

# Das mathematische Werk von Jost Bürgi (1552-1632)

Autor(en): **Loeffel, Hans**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): - **(1982)**

Heft 1

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966976>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

HANS LOEFFEL, St. Gallen

### Das mathematische Werk von Jost Bürgi (1552–1632)<sup>1</sup>

#### Einleitung

Aus Anlass des 350. Todestages von Jost Bürgi (31. Januar 1632) soll das wissenschaftliche Werk des unbekannteren Toggenburgers gewürdigt werden. Wir legen das Schwergewicht auf sein *mathematisches Schaffen*, obschon sich Bürgi primär als Uhrmacher und Instrumentenbauer verstanden hat.

Bis vor wenigen Jahren nahm das logarithmische Rechnen im gymnasialen Unterricht einen relativ breiten Platz ein. Auf der Titelseite der ehemaligen Logarithmentafel ist das einzig bekannte Porträt von Bürgi (Bild 1) abgebildet, der als erster in der Geschichte der Mathematik die Logarithmen systematisch als Rechenhilfe eingesetzt hat.



Bild 1

*Jost bürgi Uhrmacher*

<sup>1</sup> Für die allgemeinen Anregungen, die zu diesem Aufsatz geführt haben, sowie die Bereitstellung von schwer zugänglicher Literatur möchte ich an dieser Stelle Herrn Joseph Fremersdorf aus Luzern bestens danken.

Weit weniger bekannt, aber für unsere Zeit eher bedeutungsvoller, ist das übrige mathematische Schaffen von Bürgi, das sich insbesondere in einer äusserst geschickten Verwendung neuartiger *numerischer Verfahren* manifestiert.

Im heutigen Zeitalter des komfortablen Taschencomputers können wir mit einem einzigen Tastendruck Logarithmen hervorzaubern oder mit wenigen einfachen Manipulationen komplizierte Gleichungen zuverlässig lösen.

Doch es gilt zu bedenken, dass in vergangenen Jahrhunderten namhafte Forscher mit genialer Erfindungsgabe und ungeheurem Arbeitsaufwand jene Vorarbeit geleistet haben, ohne die der gegenwärtige Wissensstand undenkbar wäre.

### **Zur Biographie**

Jost Bürgi wurde am 28. Februar 1552 im kleinen, ca. 400 Einwohner zählenden, unter fürststädtischer Hoheit stehenden Landstädtchen Lichtensteig (heute Kt. St. Gallen) geboren. Er wuchs am sog. Untertor auf und unter seinen Vorfahren findet man Weibel, Schreiber und Schultheissen.

Die konfessionelle Spaltung der Bürgerschaft (Bürgi gehörte zum protestantischen Zweig) war, neben prekären Schulverhältnissen, mit verantwortlich dafür, dass Jost schon in jungen Jahren seine Heimat für immer verlassen hatte. Vermutlich zog er als Uhrmachergeselle von Stadt zu Stadt und dürfte vor allem in Strassburg Station gemacht haben, wo dannzumal die berühmte zweite astronomische Uhr gebaut wurde. Beim Frauenfelder Mathematiker Konrad Dasypodius wird Bürgi seine ersten mathematischen Kenntnisse erworben haben.

Eine erste schriftliche Kunde vom Jahre 1579 bezeugt, dass Bürgi als Hofuhrmacher und Instrumentenbauer im Dienste des Landgrafen und Liebhaberastronomen Wilhelm IV von Hessen stand. Im Vertrag steht u. a. zu lesen:

«dass ehr unser auermacher und diener unser auerwerk klein und gross allesamt in gang erhalten, anrichten und keineswegs in abgang kommen lassen».

Um dieselbe Zeit wirkte auf der Insel Hven vor Kopenhagen der berühmte beobachtende Astronom *Tycho Brahe* (1546–1601), der später auch in Prag wirkte und nach seinem Tod durch *Johannes Kepler* (1571–1630) abgelöst wurde.

Nach 25-jähriger Tätigkeit in Kassel wurde Bürgi von *Kaiser Rudolf II* nach Prag berufen, wo er bald zum geschätzten Mitarbeiter von Kepler, einem der Baumeister des Kopernikanischen Weltsystems, wurde. Kepler bezeugt an

verschiedenen Stellen die ausserordentlichen praktischen und theoretischen Fähigkeiten des

«kaiserlichen Hofuhrmachers, der, obschon bar jeglicher Sprachkenntnisse, gleichwohl im Wissen und Denken über Mathematik viele Professoren dieses Faches übertrifft».

Bürgi war zweimal verheiratet, doch blieben beide Ehen kinderlos. Er brachte es zu Wohlstand und Ansehen, blieb aber stets der bescheidene Uhrmacher und stille Wissenschaftler im Schatten der Grossen. Er starb im hohen Alter von 80 Jahren am 31. Januar 1632. Im Totenbuch der Martinskirche zu Kassel (wohin er kurz vor seinem Tode zurückgekehrt war) steht zu lesen:

«Anno domini 1632. Jost Bürgi von Liechsteig aus Schweitz, seiner Kunst ein Uhrmacher, aber der Erfahrung ein berühmter (am kaiserlichen hoff und fürstlichen höffen) astronom und göttselig mann, aetatis 81 anno».

### Die Situation der Mathematik um 1600

Im 16. Jahrhundert begann sich in Westeuropa die Mathematik, zuerst unabhängig und später immer mehr im Dienste der Astronomie, Feldmesskunst, Perspektiv- und Visierlehre sowie im Kalenderwesen intensiv zu entfalten.

Entscheidende Vorarbeit leistete im deutschen Raum *Regiomontanus* (1436–1476), der führende Mathematiker seiner Epoche. Er übersetzte die grossen antiken Meister *Archimedes* (ca. 287–212 v. Chr.) und *Euklid* (ca. 300 v. Chr.) ins Lateinische und baute die Trigonometrie nach dem *Almagest* des griechischen Astronomen *Ptolemäus* (ca. 85–165) aus.

Mathematiker der italienischen Schule suchten eine geschlossene, formelmässige Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades. Zu nennen sind vor allem Niccolo Fontano (1500–1557), auch *Tartaglia* genannt, und das Universalgenie Geronimo *Cardano* (1501–1576), der in seiner «*Ars magna*» bereits komplexe Lösungen anerkannte.

Von besonderer Tragweite erwiesen sich die Arbeiten des Juristen François Viète oder *Vieta* (1540–1603), des «Stammvaters» der modernen Buchstabenrechnung. Durch ihn fand neben der Geometrie auch die Algebra als neuer Zweig der Mathematik zusehends Beachtung und Anerkennung. Neben wertvollen Beiträgen zur Trigonometrie (Sinustafel) ragt sein Hauptwerk «*In artem analyticem Isagoge*» oder auf deutsch «*Einleitung in die analytische Kunst*» hervor, in dem bereits numerische Näherungsverfahren behandelt werden. Die Schreibweise von Vieta war noch relativ kompliziert und für unsere Begriffe auch schwerfällig, wie folgendes Beispiel zeigt:

Die Gleichung  $3Ex^2 - E^3 = Bx^2$  schreibt Vieta in der Form

$$Xq \text{ in } E3 - Ec \text{ aequetur } Xq \text{ in } B.$$

Da Bürgi weder Griechisch noch Lateinisch beherrschte, war er wohl besonders auf die Publikationen der sog. *Cossisten* aus dem deutschen Raum angewiesen. Das sind die Vertreter der sog. *Coss*, einer Frühform der heutigen Algebra, mit einer noch recht schwerfälligen Symbolik. Der Name *Coss* geht zurück auf das italienische Wort *Cosa*, was soviel wie Unbekannte bedeutet. Der hervorragendste Repräsentant des «Cossischen Zeitalters» ist der Augustinermönch und spätere Lutherische Wanderprediger Michael *Stifel* (ca. 1487–1567). Im dritten Buch seiner «*Arithmetica integra*» vom Jahre 1544 werden erstmals Potenzen mit negativen Exponenten eingeführt und das Prinzip des logarithmischen Rechnens wird klar erkannt und formuliert. Im weiteren werden behandelt das Bruchrechnen, die Regeldetri, die *Regula falsi*, sowie die Gleichungslehre und die Fass- und Visierlehre.

Gegen Ende des 16. Jahrhunderts setzte sich auch in Europa die von den Arabern überlieferte und schon bei Regiomontanus vorhandene *Dezimalschreibweise* allmählich durch. Neben Simon *Stevin* (1548–1620), einem holländischen Kriegingenieur, machte sich vor allem auch *Bürgi* für die systematische Verwendung von Dezimalbrüchen verdient.

Die umfangreichen numerischen Auswertungen des gewaltigen astronomischen Datenmaterials konnten ohne Hilfe von *vereinfachenden Rechenmethoden* kaum bewältigt werden. So entwickelte um 1580 der Mathematiker Paul *Wittich* (Mitarbeiter von Tycho Brahe) ein neues Rechenverfahren, die sog. *Prosthaphaerese*, die Bürgi später in Kassel kennenlernte und weiter entwickelte. Der Grundgedanke besteht darin (ähnlich wie beim logarithmischen Rechnen), dass man z. B. eine Multiplikation auf die nächst einfachere Operation der Addition reduziert.

Dies geschieht mit Hilfe folgender, schon um das Jahr 1000 herum bekannten goniometrischen Formel

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]. \quad (*)$$

Ihre Verwendung erfordert möglichst genaue Sinustafeln.

*Zahlenbeispiel:* Gesucht ist  $A \cdot B$  mit

$$A = 50.8791 \quad \text{und} \quad B = 207.343$$

$$A \cdot B = 10^n a \cdot b \quad \text{mit} \quad n = 5 \quad \text{und} \quad a = 0.508791 = \sin \alpha \\ b = 0.207343 = \sin \beta$$

Aus einer Sinustafel entnimmt man

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 30^\circ 35' \\ \beta = 11^\circ 58' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha - \beta = 18^\circ 37' \\ \alpha + \beta = 42^\circ 33' \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = 0.947676 \\ \cos(\alpha + \beta) = 0.736687 \end{array}$$

Somit folgt nach (\*)

$$\sin \alpha \sin \beta = 0.105494 = a \cdot b = 10^{-5} \cdot AB$$

oder

$$A \cdot B = 10\,549.4 \quad (\text{genauer Wert } 10\,549.425)$$

### Die «Coss von Bürgi» und der Canon Sinuum

Die Berechnung möglichst exakter Sinustabellen war für Bürgi ein besonders dringendes Anliegen, vor allem im Hinblick auf einen wirksamen Einsatz der Prosthaphaerese. Vermutlich in der Zeitspanne von 1595–1598 erstellte Bürgi mit gewaltigem Arbeitsaufwand seinen *Canon Sinuum* (Sinustafel), der alle Sinuswerte für zwei zu zwei Bogensekunden fortschreitende Winkel und auf acht Stellen nach dem Komma genau angibt.

Der Canon Sinuum selber ist nie gedruckt worden, noch ist ein Manuskript vorhanden. Glücklicherweise ist uns aber eine *Einführung* zu diesem Werk erhalten geblieben, die wir im folgenden als «*Coss von Bürgi*» bezeichnen. Sie wurde allerdings fast ausschließlich von Johannes Kepler redigiert und ist in Band 5 der Pulkowoer Kepler-Handschriften enthalten.

Einen ausgezeichneten Kommentar des genannten Manuskripts mit Faksimiles der Handschriften von Kepler und Bürgi findet man in [2]. Der frühere Professor für Astronomie an der ETH Zürich, R. Wolf, hat die Coss von Bürgi auch studiert und berichtet darüber in [4].

In der Einleitung zur Coss meint Bürgi:

«Und weil mir auss mangel der Sprachen die thür zu den authoribus nit allzeit offen gestanden, wie anderen, hab ich etwas mehr, als etwa die gehrte und belesene, meinen eigenen gedanckhen nachhängen und neue Wege suchen müssen».

In der Tat, Bürgi hat als Pionier auf vielen Gebieten der theoretischen und praktischen Mathematik gewirkt.

In der Anleitung zum Gebrauch der Coss oder Algebra zeigt Bürgi den systematischen Gebrauch der *Dezimalschreibweise*, die damals noch wenig bekannt war. Kepler bezeugt in seinem «Auszug aus der uralten Messekunst Archimedis», dass er von Bürgi das Verfahren der *abgekürzten Multiplikation*

gelernt habe. Dieses soll am Beispiel der Multiplikation  $0.1234 \times 1.2358$  (mit einer Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma) vorgeführt werden.

$$\begin{array}{r}
 0.1234 \\
 1.2358 \\
 \hline
 0\ 1234 \\
 0246\ 8 \\
 037\ 0 \\
 06\ 0 \\
 0\ 9 \\
 \hline
 0.1525
 \end{array}$$

Besondere Erfindungskraft und technisches Können entfaltete Bürgi bei der Berechnung der Sinuswerte<sup>2</sup>. Die althergebrachten, rein geometrisch orientierten Methoden genügten den Genauigkeitsansprüchen von Bürgi nicht. Erstere basierten im wesentlichen auf der Untersuchung von regelmässigen 3, 4, 5, 6 oder 15-Ecken sowie der Halbierung von Winkeln,

«was dann vil quadrierens und wurtzelsuechens gibt».

Insbesondere war das Problem der *beliebigen Winkelteilung* nur mit Hilfe der Coss zu bewältigen. Bürgi ist somit – vergleichbar mit Descartes – zum Begründer *algebraischer Methoden in der Geometrie* geworden.

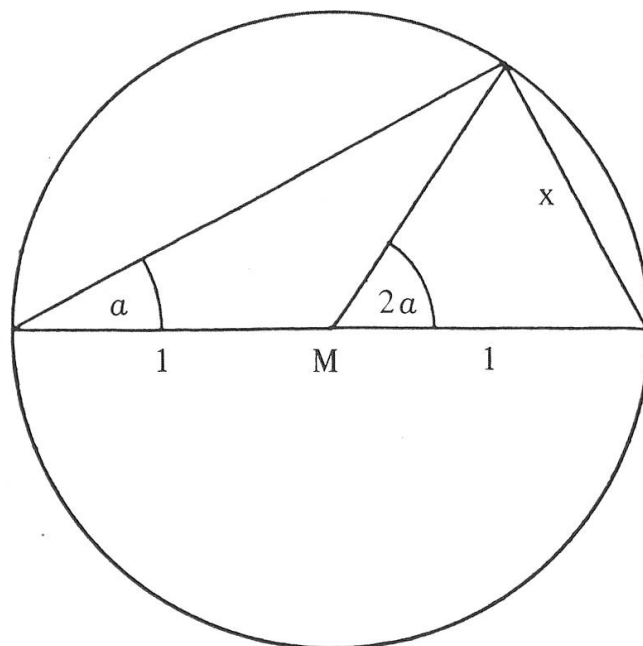
Wie hat nun Bürgi seinen Canon Sinuum berechnet? Angelpunkt des ganzen Unternehmens ist die Tatsache, dass sich Sinuswerte mittels Sehnen darstellen lassen. Bürgi setzt (im Gegensatz zu seinen Zeitgenossen) den Kreisradius gleich 1 und bemerkt, dass der *Sinus eines Winkels gleich der halben Sehne des doppelten Winkels* ist.

$$\sin \alpha = \frac{x}{2} \quad (1)$$

Da 2" der kleinste Winkel ist, genügt es, die Sehne für den Bogen (Winkel) 4" zu bestimmen. Dies geschieht durch fortlaufende Teilung des Halbkreises (180°) in 2, 3 oder 5 gleiche Teile, was zu folgender Reihe führt:

$$180^\circ, 60^\circ, 30^\circ, 10^\circ, 2^\circ, 1^\circ, 12', 4', 2', 1', 12'', 4'', 2''$$

<sup>2</sup> Heute präsentieren uns die kleinsten Taschenrechner mit Hilfe von Reihenentwicklungen und rekursiven Verfahren die Sinuswerte in Bruchteilen von Sekunden!

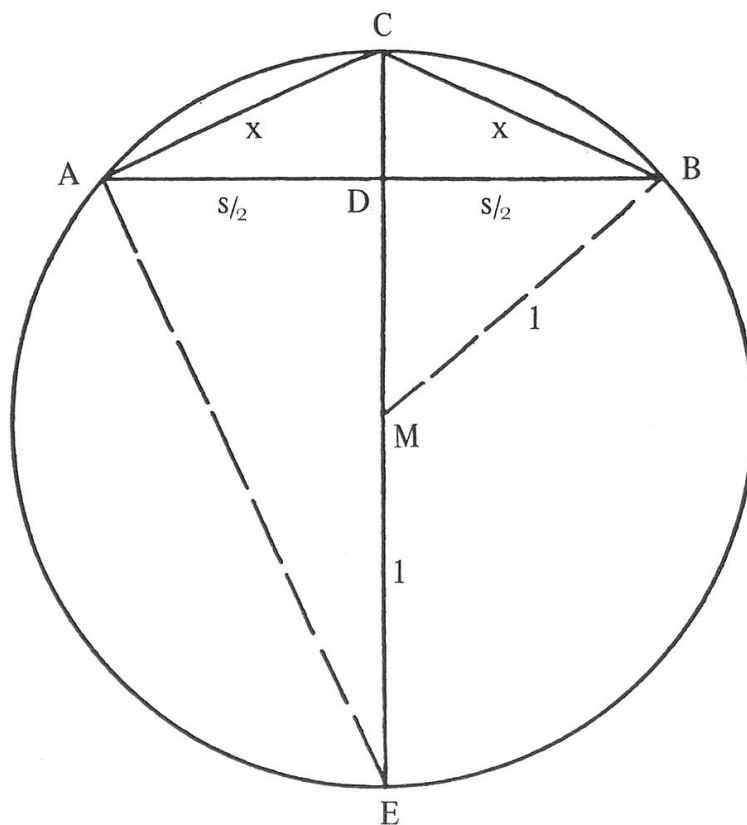


Wir werden nun zeigen, wie Bürgi zu *bekannter Sehne  $s$  eines Bogens die Sehne  $x$  zum halben Bogen* ermittelt. In der Coss steht zu lesen:

«Wan eins bogens subtensa bekhant, wie man des halben Bogens subtensam Cossisch erkundigen solle».

Nach dem Kathetensatz:

$$x^2 = 2 \cdot \overline{CD} \quad \text{oder} \quad \overline{CD} = \frac{x^2}{2}$$





Nach dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \overline{CD}^2 \\ &= \frac{s^2}{4} + \frac{x^4}{4} \quad \text{d.f.} \\ 4x^2 &= s^2 + x^4 \end{aligned}$$

oder

$$x^4 - 4x^2 + s^2 = 0 \quad (2)$$

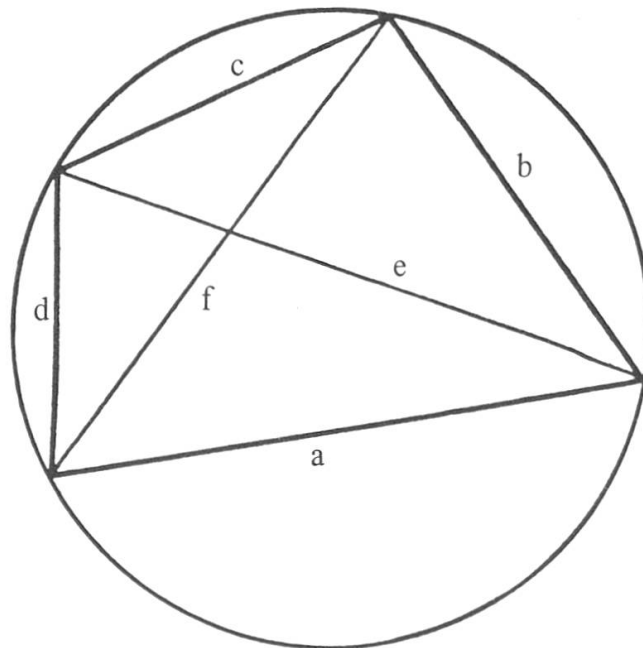
Ist also die Sehne  $s$  eines Winkels  $\alpha$  gegeben, so berechnet sich die Sehne  $x$  des halben Winkels  $\frac{\alpha}{2}$  durch Auflösen der biquadratischen Gleichung (2). Das nennt Bürgi den «1. Cossischen Process».

*Beispiel:* sei  $\sin 15^\circ$  zu berechnen

Nach (1) ist  $\sin 15^\circ = \frac{x}{2}$  wenn  $x$  der Bogen zu  $30^\circ$  bedeutet. Nun ist  $s = 1$  und  $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$  hat die Lösung  $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ , was mittels  $x^2 = u$  leicht einzusehen ist.

Es folgt dann  $\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.258819$ .

Eine besonders ansprechende geometrisch-algebraische Methodenverknüpfung manifestiert sich im Problem der *Winkeldreiteilung* (sog. «2. Cossischer Process»).



Zu gegebener Sehne  $s$  eines Winkels  $\alpha$  ist die Sehne  $x$  für  $\frac{\alpha}{3}$  zu bestimmen.

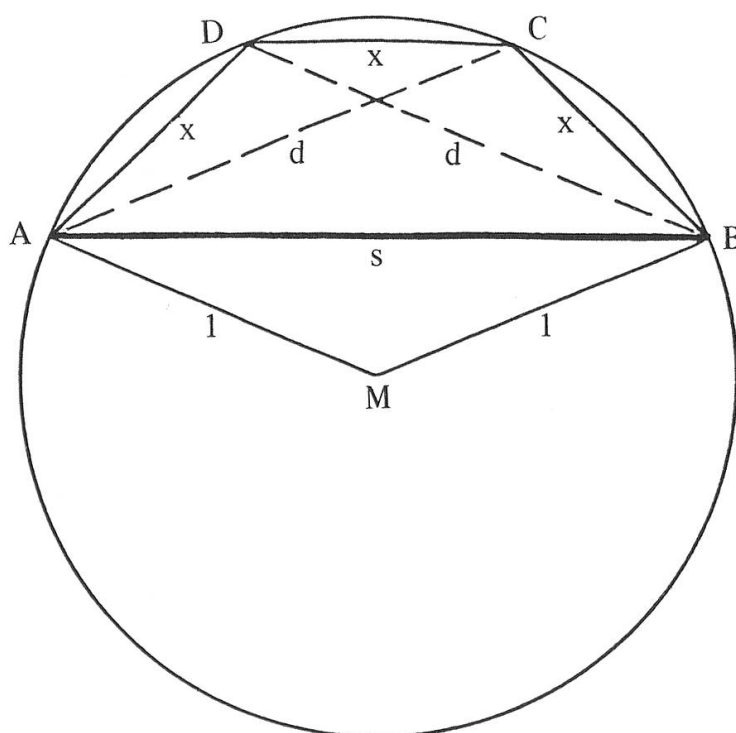
Nach dem Satz von *Ptolemäus* (ca. 85–165) gilt:

In einem (konvexen) Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

$$ef = ac + bd$$

Im Trapez  $ABCD$  gilt nach Ptolemäus:

$$x^2 + xs = d^2 \quad (*)$$



Nach dem 1. Cossischen Process (2)

$$x^4 - 4x^2 + d^2 = 0 \quad \text{oder} \quad d^2 = 4x^2 - x^4, \quad \text{in } (*)$$

eingesetzt ergibt

$$x^2 + xs = 4x^2 - x^4$$

oder

$$x^3 - 3x + s = 0 \quad (3)$$

### Näherungsverfahren zur Auflösung einer Gleichung 3. Grades

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem von Bürgi behandelten Spezialfall  $s=1$ , d.h. wir suchen zur Sehne  $s=1$  des Winkels  $60^\circ$  die Sehne  $x=s^*$  für den Winkel  $20^\circ$ . Gleichung (3) lautet dann

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (4)$$

Bürgi weiss, dass (4) genau 3 reelle Wurzeln hat, wovon eine die gesuchte Sehne  $s^*$  ist.

Es liegt der sog. «Casus irreducibilis» vor, den Cardano (resp. Tartaglia) noch nicht bewältigen konnte.

Bürgi erwies sich einmal mehr als geschickter Numeriker, der neben gewissen Varianten der *Regula falsi* neue Näherungsmethoden im Sinne moderner *rekursiver Verfahren* entwickelte. Letztere sollen in 2 Varianten am Beispiel der kubischen Gleichung (4) vorgeführt werden.

#### 1. Variante:

Hier entwickelt Bürgi einen Gedanken, den Isaac Newton (1642–1727) rund 80 Jahre später in seiner 1671 veröffentlichten Abhandlung «Methodus fluxionum et serierum infinitarum»<sup>3</sup> wieder aufgenommen hat.

Durch Ausprobieren findet man, dass  $a=0.3$  ein erster Näherungswert der Gleichung (4) ist. Nun wird  $x=a+\Delta a$  mit  $\Delta a$  als kleinem Fehler in (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned} (a + \Delta a)^3 - 3(a + \Delta a) + 1 &= 0 \quad \text{oder} \\ a^3 - 3a + 1 + 3(a^2 - 1) \cdot \Delta a + \Delta a \underbrace{[3a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2]}_{\varphi(\Delta a)} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Während Newton die zweiten und höheren Potenzen von  $\Delta a$  vollständig vernachlässigt, d.h.  $\varphi(\Delta a)=0$  setzt, bringt Bürgi eine Verbesserung.

Unter der Annahme  $\Delta a < 10^{-n}$  für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$ , ersetzt er das in  $\Delta a$  quadratische Polynom  $\varphi(\Delta a)$  durch  $2a \cdot 10^{-n}$ . Diese Modifikation sucht R. Wolf in [3], S. 30 u. ff. wahrscheinlichkeits-theoretisch zu deuten.

Aus (5) folgt nach dem Bürgi'schen Ansatz

$$\Delta a = \frac{a(3 - a^2) - 1}{3(a^2 - 1) + 2a \cdot 10^{-n}} \quad (6)$$

<sup>3</sup> Fluxionsrechnung (Differentialrechnung) und unendliche Reihen.

Setzt man in (6)  $a=0.3$  und  $n=1$  ein, so erhält man  $\Delta a=0.047$ ;  $a+\Delta a=0.347$  ist dann – wie die Rechnung zeigt – eine bessere Näherung für die Sehne  $s^*$  als die Methode von Newton liefern würde. Es folgt nun im nächsten Schritt der verbesserte Ansatz

$$x = a + \Delta a = 0.347 + \Delta a$$

der mit  $n=3$  und  $a=0.347$  nach (6) zu einem nächst besseren Näherungswert führt usw. Bürgi findet schliesslich

$$s^* = 0.3472963553;$$

ein Resultat, das die Genauigkeit eines 10-stelligen Taschenrechners erreicht!

2. Variante:

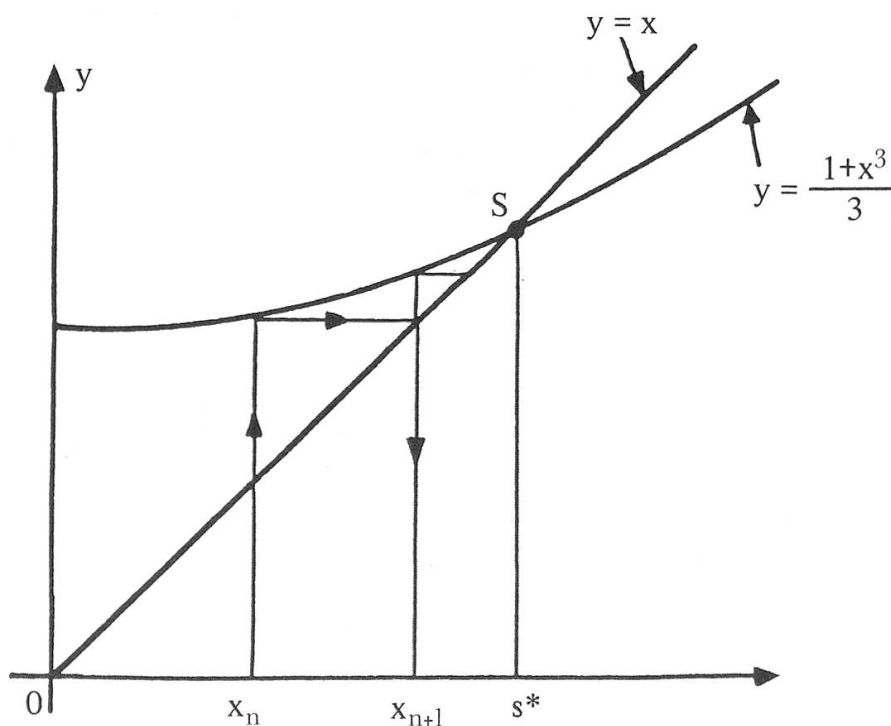
Gleichung (4) wird nach  $x$  aufgelöst und als *rekursive Beziehung*

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^3}{3}; \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

mit  $x_0 = a = 0.3$  ausgewertet.

Nachstehende Figur illustriert das Vorgehen von Bürgi in moderner Darstellung:

$$s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$



Bürgi ist mit seinen selbständig entwickelten iterativen Näherungsverfahren seiner Zeit weit vorausgeeilt, sind sie doch erst im heutigen Zeitalter des Computers so richtig zum Tragen gekommen.

Abschliessend sei noch die Berechnung von  $\sin 10^\circ$  vorgeführt. Nach (1) ist  $\sin 10^\circ$  die Hälfte der Sehne  $x$ , die zum Winkel  $20^\circ$  gehört. Dieser ist der dritte Teil von  $60^\circ$  mit zugehöriger Sehne  $s=1$ .  $x$  ist somit eine geeignete Lösung von Gleichung (4), nämlich die eben berechnete  $x=s^*=0,3472963553$  d.h.  $\sin 10^\circ = \frac{1}{2} \cdot s^* = 0,1736481777$ .

### Die Erfindung der Logarithmen und die «Progress Tabulen» von Bürgi

Zweifelsohne ist der geniale Uhrmacher aus dem Toggenburg mit der Erfindung der Logarithmen in die Geschichte der Mathematik eingegangen und in einer breitem Öffentlichkeit bekannt. In Erinnerung bleibt für Generationen von Schülern die gelbe Logarithmentafel von E. Voellmy, die heute allerdings nicht mehr benötigt wird, denn der moderne Taschenrechner erspart uns das mühsame Hantieren mit diesen Zahlen.

Wir werden in der Folge nur fragmentarisch auf den Problembereich eingehen. Dies scheint umsomehr gerechtfertigt, als uns E. Voellmy in [1] eine so treffliche und eingehende Darstellung der Dinge vermittelt.

Bereits *Archimedes* (ca. 287–212 v. Chr.) erkannte den fundamentalen Zusammenhang zwischen einer arithmetischen und geometrischen Zahlenfolge, der die theoretische Grundlage des logarithmischen Rechnens darstellt. Der bereits erwähnte Cossist und Rechenmeister M. Stifel gilt als eigentlicher Vorläufer der neuen Rechentechnik. Er und seine unmittelbaren Nachfolger dürften auf Bürgi direkt eingewirkt haben. Ihm kommt aber unbestritten das Verdienst zu, als erster eine für die Praxis brauchbare Logarithmentafel (von Bürgi «Progress Tabulen» genannt) berechnet zu haben. Dies dürfte bereits um das Jahr 1605 geschehen sein.

Doch wie immer zögert der wenig Schreibgewandte mit der Publikation bis 1620, so dass ihm der Schotte *John Neper* (1550–1617) mit der Veröffentlichung seiner eigenen Logarithmen – was im Jahre 1614 geschah – zuvorkam.

Johannes Kepler schreibt in der Einleitung zu den Rudolphinischen Tafeln (umfangendes Tabellenwerk für Planetenbahnen usw., 1627 erschienen):

«Der zaudernde Geheimniskrämer liess sein neugeborenes Kind im Stich, anstatt es zum allgemeinen Nutzen gross zu ziehen».

In Bild 2 ist das Titelblatt der 1620 publizierten Progress Tabulen zu erkennen. Das Original mit einer handschriftlichen Gebrauchsanweisung befindet sich zurzeit als Manuskript 2538 in Danzig (im heutigen polnischen Gdansk). In der Einleitung zur Gebrauchsanweisung schreibt Bürgi:

«Vorrede an den Treuherzigen Leser.

Freundlicher lieber Leser, ob wol von Vortrefflichen Mathematicis, und Arithmetis, mancherley Tabulen seindt erdicht und calculiert worden umb die Schwierigkeiten des Multiplicirens dividirens und *Radices extrahirens* auf zu heben, so sindt doch dieselbige allezeit nur particular gewesen. Derowegen ich zu aller Zeit gesucht und gearbeitet habe, *general Tabulen* zu erfinden».

Wie sind nun die Bürgi'schen Logarithmen zu erklären und wie rechnet man mit ihnen?

In Bild 2 sind im äusseren Ring die «roten Zahlen» oder Logarithmen  $r_n$  angeordnet, die eine arithmetische Folge bilden<sup>4</sup>. Die den  $r_n$  zugeordneten «schwarzen Zahlen» oder Numeri  $s_n$  befinden sich im inneren Ring und bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten 1.0001.

$$\begin{aligned} r_n &= 10n \\ s_n &= 10^8 \cdot (1 + 10^{-4})^n \end{aligned} \quad (8)$$

Eine eingehende Analyse hat gezeigt, dass (8) zu interpretieren ist als

$$\begin{aligned} r_n &= n \cdot 10^{-4} \\ s_n &= (1 + 10^{-4})^n \end{aligned} \quad (9)$$

Die von Bürgi verwendete *Basis*  $b$  berechnet sich (siehe [1] S. 17) als der zum Logarithmus  $r_n = 1$  gehörende Numerus.

Aus  $r_n = 1$  folgt aber  $n = 10^4$  und somit

$$b = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2.7181459$$

$b$  liegt auffallend nahe bei  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818$ , d.h. Bürgi rechnet annähernd mit natürlichen Logarithmen.

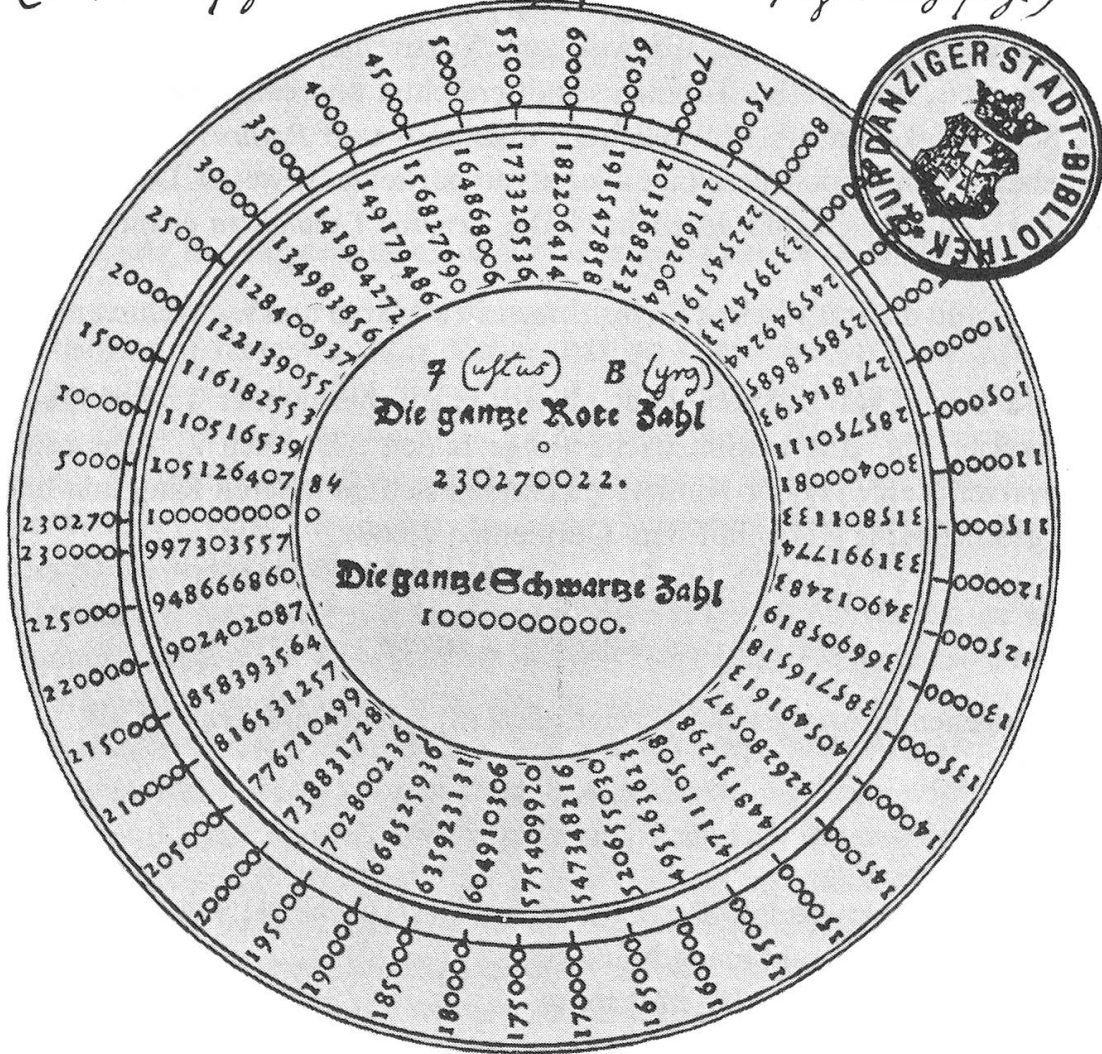
Die Bemerkungen Bürgis zur «ganzen schwarzen Zahl»  $10^9$  und «ganzen roten Zahl»  $230270022 = 230270.022$  (siehe Mitte von Bild 2) stehen in Zusammen-

<sup>4</sup> Die Progress Tabulen stellen eigentlich eine sog. Antilogarithmentafel dar.

# Aritmetische vnd Geometrische Progress

Tabulen/sambt gründlichem vnterricht/wie solche nützlich  
in allerley Rechnungen zugebrauchen/vnd verstanden werden sol.

*(Vnterricht - nicht jedwilt - Verstand ist ein Mann leicht beizufügen)*



Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul  
Sessen/der Eoblichen Univerſitet Buchdruckern/ Im Jahr/ 1620.

Bild 2

hang mit dem Logarithmus von 10 (Dezimalsystem!) zur Bürgi'schen Basis  $b$ . Man kann mittels (8) leicht zeigen, dass

$${}^b \log 10 = 2.3027$$

ist.

Nun folgt noch ein *Rechenbeispiel*:

$$x = \sqrt{1.49179486}$$

	Numerus (innerer Ring)		Logarithmus (äusserer Ring)
1.49179486:	149179486	→	40000
			↓ :2
<u><math>x = 1.22139055</math>:</u>	122139055	←	20000

Abschliessend sei erwähnt, dass die Bürgi'schen Progress Tabulen bald von den handlicheren *dekadischen* Logarithmen des Engländers Henry *Briggs* (1561–1631) verdrängt wurden.

### **Bürgi als Uhrmacher und Instrumentenbauer**

Bürgi's Genialität liegt in der harmonischen Verbindung von theoretischem Wissen und handwerklich-technischer Fertigkeit. Neben Wasserhebevorrichtungen für Springbrunnen, astronomischen Uhren und Himmelsgloben schuf er auch einen Proportional- oder Reduktionszirkel, ein geometrisches Triangulationsinstrument, ein Gerät zum perspektivischen Zeichnen, einen Sextanten sowie einen sog. Kaliberstab. Mit einem solchen lässt sich vom Durchmesser einer (Schiess-)Kugel deren Gewicht und die erforderliche Pulvermenge ablesen. Besondere Anerkennung fand Bürgi mit seinen kunstvollen, mit höchster Präzision ausgestatteten mechanischen *Himmelsgloben*. Sie vereinigen geometrische Kenntnisse, astronomisches Wissen, technische Perfektion und künstlerisch-ästhetischen Ausdruck in einmaliger Art und Weise. Ein besonders schönes Exemplar, der kleine Himmelsglobus von 1594, ist im Schweizerischen Landesmuseum in Zürich zu bewundern.

### **Bürgi und die «Kopernikanische Wende»**

Das epochemachende Werk «*De revolutionibus orbium coelestium*» (Von der Umdrehung der Himmelskörper) von Nikolaus *Kopernikus* erschien in seinem



Todesjahr 1543. Damit wurde die sog. «Kopernikanische Wende» eingeleitet; das geozentrische Weltbild des Ptolemäus wurde allmählich vom heliozentrischen System verdrängt. Allerdings blieb die vorwiegend naturphilosophisch gestützte Hypothese noch unbewiesen. Zu ihrer wissenschaftlichen Festigung bedurfte es zweier neuer Ansatzpunkte.

Erstens waren *exaktere* astronomische *Beobachtungsdaten* als bis anhin notwendig und zweitens erforderte ihre modellhafte Auswertung neue und wirksamere *mathematische Verfahren*.

Zu Bürgi's Zeit haben zwei hervorragende Gelehrte, Galileo *Galilei* (1564–1642) und der bereits vielfach erwähnte *Kepler* – zwar auf verschiedenen Wegen – das neue Weltbild wissenschaftlich fundiert. Während Galilei prinzipiell die Mathematik als tragendes Fundament der Naturerkenntnis erklärte, war Kepler von der universalen Idee der «*Weltharmonie*» durchdrungen, die wesentlich mit den «Urbildern der Geometrie» in Zusammenhang stand.

Für Kepler war Bürgi der ideale wissenschaftliche Mitarbeiter, der sich sowohl durch praktisch-technisches Können als auch durch mathematische Erfindungsgabe auszeichnete.

*Bürgi kann wohl mit einigem Recht als einer der ersten Vertreter der algorithmischen Mathematik bezeichnet werden.*

Lichtensteig im Toggenburg – wo Bürgi seine Jugendjahre verbrachte – hat 1963 seinem grossen Sohn ein Denkmal gesetzt in Form einer eigenwilligen, zu den Sternen weisenden Plastik, die von den Worten umrahmt ist:

«Es wuchs der Uhrmacher, Astronom und Mathematiker an den Aufgaben einer Zeitwende zum grossen Entdecker und Erfinder».

Prof. Dr. Hans Loeffel  
Goethestrasse 25  
9008 St. Gallen

## Literatur:

- [1] E. Voellmy: Jost Bürgi und die Logarithmen, Beiheft Nr. 5 der «Elemente der Mathematik», Verlag Birkhäuser Basel 1948
- [2] M. List, V. Bialas: Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler, Nova Kepleriana, Neue Folge Heft 5, Verlag Bayerische Akademie der Wissenschaften, München 1973
- [3] R. Wolf: Handbuch der Astronomie, Erster Halbband, Zürich 1890
- [4] R. Wolf: Astronomische Mitteilungen XXXI–XXXX. Zürich 1872–1876.

## Zusammenfassung

Dieses Jahr begehen wir den 350. Todestag des genialen Uhrmachers und Instrumentenbauers Jost Bürgi aus Lichtensteig im Toggenburg, der sich auch als Mathematiker bleibende Verdienste erworben hat.

Hinlänglich bekannt ist Bürgi als Erfinder der Logarithmen. Sein übriges mathematisches Schaffen ist aber, besonders für unsere Zeit, ebenso bedeutungsvoll. Es ist in der sog. «Coss» als Einleitung zu seinem Canon Sinuum (Sinustafel) der Nachwelt überliefert. Bürgi hat sich für die Einführung der Dezimalschreibweise und die vermehrte Berücksichtigung algebraischer Methoden eingesetzt. Vor allem sind seine iterativen Näherungsverfahren zur Auflösung von Gleichungen höhern Grades als Pionierleistung einzustufen. Bürgi kann deshalb als einer der ersten Vertreter der algorithmischen Mathematik bezeichnet werden.

Neben einer kurzen Schilderung der Mathematik um das Jahr 1600 wird abschliessend die geistesgeschichtliche Bedeutung Bürgis als Mitarbeiter von Johannes Kepler, dem «Baumeister» des Kopernikanischen Weltsystems hervorgehoben.

## Résumé

1982 marque le 350<sup>ème</sup> anniversaire de la mort de Jost Bürgi, de Lichtensteig dans le Toggenburg (St-Gall), horloger de génie, constructeur d'instruments, également mathématicien de grand mérite. Bürgi est connu essentiellement pour sa découverte des logarithmes. Le reste de son activité mathématique est également significatif, spécialement pour notre temps; il nous a été transmis, sous l'appellation «Coss», en introduction à son «Canon Sinuum» (tables des sinus). Bürgi a œuvré en vue d'introduire l'écriture décimale et de faire une place plus grande aux méthodes algébriques. En particulier, ses procédés d'approximation par itération dans la recherche des solutions des équations de degrés supérieurs représentent une performance de pionnier. Pour cette raison, Bürgi doit être qualifié de premier utilisateur des algorithmes mathématiques.

L'article évoque rapidement l'état de développement des mathématiques aux alentours de 1600 puis souligne la signification culturelle de la collaboration de Bürgi avec Johannes Kepler, l'architecte du monde copernicien.

## Summary

This year we commemorate the 350th anniversary of the death of Jost Bürgi, ingenious watch-maker and instrument-maker of Lichtensteig (a small town in the eastern part of Switzerland), whose achievements as a mathematician are of equally lasting merit.

Well known is Bürgi for the invention of logarithms, but no less significant is, especially in our day, the remainder of his mathematical work which has been handed down to posterity in the so-called «Coss», as an introduction to his Canon Sinuum (Table of Sines). Bürgi advocated the introduction of decimal notation and a more extensive application of algebraic methods. It is above all his iterative approximation processes for the solution of higher-degree equations that deserve recognition as pioneer work. Bürgi may indeed be regarded as one of the first exponents of algorithmic mathematics.

Following a brief survey of mathematics around the beginning of the seventeenth century, tribute is paid to the contribution Bürgi has made to intellectual history as a collaborator of Johannes Kepler, the architect of the Copernican world system.

