = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} \quad \text{und ferner} \quad x = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot (B_{D,n} - b_D),$$

dann ist $B_{D,n} - (b_D + \Delta) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(x - x_0)$,

wobei x eine Zufallsvariable mit standardisierter Normalverteilung ist.

Für $b_n{}^*$ können wir nun (nach Definition) schreiben:

$$b_n{}^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} E(x - x_0 | x > x_0) \cdot p(x > x_0) \quad \text{oder}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0) \cdot p(x | x > x_0) \cdot p(x > x_0) dx$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0) \cdot \frac{p(x, x > x_0)}{p(x > x_0)} \cdot p(x > x_0) dx$$

oder durch Darstellung der Bedingung $x > x_0$ in den Integrationsgrenzen:

$$b_n{}^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_{x_0}^{+\infty} (x - x_0) p(x) \quad dx.$$

Da x eine standardisierte Normalverteilung hat, führt dies, eingesetzt, zu

$$b_n^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0) f(x) dx$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\mathrm{I}} - \underbrace{x_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\mathrm{II}} \right\} \text{ mit}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Bigg|_{x_0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_0^2}{2}} = \underline{f(x_0)}$$

$$\mathrm{II} = x_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \underline{x_0 \left(1 - F(x_0)\right)}.$$

Damit ist

$$b_n^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left\{ f(x_0) - x_0 (1 - F(x_0)) \right\} \quad \text{oder}$$

$$(i) \quad \boxed{b_n^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot f(x_0) - \Delta (1 - F(x_0))} \quad \text{mit} \quad \underline{x_0 = \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sigma}}.$$

2.3. Konvergenzverhalten von b_n^*

Berechnungen ergeben, dass diese Formel für b_n^* bereits für $n \geq 3$ ausserordentlich gute Näherungswerte liefert.
Dies sei für die beiden Beitragsstaffeln $B_A = (8, 15, 22, 24)$ und $B_B = (8, 15, 20, 22)$ gezeigt. Die b_i sind dabei den Altersklassen 25–34, 35–44, 45–54 und 55–64 zugeordnet; ferner wird gleiche Lohnsumme pro Altersklasse angenommen.
In den Kolonnen ist jeweils links der exakte Wert, rechts der Wert nach Formel (i) eingetragen.
Der exakte Wert kann wie folgt berechnet werden:

$$b_1{}^* = \frac{1}{4}\sum_i (b_i - (b_D + \Delta)), \qquad \forall i \quad \text{mit} \quad b_i > b_D + \Delta$$

$$b_2{}^* = \frac{1}{16}\sum_{i,j}\left[\frac{b_i + b_j}{2} - (b_D + \Delta)\right] 2^k; \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall\, i,j \quad \text{mit} \quad \dfrac{b_i + b_j}{2} > b_D + \Delta \\ k = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i \neq j \\ 0 & \text{für} \quad i = j \end{cases} \end{array}\right.$$

	$b_n{}^*$ für B_A						$b_n{}^*$ für B_B					
n	$\Delta = 1$		$\Delta = 2$		$\Delta = 3$		$\Delta = 1$		$\Delta = 2$		$\Delta = 3$	
	ex.	(i)	ex.	(i)	ex.	(i)	ex.	(i)	ex.	(i)	ex.	(i)
1	2.38	2.04	1.88	1.64	1.38	1.29	1.88	1.69	1.38	1.30	0.88	0.98
2	1.38	1.32	0.97	0.95	0.69	0.66	1.13	1.07	0.72	0.73	0.44	0.47
3	1.00	1.01	0.67	0.67	0.41	0.42	0.80	0.81	0.49	0.48	0.26	0.28

Infolge dieser ausserordentlich guten Übereinstimmung bereits für sehr kleine Werte von n genügt es, $b_n{}^*$ nur für $n = 1$ und $n = 2$ exakt zu berechnen; für $n \geq 3$ kann Formel (i) angewendet werden (für Bemerkungen zur Genauigkeit vgl. Ziffer 3.2.).

2.4. Formel zur Berechnung von P (Zusammenfassung)

Zusammenfassend ergibt sich damit für P:

$$\boxed{P = \frac{\sum_n U_n \cdot n \cdot b_n{}^*}{\sum_n U_n \cdot n}}$$

mit

$$n = 1: \quad \boxed{b_1{}^* = \frac{1}{4}\sum_i [b_i - (b_D + \Delta)]} \qquad \forall i \quad \text{mit} \quad b_i > b_D + \Delta$$

$$n = 2: \quad \boxed{b_2{}^* = \frac{1}{16}\sum_{i,j}\left[\frac{b_i + b_j}{2} - (b_D + \Delta)\right] 2^k} \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall i,j \quad \text{mit} \quad \dfrac{b_i + b_j}{2} > b_D + \Delta \\ k = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i \neq j \\ 0 & \text{für} \quad i = j \end{cases} \end{array}\right.$$

$$n \geq 3 \quad \boxed{b_n{}^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot f(x_0) - \Delta(1 - F(x_0));} \qquad \underline{x_0 = \frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}.}$$

2.5. Numerische Werte für P

Rechnungsannahmen:

1. P wird für zwei mögliche Beitragsstaffeln berechnet, wie sie bereits in Ziffer 1.1. genannt sind:
   $B_A = (8, 15, 22, 24)$ (für die ersten 10 Jahre),
   $B_B = (8, 15, 20, 22)$ (für die nächsten 10 Jahre);
2. Δ wird wie folgt festgelegt:
   $\Delta_1 = 1\%, \Delta_2 = 2\%, \Delta_3 = 3\%$;
3. U_n wird nach Angaben des Eidgenössischen Statistischen Amtes festgelegt. Vgl. dazu Anhangtabelle 2.
   (Da nur für Männer gerechnet wird, ist angenommen, dass das Verhältnis der Anzahl erwerbstätiger Männer und Frauen im Durchschnitt unabhängig von der Unternehmungsgrösse sei.)

Die Werte für den Pool-Beitrag P:

Aufgrund der verwendeten Annahmen ergeben sich für P folgende Werte (ohne Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur):

B: $b_D \approx$	$(8, 15, 22, 24) = B_A$ 17.25			$(8, 15, 20, 22) = B_B$ 16.25		
Δ: $b_D + \Delta$:	1 18.25	2 19.25	3 20.25	1 17.25	2 18.25	3 19.25
$P =$	3,9‰	2,5‰	1,6‰	3,1‰	1,8‰	1,0‰

Dabei sind:

B: Beitragsstaffel (% des koordinierten Lohnes)
b_D: Gesamtschweizerischer Durchschnittsbeitrag
$b_D + \Delta$: Höchstzumutbare Belastungsgrenze einer Vorsorgeeinrichtung
P: Beitrag an den Pool in Promillen der koordinierten Löhne

Eine etwas ausführlichere Darstellung mit Zwischenwerten, welche für die Praxis von Interesse sein könnten, enthalten die beiden Anhangtabellen. Daraus ergeben sich noch einige weitere wichtige Erkenntnisse, so etwa:

- Die Gesamtzahl der Vorsorgeeinrichtungen, welche Zuschüsse des Pools erhalten, liegt in der Grössenordnung von
  100000($\Delta = 1$), 80000($\Delta = 2$), 60000($\Delta = 3$).
- Für Vorsorgeeinrichtungen mit etwa 6–10 Personen, welche einen Zuschuss erhalten, entspricht dieser Zuschuss im Durchschnitt dem Pool-Beitrag. Nettozuschüsse kommen also im gesamtschweizerischen Durchschnitt hauptsächlich bei Einrichtungen mit 1–5 Personen vor.

3. Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur der Schweiz und allgemeine Abschätzung der Genauigkeit

3.1. Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur

Zur Berechnung des gesamtschweizerischen Durchschnittsbeitrages b_D ist selbstverständlich in jedem Falle die Alters- und Lohnstruktur zu berücksichtigen.
Es stellt sich nun noch weiter die Frage nach der Höhe des Pool-Beitrages P, wenn der Einfluss der Alters- und Lohnstruktur auch hier berücksichtigt wird.
Dieses Problem ist nun kaum mehr allgemein mathematisch zu lösen, da bei der Berechnung des Durchschnittsbeitrages einer Vorsorgeeinrichtung kompliziertere Formeln entstehen, für welche der zentrale Grenzwertsatz streng genommen nicht mehr anwendbar ist.
Infolge der nur recht geringen Abweichungen durch die Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur ist allerdings von der Anschauung her gesehen klar, dass die Verteilung der Durchschnittsbeiträge für grosse Vorsorgeeinrichtungen ebenfalls der Normalverteilung nahekommen wird.
Der Nachweis, dass der effektive Pool-Beitrag recht gut dem in Ziffer 2 berechneten P entspricht, kann auf zwei verschiedene Arten (Ziffern 3.1.1. und 3.1.2.) geführt werden.

3.1.1. Zunächst sind die Alters- und Lohnstruktur der Schweiz zu definieren (nur Männer), wobei wieder nur die vier Altersklassen 25–34, 35–44, 45–54 und 55–64 zugrundegelegt werden:
Lohnstruktur G = (1,225; 1,725; 2,0; 2,0);
(Mittlere individuelle Entwicklung der koordinierten Löhne gemäss BVG-Entwurf.)
Altersstruktur L = (32; 26,5; 22,5; 19).

(Prozentanteile der erwerbstätigen Männer, gerundet nach dem Statistischen Jahrbuch der Schweiz, 1977.)
Bei der paarweisen Multiplikation und Normierung ergibt sich die Verteilung der Lohnsummen auf die vier Altersklassen (in Prozenten):

$$\frac{g_i \cdot l_i}{\sum\limits_i g_i \cdot l_i} \approx (23, 27, 27, 23).$$

Dabei zeigt sich, dass sich die Einflüsse der Alters- und Lohnstruktur gegenseitig etwa kompensieren. Durch die etwas stärkere Gewichtung der Lohnsummen der beiden mittleren Altersklassen ist sogar zu vermuten, dass die Streuung der Durchschnittsbeiträge der Vorsorgeeinrichtungen bei Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur eher noch geringer wird als bei Annahme von Gleichverteilung.

3.1.2. Die Berechnungen bei Gleichverteilung in Ziffer 2 bzw. die Werte in den Anhangtabellen 1 und 2 zeigen, dass die Kosten des hier beschriebenen Pool-Systems zu etwa $^2/_3$ oder mehr durch die sehr kleinen Einrichtungen mit $n = 1; 2$ und 3 entstehen.
Für kleine n kann nun jedoch der Erwartungswert des Pool-Zuschusses auch unter Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur exakt berechnet werden (grundsätzlich auch für grössere n, doch wird der Rechenaufwand und Formelapparat bereits ab etwa $n = 3$ unverhältnismässig gross).
Die Formeln für die exakte Berechnung sind hier für $n = 1$ und $n = 2$ angegeben, für grössere n sind sie in analoger Weise aufzustellen:

$$b_1^* = \sum_i 1_i \{b_i - (b_D + \Delta)\}, \quad \forall i \text{ mit } b_i > b_D + \Delta$$

$$b_2^* = \sum_{i,j} 2^k 1_i \cdot 1_j \left\{\frac{g_i b_i + g_j b_j}{g_i + g_j} - (b_D + \Delta)\right\}, \quad \begin{cases} \forall i,j \text{ mit } \dfrac{g_i b_i + g_j b_j}{g_i + g_j} > b_D + \Delta \\ k = \begin{cases} 1 & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j. \end{cases} \end{cases}$$

Der Vergleich zwischen der Rechnung unter Ziffer 2 (Gleichverteilung von Löhnen und Alter) mit den Werten unter Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur ergibt folgendes Bild (Rechnung für $B = 8, 15, 22, 24$):

	b_n*					
	Mit Gleichverteilung			Mit Berücksichtigung der Lohn- und Altersstruktur		
b_D	17.25			17.29		
n	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$
1	2.38	1.88	1.38	1.94	1.52	1.11
2	1.38	0.97	0.69	1.01	0.68	0.45
3	1.00	0.67	0.41	0.83	0.55	0.24

Es zeigt sich also, dass für $n = 1, 2, 3$ die Werte unter Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur um etwa 20% tiefer sind als bei Gleichverteilung. Da nun jedoch die Verteilungskurven der Durchschnittsbeiträge für wachsendes n ähnlich verlaufen müssen bei Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur wie bei Gleichverteilung, und da ferner das Hauptgewicht der Pool-Kosten bei den Vorsorgeeinrichtungen der Grösse 1, 2 und 3 liegt, kann mit genügender Genauigkeit angenommen werden, dass der Pool-Beitrag P unter Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur der Schweiz um ebenfalls etwa 20% niedriger liegen dürfte als das unter Ziffer 2 errechnete P.

3.2. Einige Bemerkungen zur Genauigkeit der Resultate

Es sind nun noch einige Überlegungen über die Genauigkeit der erhaltenen Resultate anzuschliessen. Dabei sei vorweg betont, dass es für eine eventuelle Anwendung des hier beschriebenen Modells durchaus genügt, wenn die Grössenordnung des Fonds-Beitrags P in einer Schwankungsbreite von vielleicht 20% bis sogar gegen 50% bekannt ist.

Einige Überlegungen zeigen, dass das theoretisch erhaltene P vermutlich eher zu hoch als zu niedrig sein dürfte, da bei der durchgeführten Rechnung spezielle «Sicherheitsfaktoren» eingebaut sind. Diese sind (ausser dem unter Ziffer 3.1. beschriebenen Faktor von etwa 20%):

- Verwendung der Anzahl Unternehmungen U_n, nicht der Anzahl Vorsorgeeinrichtungen. Damit wird vernachlässigt, dass sich Unternehmungen (gerade kleine Betriebe) für die Aufgabe der Personalvorsorge zusammenschliessen können, was zu einer Verminderung der Wahrscheinlichkeit führt, den Pool beanspruchen zu müssen.

- Bei der Zusammenfassung der Unternehmungen der Grösse n für mehrere n (z. B. Unternehmungen der Grösse 20–49) wurde in der Berechnung jeweils das $b_n{}^*$ am unteren Rand einer solchen Gruppe verwendet (im genannten Beispiel also $b_{20}{}^*$). Dadurch ergibt sich eine weitere Sicherheitsmarge für das Endresultat P, welche grob geschätzt bei etwa 5–10% liegen dürfte.
- In den U_n ist nur die Privatwirtschaft berücksichtigt. In die Rechnung geht also etwa die Landwirtschaft mit ihrer Vielzahl von Kleinstbetrieben ein, nicht jedoch die Unternehmungen bzw. Vorsorgeeinrichtungen öffentlichen Rechts, welche im allgemeinen recht gross sind und den Pool kaum beanspruchen müssen, wohl aber ebenfalls Fonds-Beiträge leisten würden.

Berücksichtigt man alle diese Überlegungen, dann kann man vermuten, dass das gerechnete P gegenüber dem wirklichen P eine Sicherheitsmarge von etwa 30–50% aufweist.

Anderseits ist nun jedoch die implizit zugrundeliegende Annahme der Unabhängigkeit der Altersstruktur von der Unternehmensgrösse in der Praxis wohl nur unzureichend erfüllt. Es ist denkbar, dass gerade kleinste Unternehmungen eine gewisse Überalterung aufweisen. Schätzungen dazu sind praktisch kaum möglich; es ist jedoch nicht anzunehmen, dass eine solche Ungleichverteilung die Resultate um mehr als die erwähnte Sicherheitsmarge von 30–50% übersteigt.

Zusammenfassend ergibt sich aufgrund dieser – notwendigerweise ungenauen – Abschätzungen, dass die erhaltenen Resultate vermutlich recht gute und brauchbare Schätzungen für P ergeben mit einer gewissen Sicherheitsmarge in der Grössenordnung von etwa 20%.

Dr. Herbert Lüthy
Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft
Dufourstrasse 38
4002 Basel

Anhangtabellen

Die Rechnungen erfolgen aufgrund der Formeln aus Ziffer 2.4., also ohne Berücksichtigung der Alters- und Lohnstruktur. Werden diese Strukturen berücksichtigt, ergeben sich insbesondere für kleine n niedrigere Werte (vgl. Ziffer 3.1.).

Tabelle 1

Näherungswerte zum Aufzeigen der Grössenordnungen;
Mittelwerte aus den Beitragsstaffeln (8, 15, 22, 24) und (8, 15, 20, 22)

n	$1 - F(x_0)$ (in %)			b_n^* (in %)		
	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$
1	50	50	37	2.1	1.6	1.1
2	44	31	22	1.2	0.9	0.6
3	38	27	19	0.9	0.6	0.3
4	36	25	15	0.7	0.4	0.2
5	35	22	12	0.6	0.35	0.15
6–9	33	20	10	0.5	0.27	0.12
10–19	29	14	5	0.35	0.13	0.04
20–49	22	6	1	0.17	0.03	~ 0
50–99	11	< 1	~ 0	0.04	~ 0	0
100–199	4	~ 0	0	0.01	0	0
200–499	< 1	0	0	~ 0	0	0
500–999	~ 0	0	0	0	0	0
1000 und mehr	0	0	0	0	0	0

Dabei sind: $1-F(x_0)$: Wahrscheinlichkeit einer Anspruchsberechtigung gegenüber dem Pool (in Prozenten);
b_n^*: Mittlerer Wert des Zuschusses (in Prozenten des koordinierten Lohnes).

Tabelle 2

n	$n \cdot U_n$	$n \cdot U_n \cdot b_n^*$					
		$B = 8, 15, 22, 24$			$B = 8, 15, 20, 22$		
		$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$
1	99 017	2352	1857	1361	1857	1361	866
2	149 154	2051	1447	1029	1678	1074	656
3	105 690	1067	708	444	856	518	296
4	76 504	627	383	222	497	275	138
5	61 870	427	247	130	340	173	80
6–9	160 818	965	515	241	756	354	145
10–19	207 742	810	332	125	602	208	62
20–49	279 092	558	140	20	391	56	–
50–99	212 459	127	8	2	64	4	–
100–199	220 173	44	2	–	15	–	–
200–499	241 514	5	–	–	2	–	–
500–999	138 941	–	–	–	–	–	–
1000 und mehr	347 011	–	–	–	–	–	–
Total	2 299 985	9033	5639	3574	7058	4023	2243
P (in ‰):		3,93	2,45	1,55	3,07	1,75	0,98

Dabei sind:

$n \cdot U_n$: Anzahl Erwerbstätige in Unternehmungen der Grösse n (n: Zahl der Erwerbstätigen);
$n \cdot U_n \cdot b_n^*$: Zuschuss des Pools an die Gesamtheit der Unternehmungen der Grösse n (in Vielfachen des mittleren koordinierten Lohnes, der in der Grössenordnung von etwa Fr. 18000.– liegt);
P: Gesamtschweizerischer Beitrag an den Pool (in ‰ des koordinierten Lohnes).

Anhangfigur

Grafische Darstellung der Dichtefunktion des Durchschnittsbeitrags $B_{D,n} = z$

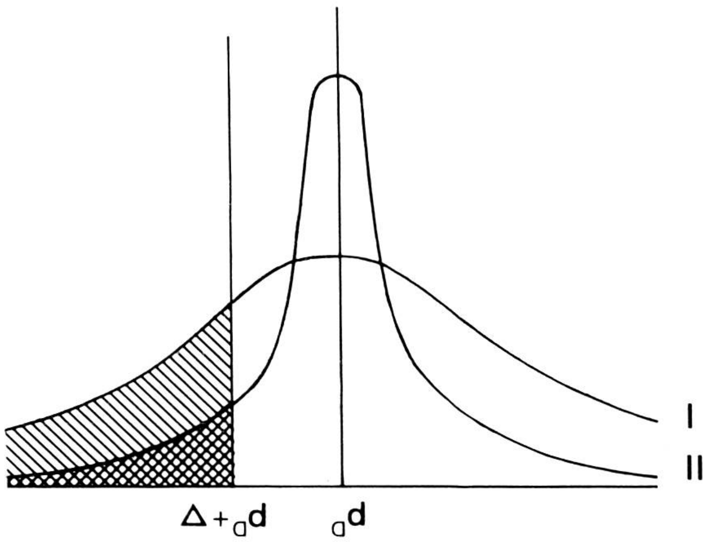
Wie in Ziffer 2 ausgeführt, ist der Durchschnittsbeitrag $B_{D,n}(= z)$ einer Vorsorgeeinrichtung für grössere n normalverteilt. Die Annäherung an diese Grenzverteilung ist bereits für $n = 3$ sehr gut.

Der Mittelwert von $B_{D,n}$ beträgt b_D; die Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$ (vgl. Ziffer 1.2.).

Die Dichtefunktion des Durchschnittsbeitrags einer Vorsorgeeinrichtung der Grösse n lautet daher:

$$f(z) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(z-b_D)^2}{2\sigma^2}} .$$

Dies ergibt Figuren von folgendem Typ (Kurve I für kleinere n, Kurve II für grössere n). Ein Pool-Zuschuss wird fällig, wenn der Durchschnittsbeitrag in die schraffierte Fläche fällt.



Zusammenfassung

Auf Grund statistischer Zahlen und Annahmen über Zins- und Volumenentwicklung wird der Solidaritätsbeitrag in Promillen der Lohnsumme abgeschätzt sowie das Ausmass, in welchem kleine und mittlere Betriebe Solidaritätsbeiträge beanspruchen könnten. Unter den gemachten Annahmen betragen Solidaritätsbeiträge höchstens 4‰, also wesentlich weniger als beim vorgeschlagenen BVG-Pool.

Résumé

Basé sur des statistiques et des suppositions sur le développement futur des intérêts et des salaires, l'auteur calcule des cotisations de solidarité en pour-milles des salaires et en plus estimé à quel degré les petites et moyennes entreprises auront besoin de cotisations de solidarité. Sous les suppositions faites la cotisation de solidarité sera de 4‰ au maximum dans les cas les plus extrêmes ce qui est toujours beaucoup moins que dans le cadre du proposé Pool LPP.

Riassunto

Sulla base di dati statistici e di supposizioni fatte sulla proiezione degli interessi e dei salari, l'autore calcola una quota di solidarietà espresso in permille del salario. Successivamente si stima in quale misuro le imprese piccole e medie avranno bisogno di tale quota di solidarietà. Secondo le supposizioni fatte risulta che in casi estremi la quota di solidarietà sarà al massimo del 4‰ cioé molto meno che nel proposto Pool LPP.

Summary

Based on statistics and assumptions on the future development of interests and salaries, so-called solidarity contributions are calculated in percent of the sum of salaries and further it is estimated to what extent small and medium sized companies will have to require solidarity contributions. Under the assumptions made in the article, solidarity contributions amount to 4‰ in the most extreme case which is still very low in comparison to the proposed BVG-pool.