Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1981)

Heft: 2

Artikel: Über einige Eigenschaften des gemischten Poissonprozesses

Autor: Albrecht, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551329

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PETER ALBRECHT, Mannheim

Über einige Eigenschaften des gemischten Poissonprozesses

1. Einführung

Der gemischte (compound, weighted, mixed) Poissonprozess (MPP) wird von verschiedenen Autoren auf unterschiedliche Weise eingeführt. Die in der Risikotheorie klassische ist die Definition von Lundberg (1964, S. 72), die sich in etwas modernerer Sprache [vgl. auch Jung/Lundberg (1969, S. 121f.)] folgendermassen formulieren lässt: «Ein MPP $\{N(t);\ t \geq 0\}$ ist ein Geburtsprozess mit Zustandsraum $I\!N_0$, für dessen Zählverteilung $P_n(t) := P(N(t) = n)$ gilt:

$$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^n}{n\,!}\,dU(\lambda), \tag{1.1}$$

wobei $U(\lambda)$ eine Verteilungsfunktion mit $U(0) = 0$ ist.»
Ein Geburtsprozess $\{N(t);\ t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $I\!N_0$ ist dabei [vgl. Müller (1975, S. 86)] ein Markovprozess, für dessen Intensitätsfunktionen $\infty > q_{mn}(t) \geq 0$ gilt

$$q_{mn}(t) = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{wenn } n > m+1 \tag{1.2}$$

$$-q_{nn}(t) = q_{nn+1}(t) \quad [=: q_n(t)] \quad \text{für alle } n \in I\!N_0. \tag{1.3}$$

Lundberg fordert also, dass ein Geburtsprozess vorliegt, dessen Zählverteilung eine gemischte Poissonverteilung ist.
Aus der von Bühlmann (1970, S. 66) vorgenommenen Definition der Mischung von stochastischen Prozessen [für eine etwas präzisere vgl. man auch Heyer (1972, S. 464)] kann man die Definition des MPP etwa folgendermassen spezialisieren:
Gegeben sei eine Klasse von Zählprozessen (d.h. stochastische Prozesse mit Parameterraum $[0, \infty]$, Zustandsraum $I\!N_0$ und isotonen, rechtsseitig stetigen Pfaden der Sprunghöhe 1) $[(\Omega, \mathfrak{A}, P_\lambda, \{N(t);\ t \geq 0\};\ \lambda > 0]$ so, dass der Zählprozess $N(t)$ unter dem W-Maß P_λ ein homogener Poissonprozess (HPP) mit Intensität λ ist [ein solcher gemeinsamer Grundraum für alle HPP lässt sich leicht konstruieren; vgl. etwa Bauer (1974, S. 388 u. 390f.) oder Heyer (1979, S. 44)].

Ist $U(\lambda)$ eine Verteilungsfunktion mit $U(0)=0$, so ist $N(t)$ unter dem durch

$$P(A)=\int_0^\infty P_\lambda(A)\,dU(\lambda) \tag{1.4}$$

festgelegten W-Mass auf $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein MPP zur mischenden Verteilung U.
In der Bühlmannschen Definition wird also nicht nur die Zählverteilung des HPP gemischt, sondern sogar über alle seine Pfade. Allerdings ist zunächst nicht klar, ob der so definierte Prozess ein Geburtsprozess ist, und in der Tat beweist Bühlmann (1970, S. 68f.), dass die Mischung von Schadenzahlprozessen, die die Markov-Eigenschaft besitzen, i.a. den Verlust derselben zur Folge hat.
Die masstheoretisch befriedigendste Einführung des MPP stellt wohl die von Grandell (1976, S. 31f.) dar, die auf dem Begriff des Zufallsmasses beruht. Sie stimmt aber inhaltlich mit der Bühlmannschen Definition überein, d.h. auch hier wird über alle Pfade des HPP gemischt.
Wir werden uns im folgenden im Interesse der Lesbarkeit das Vergnügen masstheoretischer Finessen versagen und zeigen zunächst, dass der MPP (B) ein Geburtsprozess ist und somit die MPP (B) eine Teilmenge der MPP (L) darstellen. Dies ist von Bedeutung, da unter der Annahme der Vorlage eines Geburtsprozesses Charakterisierungen des MPP getroffen werden können [vgl. etwa Lundberg (1964, S. 89)], die es erlauben, Anpassungstests durchzuführen. Auch die vor kurzem veröffentlichten Ergebnisse von Seal (1980) über die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeiten eines MPP setzen implizit die Markov-Eigenschaft voraus. Anschliessend zeigen wir, dass die Klasse der MPP (B) mit der Klasse der MPP (L) sogar identisch ist.
Gewissermassen als Korollare dieser Ableitungen ergeben sich weitere per se interessante Eigenschaften des MPP.

2. Ergebnisse

Ist $N(t)$ ein MPP (B) zur mischenden Verteilung U, so folgt mit (1.4)

$$P_0(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dU(\lambda). \tag{2.1}$$

Lemma 1:

$$P_0^{(n)}(t) := \frac{d^n}{dt^n} P_0(t) = (-1)^n \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}\, dU(\lambda) \tag{2.2}$$

$$\lim_{h\to 0} P_0(t+h) = P_0(t) \tag{2.3}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[1 - \frac{P_0^{(n)}(t+h)}{P_0^{(n)}(t)}\right] = -\frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)}. \tag{2.4}$$

Alle Aussagen des Lemmas 1 ergeben sich durch Vertauschung des Integrationsprozesses mit der Differentiation bzw. der Limesbildung. Dass dies erlaubt ist, folgert man direkt aus dem Lebesgueschen Satz von der majorisierenden Konvergenz [man vgl. etwa die entsprechenden Sätze in Richter (1966, S. 181)].

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lundbergs (1964, S. 71) Beziehung (78).

Lemma 2: Ist $\{N(t);\, t \geq 0\}$ ein MPP (B), so gilt für disjunkte Intervalle $(a_1, b_1]$ ....., $(a_n, b_n]$ aus $(0, \infty)$

$$P(N(b_1) - N(a_1) = k_1, \ldots\ldots, N(b_n) - N(a_n) = k_n) = \tag{2.5}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i\,!}\right] (-1)^{\Sigma k_i} P_0^{(\Sigma k_i)}(\Sigma(b_i - a_i)).$$

Beweis: Die Verteilung der multiplen Zuwächse eines HPP entnimmt man etwa Albrecht (1980, S. 590, (2.11)). Mit (1.4) folgt

$$P(N(b_i) - N(a_i) = k_i;\, i = 1, .., n) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda(b_i - a_i)]^{k_i}}{k_i\,!} e^{-\lambda(b_i - a_i)}\, dU(\lambda) =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i\,!}\right] \int_0^\infty \lambda^{\Sigma k_i} e^{-\lambda\, \Sigma(b_i - a_i)}\, dU(\lambda).$$

Die Behauptung folgt mit (2.2).

Folgerung 1: $P(N(t)-N(s)=n)=\frac{(t-s)^n}{n!}(-1)^n P_0^{(n)}(t-s)$

Satz 1: Jeder MPP (B) ist ein Markov-Prozess.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für alle $k \geq 2$, für alle $0=:t_0<t_1<\ldots<t_k<t_{k+1}$ und $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_{k+1}$ gilt

$$P(N(t_{k+1})=n_{k+1} \mid N(t_i)=n_i;\, i=1,..,k)=P(N(t_{k+1})=n_{k+1} \mid N(t_k)=n_k). \quad (2.6)$$

Wir definieren dazu $m_i=n_i-n_{i-1}$ $(i=1,..,k+1;\, n_0:=0)$ und mit (2.5) ist die linke Seite von (2.6) gleich

$$P(N(t_i)-N(t_{i-1})=m_i;\, i=1,..,k+1)\,/\,P(N(t_i)-N(t_{i-1})=m_i;\, i=1,..,k)=$$

$$=\prod_{i=1}^{k+1}\frac{(t_i-t_{i-1})^{m_i}}{m_i!}(-1)^n k+1\, P_0^{(n_{k+1})}(t_{k+1})\;/\;\prod_{i=1}^{k}\frac{(t_i-t_{i-1})^{m_i}}{m_i!}(-1)^{n_k} P^{(n_k)}(t_k)=$$

$$=(t_k-t_{k+1})^{m_{k+1}} P_0^{(n_{k+1})}(t_{k+1})\;/\;m_{k+1}!\, P_0^{(n_k)}(t_k).$$

Ebenso zeigt man, dass die rechte Seite von (2.6) identisch mit diesem letzten Ausdruck ist.
Wir berechnen nun die Übergangsfunktionen und Intensitätsfunktionen dieses Markov-Prozesses.

Satz 2:

$$P_{mn}(s,t):=P(N(t)=n \mid N(s)=m)=$$

$$=(s-t)^{n-m} P_0^{(n)}(t)\,/\,(n-m)!\, P_0^{(m)}(s) \text{ für } m \leq n,\, s<t. \quad (2.7)$$

Beweis wie bei Satz 1.

Bemerkung 1: Wegen (1.1) ist (2.7) gleich $\binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m}\frac{P_n(t)}{P_m(s)}$.

Dies wurde auch von Lundberg (1964, S. 85, (94)) für die MPP (L) gezeigt.
Mit

$$q_{mn}(t):=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P_{mn}(t,t+h)\;(m \neq n) \quad (2.8)$$

und

$$-q_{mm}(t):=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-P_{mm}(t,t+h)) \quad (2.9)$$

[vgl. Müller (1975, S. 149)] folgt

Satz 3: Die Intensitätsfunktionen des MPP (B) ergeben sich zu

$$q_{m\,m+1}(t) = -P_0^{(m+1)}(t) \,/\, P_0^{(m)}(t) = -q_{mm}(t),\ m \geq 0 \tag{2.10}$$

$$q_{mn}(t) = 0,\ n > m+1. \tag{2.11}$$

Beweis: Einsetzen von (2.7) in (2.8) bzw. (2.9) und Vornahme des Grenzübergangs unter Beachtung von (2.3) und (2.4).

Wir haben somit gezeigt:

Satz 4: Jeder MPP (B) ist ein Geburtsprozess und, da für ihn auch (1.1) gilt, damit ein MPP (L).

Offenbar folgen die bisherigen Ergebnisse allein auf Grund der Beziehung (2.5), und es stellt sich die Frage, ob und wie (2.5) eine den MPP (B) charakterisierende Eigenschaft sein könnte.
Wir knüpfen dazu an eine von Lundberg (1964, S. 73, Theorem 6) gegebene Charakterisierung an, setzen aber wiederum nicht voraus, dass der zugrunde liegende Prozess ein Geburtsprozess ist, sondern nur, dass er ein Zählprozess ist.

Satz 5: Jeder Zählprozess $\{N(t);\ t \geq 0\}$, für den gilt

$$\begin{aligned} &P(N(b_i) - N(a_i) = k_i;\ i = 1, \ldots, n) = \\ &= (-1)^{\Sigma k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i\,!}\, H^{(\Sigma k_i)}\,(\Sigma(b_i - a_i)) \end{aligned} \tag{2.12}$$

für alle $n \geq 1$, $(k_1, \ldots, k_n) \in I\!N_0^n$ und disjunkte Intervalle $(a_i, b_i] \subseteq (0, \infty)$, wobei gelte

$H(t)$ ist eine vollständig monotone Funktion, i.e.

$$(-t)^n\, H^{(n)}(t) \geq 0 \text{ für alle } n \in I\!N_0,\ t > 0 \tag{2.13}$$

$$\lim_{h \to 0} H(t) = 1 \tag{2.14}$$

ist ein MPP (B).

Beweisskizze: Wie im Beweis von Lundberg (1964, S. 73/74) folgt aus (2.13), (2.14), dass es eine Verteilungsfunktion $G(\lambda)$ mit $G(0) = 0$ gibt, so dass

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dG(\lambda). \tag{2.15}$$

Die zu G gehörige Zufallsvariable sei mit Y bezeichnet. Wir legen nun $N(t)$ ein neues W-Mass P_{λ_0} $(\lambda_0 > 0)$ zugrunde, das durch die Forderungen

$$P_{\lambda_0}(N(b_i) - N(a_i) = k_i;\ i = 1, .., n) = P(N(b_i) - N(a_i) = k_i;\ i = 1, .., n \mid Y = \lambda_0) \tag{2.16}$$

bestimmt sei [durch (2.16) sind die endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses $N(t)$ bestimmt und damit P_{λ_0}. Wir verzichten hier darauf, die Konsistenzbedingungen des Satzes von Kolmogorov (vgl. etwa Bauer (1974, S. 347)) nachzurechnen]. Aus (2.15) und (2.12) folgt $P(N(b_i) - N(a_i) = k_i;\ i = 1, \ldots, n) =$

$$= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!} \lambda^{\Sigma k_i} e^{-\lambda(\Sigma(b_i - a_i))}\, dG(\lambda) \tag{2.17}$$

und somit aus (2.16) $P_{\lambda_0}(N(b_i) - N(a_i) = k_i;\ i = 1, .., n) =$

$$= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!} \lambda^{\Sigma k_i} e^{-\lambda(\Sigma(b_i - a_i))}\, dG(\lambda \mid Y = \lambda_0) =$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!} \lambda_0^{\Sigma k_i} e^{-\lambda_0(\Sigma(b_i - a_i))}.$$

Unter P_{λ_0} besitzt der Zählprozess $N(t)$ also unabhängige Zuwächse und ist somit durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der (eindimensionalen) Zuwächse eindeutig bestimmt, diese sind Poisson-verteilt und somit ist $N(t)$ unter P_{λ_0} ein homogener Poissonprozess [vgl. Doob (1953, Kapitel II, § 9, S. 96–98) oder Störmer (1970, S. 67, Satz 1)]. Das W-Mass P ergibt sich wiederum durch Mischung der W-Masse P_{λ_0} mittels der Verteilung $G(\lambda)$ und $N(t)$ ist somit ein MPP (B).

Durch diese Charakterisierung sind wir nun auch in der Lage zu zeigen, dass jeder MPP (L) ein MPP (B) ist, d.h. beide Definitionen in der Tat äquivalent sind.

Dazu genügt es, zu zeigen, dass ein Geburtsprozess mit (1.1) die Form (2.12) mit $H(t) := P_0(t)$ für die Verteilung der multiplen Zuwächse besitzt. Wir zeigen dies hier zur Verminderung der Schreibarbeit und Herausarbeitung der grundlegenden Ideen nur für den Fall $n = 2$ (der allgemeine Fall lässt sich voll-

kommen analog zeigen) und benutzen die Beziehung (2.7), die nach Bemerkung 1 auch für die MPP (L) gilt. Es gilt (o.B.d.A. $b_0 := 0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2$)

$$P(N(b_i)-N(a_i)=k_i;\, i=1,2) = \sum_{r_1, r_2 = 0}^{\infty} P(N(b_i)-N(a_i)=k_i,\, N(a_i)-N(b_{i-1}) = = r_i;\, i=1,2)$$

$$= \sum P(N(a_1)=r_1, N(b_1)=r_1+k_1, N(a_2)=r_1+r_2+k_1, N(b_2)=r_1+r_2+k_1+k_2) =$$

$$= \sum \left[P(N(a_1)=r_1) P(N(b_1)=r_1+k_1 \mid N(a_1)=r_1) \times \ldots \times P(N(b_2)=r_1+r_2+k_1+k_2 \mid N(a_1)=r_1, \ldots, N(a_2)=r_1+r_2+k_1)\right]$$

$$= \sum \left[P_{r_1}(a_1) P_{r_1 r_1+k_1}(a_1, b_1) P_{r_1+k_1 r_1+r_2+k_1}(b_1, a_2) \times P_{r_1+r_2+k_1\, r_1+r_2+k_1+k_2}(a_2, b_2)\right]$$

$$= \sum \left[\frac{(-a_1)^{r_1}}{r_1!} P_0^{(r_1)}(a_1) \frac{[-(b_1-a_1)]^{k_1}}{k_1!} \frac{P_0^{(r_1+k_1)}(b_1)}{P_0^{(r_1)}(a_1)} \times \ldots\ldots \times \frac{[-(b_2-a_2)]^{k_2}}{k_2!} \frac{P_0^{(r_1+r_2+k_1+k_2)}(b_2)}{P_0^{(r_1+r_2+k_1)}(a_2)}\right] =$$

$$= \frac{[-(b_1-a_1)]^{k_1}}{k_1!} \frac{[-(b_2-a_2)]^{k_2}}{k_2!} \sum_{r_1, r_2 = 0}^{\infty} \frac{(-a_1)^{r_1}}{r_1!} \frac{[-(a_2-b_1)]^{r_2}}{r_2!} P_0^{(r_1+r_2+k_1+k_2)}(b_2)$$

$$= \frac{[-(b_1-a_1)]^{k_1}}{k_1!} \frac{[-(b_2-a_2)]^{k_2}}{k_2!} \int_0^{\infty} \sum_{r_1, r_2 = 0}^{\infty} \frac{(-a_1)^{r_1}}{r_1!} \frac{[-(a_2-b_1)]^{r_2}}{r_2!} (-\lambda)^{r_1+r_2+k_1+k_2} e^{-\lambda b_2}\, dU(\lambda)$$

$$= \frac{[-(b_1-a_1)]^{k_1}}{k_1!} \frac{[-(b_2-a_2)]^{k_2}}{k_2!} \int_0^{\infty} (-\lambda)^{k_1+k_2} e^{-\lambda \Sigma(b_i-a_i)}\, dU(\lambda) =$$

$$= \frac{[-(b_1-a_1)]^{k_1}}{k_1!} \frac{[-(b_2-a_2)]^{k_2}}{k_2!} P_0^{(k_1+k_2)}(\Sigma(b_i-a_i)) \quad \text{q.e.d.}$$

Es gilt somit

Satz 6: Die Klassen der MPP (B) und MPP (L) sind identisch.

Damit ist das eigentliche Ziel der Arbeit erreicht. Aus den formulierten Ergebnissen lassen sich jedoch noch einige weitere interessante Folgerungen

ziehen. Wir werden angesichts des Satzes 6 künftig dabei nur noch von dem MPP sprechen.
Aus Folgerung 1 folgt direkt

Satz 7: Der MPP ist ein Prozess mit stationären Zuwächsen.

Bemerkung 2: Dies ist eine sehr interessante Feststellung, denn wir haben damit ein Beispiel dafür gefunden, dass es Markov-Prozesse gibt, die zwar stationäre Zuwächse besitzen, aber keine stationären Markov-Prozesse sind (die Intensität des MPP hängt wegen (2.10) ja von t ab!). Beim inhomogenen Poissonprozess (IPP) dagegen folgt aus dem Vorhandensein stationärer Zuwächse das Vorliegen eines HPP, d.h. eines stationären Markov-Prozesses. Satz 7 hat somit folgende wichtige Konsequenz:

Satz 8: Schneidet man die Klasse der MPP mit der Klasse der IPP, so ergibt sich gerade die Klasse der HPP.

Bemerkung 3: Geht man nicht vom Heterogenitätsmodell aus, sondern interpretiert die Abhängigkeit der Intensitätsfunktion von n als einen Ansteckungseffekt, so kann man dies auch so ausdrücken: Innerhalb der Klasse der MPP gibt es – ausser den HPP – keine Ansteckungsprozesse, die stationäre Markov-Prozesse sind.

Bemerkung 4: Anders gesagt: Es gibt – ausser den HPP – keine MPP, deren Intensität $q_n(t)$ *nicht* von n abhängt. Denn gilt $q_n(t) = q(t)$ für einen MPP, so liegt ein IPP vor und somit nach Satz 8 ein HPP.

Satz 7 kann leicht verallgemeinert werden zu der Feststellung:

Satz 9: Der MPP ist ein stationärer Punktprozess.

Beweis: Zu zeigen ist $P(N(t_i) - N(t_{i-1}) = n_i;\ i = 1, \ldots, k) =$
$P(N(t_i + h) - N(t_{i-1} + h) = n_i;\ i = 1, .., k)$ für alle $h > 0$, $k \geq 1$ und $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$.

Nach (2.5) sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{(t_i - t_{i-1})^{n_i}}{n_i\,!}\, P_0^{(\Sigma n_i)}(t_k - t_0).$$

Bemerkung 5: In Umkehrung von Bemerkung 4 kann man sich fragen, ob es ausser dem HPP einen MPP gibt, dessen Intensität nicht von t abhängt. Dass es solche nicht gibt, lässt sich folgendermassen zeigen:

Ist $U(\lambda)$ die mischende Verteilung des MPP, so ist $G_U(t) = \int_0^\infty e^{i\lambda t}\, dU(\lambda)$ ihre charakteristische Funktion, und aus (2.1) folgt der Zusammenhang

$$G_U(t) = P_0(-it). \tag{2.18}$$

Gilt nun für die Intensitätsfunktion des MPP, dass $q_n(t) = q_n$ für alle $n \in IN_0$, so folgt aus der Beziehung

$$\log P_0(t) = -\int_0^t q_0(s)\, ds \quad \text{[vgl. Lundberg (1964, S. 85)]},$$

dass $P_0(t) = \exp(-q_0 t)$ ist, somit $G_U(t) = \exp(iq_0 t)$, und dies ist genau die charakteristische Funktion einer Einpunktverteilung mit Sprung in q_0. Der zugehörige MPP ist also gerade ein HPP mit Intensität q_0.

Bemerkung 6: Aus der Ableitung unter Bem. 5 ergibt sich, dass das Vorliegen eines HPP schon aus der Bedingung $q_0(t) = q_0$ folgt. Diese Bedingung ist damit für einen MPP in der Tat äquivalent zu der Bedingung $q_n(t) = q_n$ für alle $n \in IN_0$.

Dr. Peter Albrecht
Institut für Versicherungswissenschaft
Universität Mannheim, Postfach 4
D-68 Mannheim, Schloss

Literaturverzeichnis

Albrecht, P. (1980): Statistische Analyse des homogenen und des inhomogenen Poissonprozesses. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. XIV, 585–610.

Bauer, H. (1974): Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie, 2. Aufl. De Gruyter; Berlin, New York.

Bühlmann, H. (1970): Mathematical methods in risk theory. Springer; Berlin, Heidelberg, New York.

Doob, J.L. (1953): Stochastic processes. Wiley; New York, London, Sydney.

Grandell, J. (1976): Doubly stochastic Poisson processes. Lecture Notes in Mathematics, Bd. 529. Springer; Berlin, Heidelberg, New York.

Heyer, H. (1972): Masstheoretische Ergänzungen zur Risikotheorie. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. X, 451–466.

Heyer, H. (1979): Einführung in die Theorie Markoffscher Prozesse. Bibliographisches Institut; Mannheim, Wien, Zürich.

Jung, J. und *Lundberg, O.* (1969): Risk processes connected with the compound Poisson process. Skandinavisk Aktuarietidskrift *52*, Suppl., 118–131.

Lundberg, O. (1964): On random processes and their application to sickness and accident statistics, 2. Aufl. Almquist & Wiksell; Uppsala.

Müller, P.H. (Hrsg.) (1975): Lexikon der Stochastik, 2. Aufl. Akademie Verlag; Berlin.

Richter, H. (1966): Wahrscheinlichkeitstheorie, 2. Aufl. Springer; Berlin, Heidelberg, New York.

Seal, H.L. (1980): Ruin probabilities for mixed Poisson claim numbers without Laplace transforms. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker *80*, 297–305.

Störmer, H. (1970): Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit. Oldenbourg; München.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass die Definitionen des gemischten Poissonprozesses von Bühlmann und von Lundberg äquivalent sind. Insbesondere ist der gemischte Poissonprozess ein Geburtsprozess. Weitere interessante Eigenschaften des gemischten Poissonprozesses werden gezeigt.

Résumé

L'auteur montre que les définitions selon Bühlmann et selon Lundberg du processus de Poisson pondéré sont équivalentes. En particulier, le processus de Poisson pondéré est un processus de naissances. L'article développe encore certaines propriétés intéressantes du processus de Poisson pondéré.

Summary

It is shown that Bühlmann's and Lundberg's definition of the mixed Poisson process are equivalent. Especially the mixed Poisson process is a birth process. Additional interesting properties of the mixed Poisson process are shown.