

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Band:** - (1982)

**Heft:** 1

**Artikel:** Asymétrie de la distribution collective des sinistres et probabilités de  
ruine

**Autor:** Maeder, Philippe

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966979>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

PHILIPPE MAEDER, Lausanne

## Asymétrie de la distribution collective des sinistres et probabilités de ruine<sup>1</sup>

### 1. Introduction

#### 1.1 But

Au sein d'un portefeuille d'assurances, il se produit, durant chaque période, un nombre aléatoire de sinistres, dont les montants eux-mêmes dépendent du hasard. Partant de certaines hypothèses, l'on peut estimer la distribution collective du montant global des sinistres pour une période, et quantifier le risque en calculant des probabilités de ruine.

La présente étude vise à établir le lien qui peut exister entre, d'une part, l'asymétrie de cette distribution collective, mesurée par le coefficient

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (1)$$

(où  $\sigma^2$  et  $\mu_3$  sont les moments centrés d'ordre deux et trois), et, d'autre part, le risque de ruine afférent à ce portefeuille. Elle a été motivée par deux considérations :

- Premièrement, les principes de calcul des primes les plus «classiques» qui font intervenir des moments de la distribution globale des sinistres (cf. par exemple [4]) ne prennent en considération que les deux premiers de ceux-ci. On peut dès lors se demander quelle influence les moments d'ordre supérieur ont sur le risque couru par l'assureur.
- Deuxièmement, nous savons que l'importance de ce risque a une incidence certaine sur l'époque où la probabilité de (première) ruine est maximale (cf. [7]). Il est intéressant, à cet égard, d'examiner l'influence isolée du coefficient d'asymétrie sur ce moment le plus dangereux pour l'assureur.

Nous chercherons donc, dans cet article, à apporter une réponse au moins partielle à cette double interrogation.

<sup>1</sup> L'essentiel de la matière de cet article a été exposé lors d'une conférence présentée par l'auteur au groupe *ASTIN* de l'AAS le 18 septembre 1981, à Berne.

## 1.2 Moyens

Notre but étant d'éclaircir les deux points soulevés au paragraphe précédent, quelle voie faut-il choisir pour y parvenir de façon satisfaisante?

Il est hautement souhaitable de pouvoir utiliser un modèle non paramétrique où il soit possible de faire varier le troisième moment de la distribution indépendamment des deux premiers. Dans cette optique, une approximation du risque collectif par un développement «normal power» ([6], [8]) ou par une loi Gamma ([10], [11], etc.) est peu satisfaisante, parce qu'elle fait intervenir une forme bien définie de loi de distribution, de sorte qu'on pourrait mettre en doute la généralité de résultats obtenus grâce à elle. En outre, de tels développements seraient numériquement peu commodes dans le cadre de notre étude.

Le modèle que nous avons retenu en définitive est basé sur la notion d'entropie maximale d'une distribution. Nous en verrons les caractéristiques essentielles après avoir situé le cadre mathématique général dans lequel s'inscrit le présent travail.

Puis, ayant mis notre méthode de calcul sur un «banc d'essai» constitué par des exemples dont les résultats exacts sont connus par ailleurs, nous passerons à l'examen de diverses applications numériques, dont nous tirerons, dans la dernière partie de cet article, un certain nombre de conclusions.

## 2. Appareil mathématique

### 2.1 Modèle général du risque

Nous allons étudier l'évolution du risque de ruine pendant une durée finie et, pour simplifier les calculs, avec un temps d'observation discret.

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le montant global des sinistres pendant une période. Elle est définie de la manière suivante:

$$X: \begin{cases} x_i = (i-1)h \\ p_i = \text{Pr}^{\text{coll}}\{X = x_i\} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où  $h > 0$ .

En d'autres termes,  $X$  est une variable aléatoire discrète comprise entre zéro (inclus) et  $M$ , où

$$M = (n-1)h \tag{2}$$

Au début de l'observation, soit au temps zéro, l'assureur dispose d'une provision de fluctuation donnée

$$U_0 = U \quad (3)$$

où  $U \geq 0$ .

A chaque période, il indemnise des sinistres pour un montant  $X$  (aléatoire) et encaisse une prime

$$\Pi = E(X) + \eta \quad (4)$$

où  $\eta$  est une marge de sécurité (en général positive, voire nulle). Supposant que les excédents (positifs ou négatifs) viennent s'ajouter à la provision de fluctuation, cette dernière varie selon l'équation

$$U_t = U_{t-1} + \Pi - X \quad (5)$$

et il y a ruine au temps  $t$  si  $U_t < 0$ .

L'équation (5) permet donc d'écrire, si l'on désigne la probabilité de première ruine au temps  $t$  par  ${}_{t-1}q$  (reprenant en cela la notation utilisée dans [1]):

$${}_{t-1}q = \sum_{z < 0} Pr\{U_t = z | U_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, t-1\}. \quad (6)$$

Or, après une période, en vertu des équations (3) et (5), la distribution de la provision de fluctuation  $U_1$  est donnée par

$$Pr\{U_1 = z\} = Pr^{\text{coll}}\{X = U + \Pi - z\} \quad (7)$$

où la probabilité du membre de droite est celle de la variable aléatoire  $X$  définie au début de ce paragraphe.

Il résulte de (5) que l'on peut calculer la répartition de  $U_t$  (sous la condition  $U_i \geq 0$   $i = 0, 1, \dots, t-1$ ) par la convolution incomplète

$$Pr\{U_t = z\} = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} Pr(U_{t-1} = k) \cdot Pr^{\text{coll}}\{X = \Pi + k - z\} \quad (8)$$

avec:

$$k_{\min} = \max(0; z - \Pi)$$

$$k_{\max} = \min(U + (t-1)\Pi; M + z - \Pi)$$

$$\Pi - M \leq z \leq U + t\Pi$$

où  $M$  est défini par l'équation (2).

Les limites de la sommation ci-dessus résultent de celles des domaines de définition des variables aléatoires  $U_{t-1}$  et  $X$ .

Le schéma de calcul consiste à partir de (7), calculer  ${}_0|q$  par (6), déterminer la distribution de  $U_2$  grâce à (8), trouver  ${}_1|q$  grâce à (6), etc. La probabilité de se ruiner pendant un laps de temps  $(0, t)$  est donnée par

$${}_t|q = \sum_{j=1}^t {}_{j-1}|q \quad (9)$$

## 2.2 Distribution du risque collectif

Dans l'alinéa précédent, nous avons admis que la variable aléatoire  $X$  était connue. Il s'agit maintenant d'examiner en détail la manière de la déterminer par maximisation de son entropie.

La notion d'entropie ressort de domaine de la thermodynamique; elle a été reprise en théorie de l'information pour caractériser le degré d'indétermination d'une expérience. Son application à la science actuarielle a été mise en évidence par les articles de *Dubois* ([5]) et *Berliner et Lev* ([3]) notamment. Nous y renvoyons le lecteur qui voudrait en savoir plus que ce que l'exposé très succinct qui suit peut lui apprendre.

Soit une expérience  $A$  pouvant prendre  $n$  valeurs distinctes  $x_i$  avec une probabilité  $p_i$ . Son entropie est définie par

$$H(A) = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (10)$$

On a évidemment

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (11)$$

La base du logarithme qui apparaît dans cette formule peut être choisie arbitrairement, et nous avons adopté les logarithmes naturels (pour une raison de simplicité analytique). Dans le problème qui nous occupe, nous avons ajouté trois conditions à (11), à savoir:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = m_1 \quad (\text{constante donnée}) \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 = m_2 \quad (\text{idem}) \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i^3 = m_3 \quad (\text{idem}) \quad (14)$$

Notre but est de trouver les probabilités  $p_i$  qui maximisent l'entropie  $H(A)$ , c'est-à-dire, qui laissent à l'expérience le plus haut degré d'incertitude. En d'autres termes, nous ne prenons de l'information fournie – la valeur des moments – que le strict minimum.

La maximisation de  $H(A)$ , fonction des  $n$  variables  $p_i$  sous les conditions (11), (12), (13) et (14), s'effectue par la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange (voir [3]). Formons l'équation de Lagrange:

$$\begin{aligned}
 f(p_1, \dots, p_n, k_0, k_1, k_2, k_3) = & \\
 & - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) - k_0 \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) \\
 & - k_1 \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i - m_1 \right) - k_2 \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - m_2 \right) \\
 & - k_3 \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^3 - m_3 \right).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Il s'agit de trouver le maximum de cette fonction, où toutes les dérivées premières sont nulles. Les dérivées par rapport aux coefficients de Lagrange  $k_0, k_1, k_2$  et  $k_3$ , égalées à zéro, nous fournissent les équations de conditions (11) à (14) respectivement. Quant aux dérivées par rapport aux  $p_i$ , elles valent:

$$\frac{df}{dp_i} = -(\log(p_i) + 1) - k_0 - k_1 x_i - k_2 x_i^2 - k_3 x_i^3. \tag{16}$$

Rappelons que le logarithme ci-dessus est naturel, et que l'indice  $i$  peut varier de 1 à  $n$ . Egalons maintenant l'expression (16) à zéro. On en tire:

$$\log(p_i) = -1 - k_0 - k_1 x_i - k_2 x_i^2 - k_3 x_i^3. \tag{17}$$

Posant ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 + 1 = \lambda_0 \\ k_1 = \lambda_1 \\ k_2 = \lambda_2 \\ k_3 = \lambda_3 \end{array} \right. \tag{18}$$

on obtient l'équation pour les probabilités cherchées:

$$\begin{aligned}
 p_i = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x_i - \lambda_2 x_i^2 - \lambda_3 x_i^3) \\
 (i = 1, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Substituant cette expression dans les équations de conditions (11) à (14), on parvient au système de quatre équations à quatre inconnues  $\lambda_j$  suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=0}^3 \lambda_j x_i^j\right) - 1 = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot \exp\left(-\sum_{j=0}^3 \lambda_j x_i^j\right) - m_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \exp\left(-\sum_{j=0}^3 \lambda_j x_i^j\right) - m_2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 \cdot \exp\left(-\sum_{j=0}^3 \lambda_j x_i^j\right) - m_3 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Ce système d'équations non linéaires peut être résolu par diverses méthodes, du nombre desquelles nous avons adopté l'algorithme de Newton-Raphson généralisé à quatre dimensions. Il se caractérise par un calcul itératif qui nécessite la connaissance des dérivées des fonctions et d'une solution initiale (pour plus de détails, voir par exemple [2]).

Dans l'application pratique de cette méthode au calcul d'une distribution concrète, il faut encore fixer le nombre  $n$  de points  $x_i$  de la variable aléatoire  $X$  ainsi que le pas  $h$  qui les sépare. Ce choix n'est pas tout-à-fait arbitraire, car il doit tenir compte des valeurs des trois premiers moments  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  de ladite variable.

### 3. Résultats obtenus dans des cas connus

#### 3.1 Démarche

On peut se demander, à juste titre, si les distributions obtenues grâce à la méthode développée ci-dessus sont vraisemblables et correspondent plus ou moins à des répartitions réalistes. Une autre question que l'on se pose a priori est de savoir dans quelle mesure l'information consistant dans la connaissance des trois premiers moments d'une distribution détermine celle-ci complètement.

Ce que nous allons donc étudier dans ce paragraphe, ce sont les différences de fonctions de répartition et de probabilités de ruine entre la variable aléatoire d'entropie maximale et un modèle «exact» dont nous avons utilisé les moments pour calculer celle-ci.

Deux cas ont retenu notre attention : le modèle Poisson-exponentiel, d'une part, et la variable collective Polya-Gauss/Pareto, d'autre part.

### 3.2 *Modèle Poisson-exponentiel*

Nous nous baserons, dans cet alinéa, sur la référence consistant dans les résultats de Seal [9]. Dans son article, celui-ci a adopté les paramètres suivants :

a) loi de Poisson:  $\lambda = 1$

b) loi exponentielle:  $\mu = 1$ .

La distribution collective qui en résulte a les trois premiers moments :

$$m_1 = 1$$

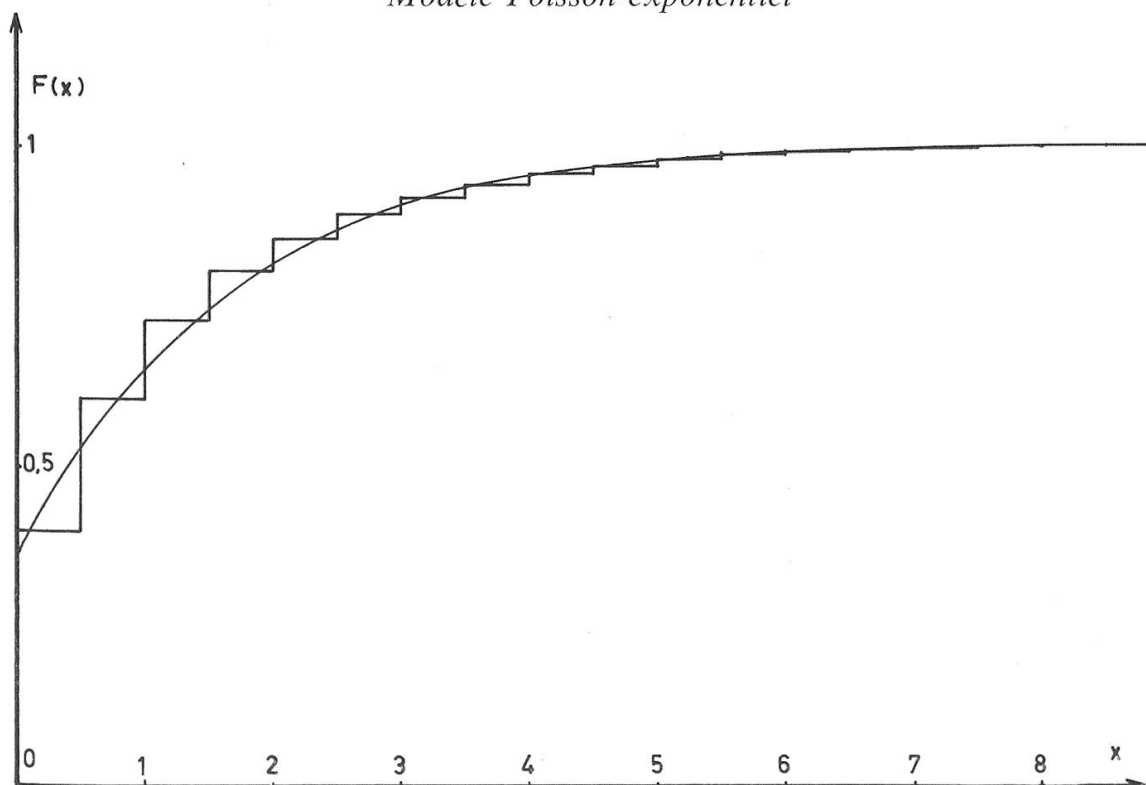
$$m_2 = 3$$

$$m_3 = 13$$

et un coefficient d'asymétrie égal approximativement à 2,12.

La figure 1 montre que la distribution d'entropie maximale (discrète) correspond étroitement à la distribution exacte. En ce qui concerne les probabilités de

Figure 1  
*Modèle Poisson-exponentiel*



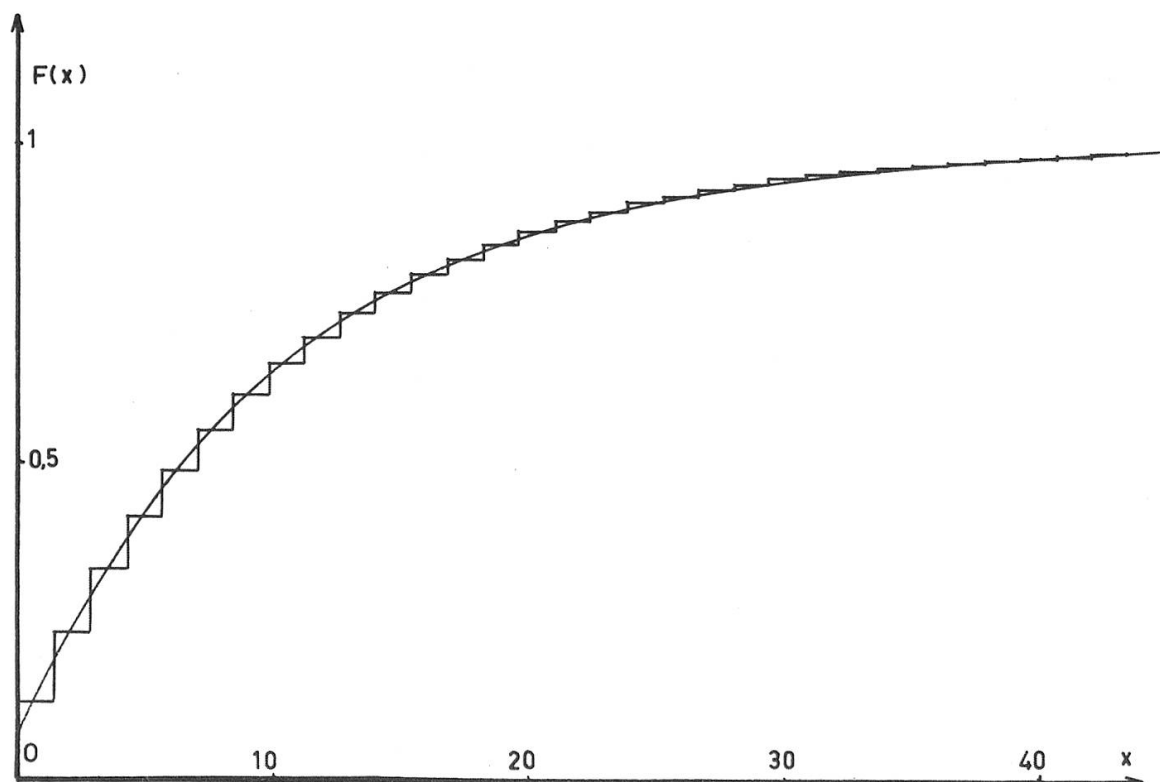


ruine, certaines différences sont à prévoir, car le modèle défini au paragraphe 2.1 examine l'état – positif ou négatif – de la provision de fluctuation  $U_t$  en des époques distinctes et de façon discontinue dans le temps. Ce processus ignore donc les cas de ruine légère et passagère, qui sont en revanche comptés comme tels dans une approche du problème de la ruine en temps continu. Voilà pourquoi l'on peut s'attendre à obtenir, par l'équation (6), des probabilités de ruine légèrement inférieures à celles de Seal. C'est effectivement ce que nous montrent les valeurs numériques du tableau I (voir Appendice), qui nous prouve cependant qu'en dépit des différences de niveau du risque de ruine, celui-ci a une évolution similaire pour les deux modèles envisagés. Cette constatation est rassurante dans l'optique des buts que nous nous sommes fixés au paragraphe 1.1.

### 3.3 *Modèle Polya-Gauss/Pareto*

Notre référence à des résultats exacts repose ici sur une étude personnelle antérieure [7]. Le nombre des sinistres  $y$  est représenté par une variable aléatoire de Polya (binomiale négative) de paramètres  $t = 10$  et  $k = 1,25$  ce qui lui confère

Figure 2  
*Modèle Polya-Gauss/Pareto*



une espérance mathématique de 10 et une variance de 90. Leur montant individuel est déterminé par l'association – sous forme de moyenne pondérée – d'une variable aléatoire normale tronquée (positive) et d'une variable de Pareto, où le choix des paramètres est tel que l'espérance mathématique et la variance de ce montant valent respectivement 1 et 3. La distribution collective qui en résulte a les caractéristiques suivantes :

$$E(X) = 10$$

$$\text{Var}(X) = 120$$

$$\text{Asym}(X) \cong 2,1$$

La figure 2 montre que les fonctions de répartition exacte (calculée par une méthode directe faisant appel à l'intégration numérique) et d'entropie maximale (discrète, donc en escaliers) coïncident parfaitement.

Quant aux probabilités de ruine se rapportant à ces deux modèles (telles qu'elles ressortent du tableau II), dans les trois cas

- (i)  $U_0 = 0$
- (ii)  $U_0 = 10 (= E(X))$
- (iii)  $U_0 = 20 (= 2E(X))$

elles ne diffèrent pas de beaucoup les unes des autres. Un des facteurs qui contribuent à cette similarité est que l'approche du problème de la ruine s'effectue en temps discret pour la variable «exacte» comme pour celle d'entropie maximale; les probabilités de ruine s'obtiennent donc par convolutions (incomplètes) successives (intégration numérique dans le premier modèle, sommation dans le second).

Nous n'avons pas une telle identité d'optique à l'alinéa précédent.

### 3.4 · Enseignements tirés de ces applications numériques

Nous avons brièvement mentionné, au chiffre 2.2, que le choix du pas  $h$  et du nombre de points  $n$  de la variable aléatoire  $X$  d'entropie maximale était quelque peu arbitraire. En fait, il doit être guidé par les considérations suivantes :

- Si l'on adopte un pas  $h$  très grand, la variable aléatoire  $X$  comprend peu de points et la courbe des probabilités de ruine reflétera cette simplification excessive de la représentation du risque par un aspect irrégulier.
- Si l'on choisit un nombre de points  $n$  trop petit, il est fort probable que l'algorithme de calcul fournira comme solution une variable aléatoire dont

l'histogramme des probabilités est en forme d' $U$ ; un agrandissement du pas  $h$  ou du nombre de points  $n$  permet ensuite d'obtenir une solution plus «vraisemblable», qui ne présente pas une telle configuration (irréaliste).

- Pour obtenir une courbe des probabilités de ruine exempte d'irrégularités dues à la représentation simplificatrice du risque collectif par une variable aléatoire discrète, on a avantage à faire en sorte que le nombre de valeurs  $z < 0$  de la distribution du  $U_t$  (cf. équation (6)) soit toujours le même. Cette condition est remplie lorsque le pas  $h$  est compris un nombre entier de fois dans la prime  $\Pi$ .

A ces quelques règles, qui dérivent de nos expériences avec cette méthode de calcul, nous ajouterons encore une constatation: les résultats des paragraphes précédents prouvent que la variable aléatoire d'entropie maximale remplit une condition essentielle à notre recherche: elle présente en effet un risque de ruine dont l'évolution est très voisine de celle du risque afférent à des modèles «classiques» plus courants et reconnus proches de la réalité. Ceci nous permet d'affirmer le caractère général des développements qui vont suivre.

## 4. Etude du risque de ruine

### 4.1 Bases

La question – à plusieurs volets – que nous nous posons est la suivante: Quelle est l'influence isolée de l'asymétrie de la distribution collective des sinistres  $X$  sur le niveau et l'évolution du risque de ruine?

Deux groupes de trois répartitions d'entropie maximale vont nous permettre de l'étudier.

- (i) Le premier comporte trois variables aléatoires ayant toutes trois une espérance mathématique  $E(X)=1$  et une variance  $\text{Var}(X)=2$  mais présentant un coefficient d'asymétrie  $\gamma_1$  valant 1, 2 et 3 respectivement.
- (ii) Le second se compose de trois distributions où l'espérance mathématique  $E(X)=1$ , la variance  $\text{Var}(X)=2$  et le coefficient d'asymétrie  $\gamma_1=2, 3$  et 4 respectivement.

Le tableau III indique les valeurs numériques et paramètres afférents à ces six cas. Les notations qui y apparaissent ont été définies sous chiffre 2.2, notamment à l'équation (19) qui indique les valeurs des probabilités  $p_i$  en fonction des quatre coefficients  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

Ces six variables aléatoires nous permettent de calculer et de comparer des probabilités de ruine à partir de diverses provisions initiales  $U$ . Nous supposons toujours que  $\Pi = 1,1$  (la prime renferme donc un marge de sécurité de 10 %) et nous ferons varier  $U$  en nous basant sur le critère bien connu de la borne supérieure de la probabilité de ruine à l'infini

$$\varepsilon \leq \exp(-RU) \quad (21)$$

où  $R$  est la solution positive de l'équation

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot \exp(-Rx_i) = 1. \quad (22)$$

La méthode de Newton-Raphson se prête bien au calcul du facteur  $R$  (à partir des  $p_i$  donnés par (19)), que l'on détermine précisément après quelques itérations seulement (cf. aussi [7]).

Les développements qui suivent reposent sur les calculs numériques effectués à partir des cas types décrits dans les tableaux IV et V. Le premier de ceux-ci présente cinq situations faisant appel aux variables du premier groupe : les cas n<sup>os</sup> 1, 3 et 5 sont obtenus lorsque l'on désire que la borne supérieure  $\varepsilon$  de la probabilité de ruine selon (21) soit égale à 10 % pour chacune de ces trois distributions. Les cas n<sup>os</sup> 2 et 4 sont ceux pour lesquels nous appliquons à la première et à la troisième variable (respectivement) la provision  $U$  pour laquelle la borne supérieure  $\varepsilon$  de la deuxième est de 10 %. Le tableau V caractérise cinq cas similaires appliqués aux trois répartitions du deuxième groupe.

La comparaison de ces divers exemples nous permettra d'étudier l'influence de l'asymétrie de la variable aléatoire  $X$  sur

- le niveau du risque de ruine,
- son évolution,
- le moment le plus dangereux pour l'assureur.

#### 4.2 Niveau du risque de ruine

Reprenons, dans le tableau IV, les cas n<sup>os</sup> 2, 3 et 4. Une même provision  $U = 25,14$  est appliquée aux trois variables du premier groupe.

Nous constatons tout d'abord qu'à long terme, la borne supérieure de ces trois risques varie de 9 à 11,1 % selon le coefficient d'asymétrie. Cette première indication du fait que le niveau du risque présenté par ces trois cas est significativement différent est confirmée par le calcul des probabilités de ruine

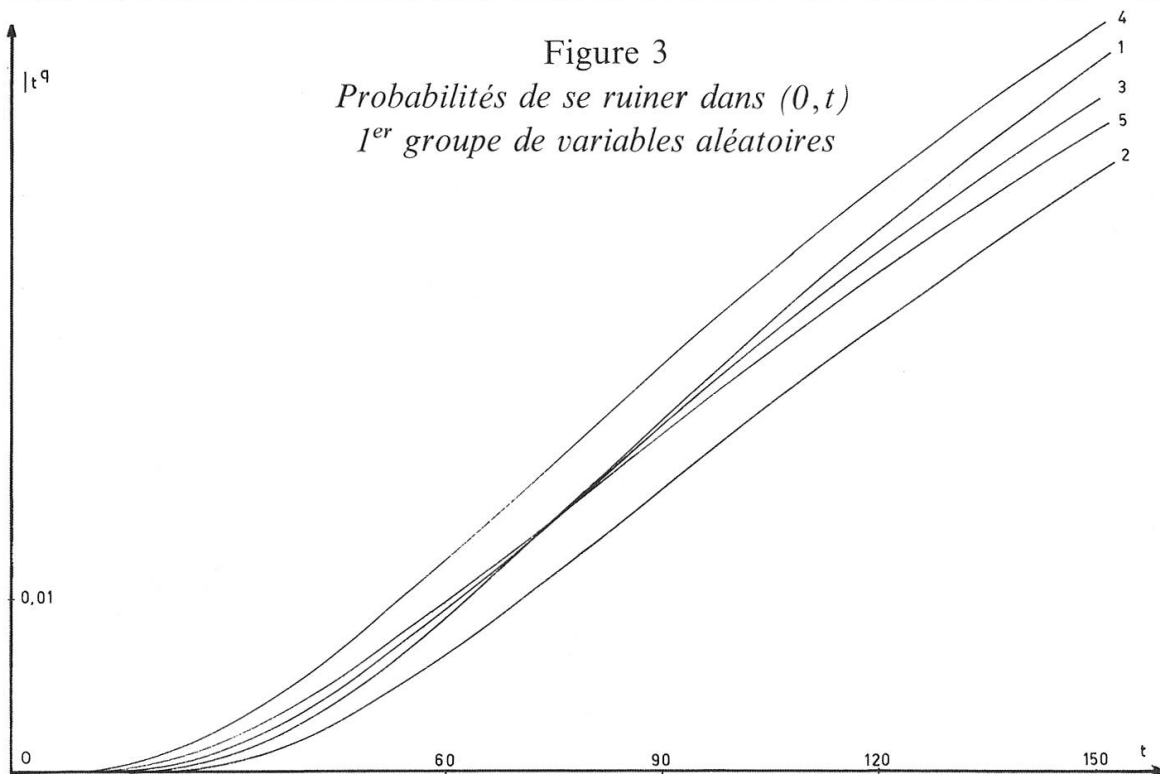
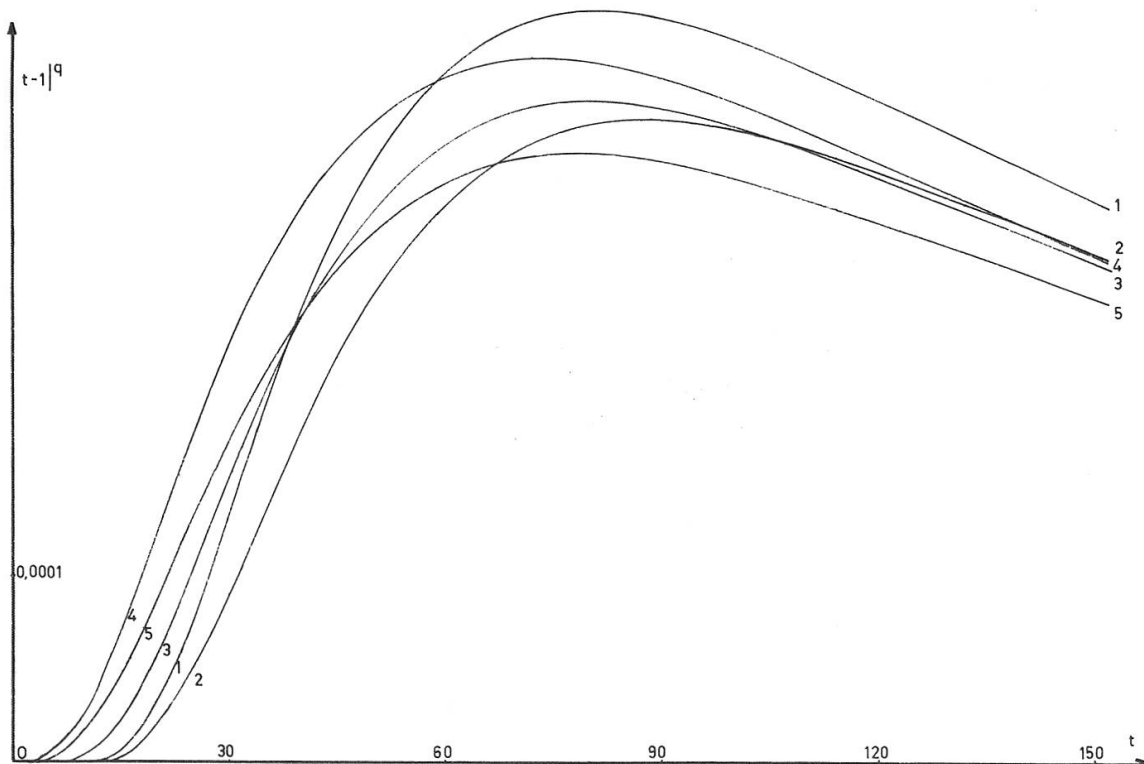
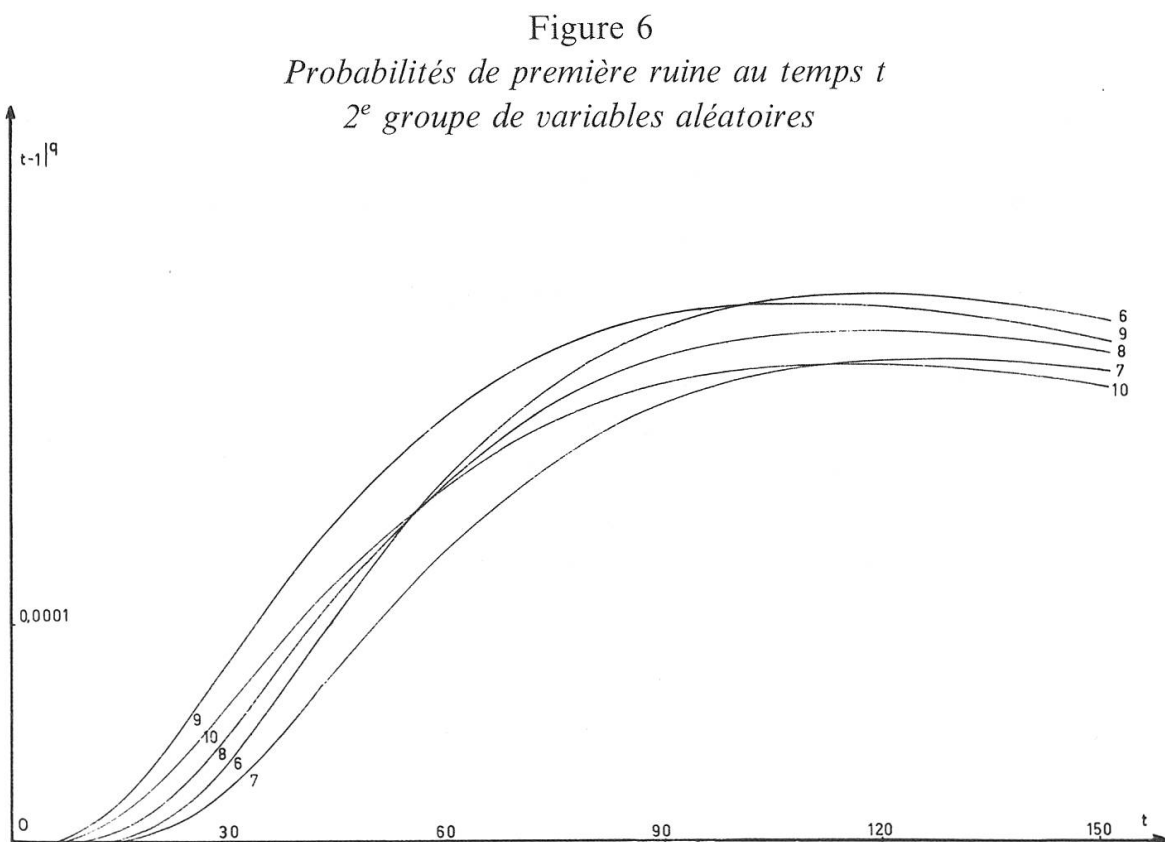
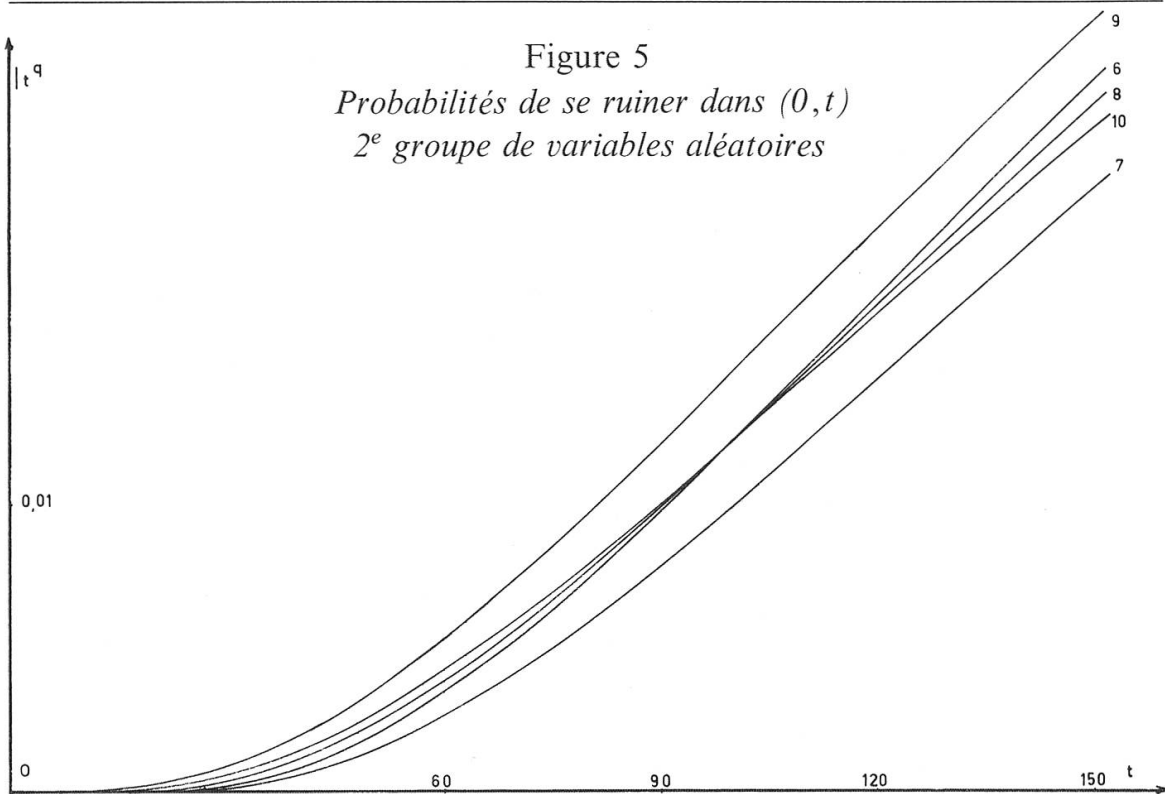


Figure 4  
*Probabilités de première ruine au temps  $t$*   
*1<sup>er</sup> groupe de variables aléatoires*





exactes  $|_t q$ , dont quelques valeurs figurent au tableau VI, et dont le graphique fait l'objet de la figure 3. Nous avons représenté ces courbes de manière continue pour améliorer la lisibilité de ces graphiques; une représentation correcte consisterait en effet en une courbe en escaliers, puisque aucun cas de ruine n'est observé entre les époques entières  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Une remarque similaire pourrait être faite à propos de la figure 4, qui représente la probabilité de ruine périodique  $|_{t-1} q$ . Nous y observons que les trois courbes des cas n<sup>os</sup> 2, 3 et 4, qui sont très séparées au début (pour de petites valeurs de  $t$ ), se coupent dans la région  $t = 140$ , puis forment un fuseau assez serré. Le temps qui s'écoule semble gommer les différences de risque et éliminer l'effet de l'asymétrie. Sans doute s'agit-il là d'une application du théorème central limite: la distribution conditionnelle de  $U_t$  (selon (8)) tend vers un histogramme assez symétrique. De fait, à la fin des 150 périodes, nous constatons que le mode de la répartition des valeurs de  $U_{150}$  est assez constant d'un cas à l'autre, si l'on déduit les écarts dûs aux différences de provisions initiales  $U$  (voir tableau IV).

Nous avons pu vérifier que les variables aléatoires du deuxième groupe nous conduisent à des conclusions semblables, dans les cas n<sup>os</sup> 7, 8 et 9 (voir les tableaux V et VII, ainsi que les figures 5 et 6).

#### 4.3 *Evolution du risque*

Nous nous situons ici dans un contexte où les trois variables du premier groupe se voient appliquer la même prime  $\Pi = 1,1$  et une provision de fluctuation propre à leur conférer une borne supérieure de 10 %. Il s'agit donc d'examiner ici les cas n<sup>os</sup> 1, 3 et 5 du tableau IV.

On remarque tout d'abord que les provisions  $U$  ainsi déterminées varient de 24 à 26, ce qui n'est pas beaucoup par rapport à ces valeurs d' $U$ , mais ce qui n'est pas négligeable comparé à la valeur de la prime  $\Pi$ . En fait, il serait impensable, pour une compagnie d'assurance, de constituer une provision de fluctuation de plus de 24 primes annuelles! Ce qu'il faut bien observer ici, c'est que l'unité de temps n'est pas précisée; elle est certainement beaucoup plus courte que l'année, de l'ordre de grandeur de la semaine peut-être. Dans ces conditions, l'in vraisemblance apparente de la valeur d' $U$  par rapport à  $\Pi$  disparaît, car  $\Pi$  n'est la prime que d'une très courte période. Une réflexion analogue nous permet de vérifier que le choix de la valeur de  $\text{Var}(X)$  par rapport à  $E(X)$  est d'un ordre de grandeur acceptable dans la réalité.

Reprenons à nouveau la figure 3, pour  $y$  constater que, pour  $t = 150$ , le risque le plus élevé est celui du cas n<sup>o</sup> 1. Après réflexion, ce n'est pas très étonnant si l'on se

rappelle que plus une distribution de probabilités est «dangereuse», et plus la limite effective du risque de ruine à l'infini est basse par rapport à la borne supérieure  $\varepsilon$  (cf. [12]). Comme les trois cas que nous observons ont la même borne  $\varepsilon$ , et comme ils présentent un coefficient d'asymétrie (donc un «danger») croissant, la courbe du cas n° 1 tend vers une probabilité de ruine à l'infini qui est plus élevée que celle des cas n°s 3 et 5. Cette caractéristique se marque déjà après 150 périodes.

Au début du temps d'observation, en revanche, les trois risques présentent un classement inverse jusqu'à un point d'intersection commun aux trois courbes. La comparaison des figures 4 et 6 révèle une similarité certaine dans l'évolution des risques présentés par les variables du premier et du second groupe. Dans ce dernier, les trois graphes ont également une intersection commune, puis tendent, pour de grandes valeurs de  $t$ , à devenir parallèles à des niveaux de risque différents.

#### 4.4 *Moment le plus dangereux pour l'assureur*

Cette période particulière se caractérise par le fait que la probabilité de (première) ruine  ${}_t q$  est maximale. En termes mathématiques, on définit donc ce moment  $T$  par la relation

$$T \text{ tel que } {}_t q \leqslant {}_{T-1} q \text{ pour tout } t. \quad (23)$$

Il est notoire que le niveau du risque a une influence sur cette époque  $T$  (voir par exemple [7]); ce qu'il nous paraît intéressant de voir ici, c'est l'importance du coefficient d'asymétrie  $\gamma_1$  à cet égard.

Revenons par conséquent à l'étude des cas n°s 2, 3 et 4, qui ne se différencient que par la valeur de  $\gamma_1$  ( $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\Pi$  et  $U$  étant par ailleurs identiques dans ces trois exemples). La figure 4 et le tableau IV nous montrent que plus le coefficient d'asymétrie est grand, et plus l'instant  $T$  est proche de l'origine du temps (ce qui est conforme à l'intuition). Il convient de relever que l'ampleur des différences dues à l'accroissement de l'asymétrie n'est pas négligeable; de plus, le deuxième groupe de variables aléatoires (cas n°s 7, 8 et 9) nous indique qu'à un niveau de risque (variance) plus élevé, la modification de  $T$  est supérieure en valeur absolue, mais moindre comparativement à l'ordre de grandeur de  $T$  (cf. tableau V et figure 6).

On relève enfin, et ce dans les deux groupes de cas-types, que si la variation de l'asymétrie est compensée par une modification d' $U$  en sorte que la borne supérieure  $\varepsilon$  de la probabilité de ruine reste la même (cas n°s 1, 3 et 5,



respectivement 6, 8 et 10), la valeur de  $T$  demeure assez constante. Il s'agit là d'une propriété intéressante, dont il reste toutefois à démontrer strictement la généralité!

## 5. Conclusion

Nous avons voulu mettre en évidence l'influence isolée de l'asymétrie de la distribution collective des sinistres sur le risque de ruine auquel est soumis le portefeuille d'assurances. Pour ce faire, nous avons mis sur pied un modèle non paramétrique basé sur la notion d'entropie d'une expérience, qui nous permet de calculer des fonctions de répartition, étant donné un certain nombre de moments – en l'occurrence trois. Il s'avère que ce modèle est efficace, parce qu'il permet une représentation réaliste du risque collectif moyennant un nombre restreint d'hypothèses de départ et des calculs dont l'ordinateur vient à bout en quelques secondes seulement.

Nous avons, par cette méthode, déterminé deux groupes de distributions dont les deux premiers moments sont identiques respectivement, seul le troisième (et les suivants) étant différents d'une répartition à l'autre. La comparaison des probabilités de ruine afférentes à ces diverses variables nous a permis de mettre en évidence certains résultats dignes d'intérêt.

En premier lieu, l'augmentation de l'asymétrie de la distribution du montant total des sinistres contribue à accroître le risque significativement, mais dans une mesure bien moindre que celle de la variance ou de l'espérance mathématique. Deuxièmement, selon que l'asymétrie est forte ou non, le danger pour l'assureur n'évolue pas de manière identique; et si ce dernier fait usage, pour fixer le niveau de la provision de fluctuation nécessaire à sa stabilité, du critère de la borne supérieure  $\varepsilon$  de Lundberg, le risque qu'il encourt réellement par la suite est d'autant plus faible que l'asymétrie de la distribution du risque collectif est forte. Ce résultat paradoxal provient de ce que la marge de sécurité offerte par ledit critère est inversement proportionnelle au risque inhérent au portefeuille assuré. Enfin, nous avons pu observer que la variation des moments supérieurs au deuxième a une incidence certaine sur le «moment critique» pour l'assureur (à savoir l'époque où la probabilité de se ruiner est la plus forte); plus l'asymétrie est élevée, et plus vite ce cap délicat est atteint.

Notre conclusion rejoint celle de l'article de *Berliner* et *Lev* [3], à savoir que le concept d'entropie maximale ouvre des possibilités nouvelles d'investigation des problèmes actuariels. Les quelques applications que nous avons effectuées dans

cette publication ont montré que le modèle exposé a des avantages certains, par rapport à d'autres approches plus traditionnelles; il peut fournir des solutions numériques à des problèmes concrets de manière relativement aisée, et c'est là un aspect auquel nul praticien ne restera insensible.

Philippe Maeder  
Avenue du Temple 19  
1012 Lausanne

## Bibliographie

- [1] *Amsler, M.-H.* (1975): La ruine et sa contre-utilité. Bull. Ass. Act. Suisses, 75, pp. 167–181.
- [2] *Bakhvalov, N.* (1976): Méthodes numériques. Mir, Moscou.
- [3] *Berliner, B., Lev, B.* (1980): On the use of the maximum entropy concept in insurance. Actes XXI<sup>e</sup> Congrès Int. d'Act., Zürich/Lausanne, tome 1, pp. 47–62.
- [4] *Bühlmann, H.* (1970): Mathematical methods in risk theory. Springer, Berlin.
- [5] *Dubois, P.* (1962): Introduction à la théorie de l'information. Bull. Ass. Act. Suisses, 62, pp. 275–292.
- [6] *Kauppi, L., Ojantakanen, P.* (1969): Approximations of the generalized Poisson function. ASTIN Bull. V, 2, pp. 213–226.
- [7] *Maeder, P.* (1979): Evolution à court terme du risque de ruine d'un portefeuille d'assurances. Thèse, Université de Lausanne.
- [8] *Pentikäinen, T.* (1977): On the approximation of the total amount of claims. ASTIN Bull. IX, 3, pp. 281–289.
- [9] *Seal, H. L.* (1972): Numerical calculation of the probability of ruin in the Poisson/exponential case. Bull. Ass. Act. Suisse, 72, pp. 77–98.
- [10] – (1977): Approximations to risk theory's  $F(x, t)$  by means of the Gamma distribution. ASTIN Bull. IX, 1 + 2, pp. 213–218.
- [11] – (1978): From aggregate claims distribution to probability of ruin. ASTIN Bull. X, 1, pp. 47–53.
- [12] *Segerdahl, C. O.* (1957): If a risk business goes bankrupt, when does it occur? – A basis for fixing net retention. Some numerical illustrations. Actes XV<sup>e</sup> Congrès Int. d'Act., New York, tome 2, pp. 280–287.

## Appendice

Tableau I

Probabilités de ruine du modèle Poisson-exponentiel

$$E(X)=1 \quad \text{Var}(X)=2 \quad \text{Asym}(X)=\frac{3}{\sqrt{2}} \cong 2,12$$

a)  $\Pi = 1$  (marge: 0)  $R = 0$

Cas t	U = 1		U = 10	
	lt <sup>q</sup> exacte	entropie maximale	lt <sup>q</sup> exacte	entropie maximale
1	0,24594	0,14373	0,00033	0,00000
2	0,37196	0,24482	0,00149	0,00057
3	0,45089	0,31867	0,00370	0,00200
4	0,50611	0,37507	0,00696	0,00434
5	0,54748	0,41973	0,01119	0,00754
6	0,57995	0,45612	0,01624	0,01151
7	0,60632	0,48648	0,02200	0,01613
8	0,62828	0,51228	0,02831	0,02131
9	0,64693	0,53457	0,03507	0,02693
10	0,66303	0,55406	0,04218	0,03293
20	0,75499	0,66956	0,11863	0,10058
30	0,79802	0,72571	0,18209	0,16523
40	0,82423	0,76044	0,24605	0,22075
50	0,84232	0,78463	0,29422	0,26774

b)  $\Pi = 1,1$  (marge: 10%)  $R = 0,0909091$  (exact)  
 $R = 0,0910315$  (entropie maximale)

Cas \ t	U = 1		U = 10	
	$lt^q$ exacte	entropie maximale	$lt^q$ exacte	entropie maximale
1	0,23806	0,17561	0,00031	0,00001
2	0,35457	0,28081	0,00135	0,00054
3	0,42598	0,35148	0,00323	0,00178
4	0,47528	0,40265	0,00590	0,00371
5	0,51189	0,44166	0,00923	0,00625
6	0,54043	0,47257	0,01312	0,00931
7	0,56347	0,49778	0,01742	0,01278
8	0,58255	0,51883	0,02204	0,01657
9	0,59870	0,53674	0,02689	0,02061
10	0,61258	0,55221	0,03190	0,02483
20	0,69061	0,64036	0,08215	0,06906
30	0,72607	0,68097	0,12416	0,10774
40	0,74711	0,70520	0,15731	0,13903
50	0,76128	0,72157	0,18369	0,16430

Tableau II

*Probabilités de ruine du modèle Polya-Gauss/Pareto*

$$E(X) = 10 \quad \text{Var}(X) = 120 \quad \text{Asym}(X) \cong 2,1 \quad \Pi = 12 \text{ (marge: 20\%)}$$

Modèle original:  $R = 0,026237$  Entropie maximale:  $R = 0,026416$

Cas t	U = 0		U = 10		U = 20	
	$ t^q$ exacte	entropie maximale	$ t^q$ exacte	entropie maximale	$ t^q$ exacte	entropie maximale
1	0,297022	0,281312	0,123118	0,123380	0,051490	0,048059
2	0,408658	0,390256	0,201800	0,202233	0,097356	0,092350
3	0,469972	0,450980	0,255631	0,256123	0,134882	0,129000
4	0,509569	0,490631	0,294954	0,295449	0,165494	0,159084
5	0,537622	0,518934	0,325081	0,325559	0,190773	0,184028
6	0,558716	0,540328	0,348991	0,349444	0,211952	0,204987
7	0,575246	0,557158	0,368481	0,368909	0,229940	0,222828
8	0,588599	0,570793	0,384706	0,385108	0,245405	0,238191
9	0,599640	0,582092	0,398443	0,398821	0,258841	0,251556
10	0,608939	0,591625	0,410236	0,410591	0,270624	0,263289
11	0,616887	0,599786	0,420477	0,420810	0,281041	0,273671
12	0,623766	0,606857	0,429458	0,429769	0,290315	0,282919
13	0,629781	0,613046	0,437400	0,437691	0,298624	0,291210
14	0,635087	0,618510	0,444475	0,444747	0,306109	0,298682
15	0,639803	0,623370	0,450817	0,451070	0,312886	0,305450
16	0,644024	0,627721	0,456534	0,456770	0,319048	0,311607
17	0,647822	0,631640	0,461714	0,461932	0,324676	0,317230
18	0,651259	0,635186	0,466428	0,466630	0,329832	0,322384
19	0,654382	0,638411	0,470734	0,470921	0,334574	0,327124
20	0,657233	0,641354	0,474684	0,474855	0,338946	0,331496
21	0,659845	0,644051	0,478317	0,478474	0,342990	0,335540
22	0,662245	0,646531	0,481670	0,481812	0,346739	0,339289
23	0,664458	0,648818	0,484772	0,484901	0,350223	0,342774
24	0,666504	0,650933	0,487650	0,487766	0,353469	0,346020
25	0,668401	0,652894	0,490326	0,490430	0,356498	0,349050
$\epsilon$	1,000000	1,000000	0,769226	0,767850	0,591866	0,589594

Tableau III

*Variables aléatoires d'entropie maximale*Pour les 6 distributions ci-dessous,  $E(X) = 1$  et  $h = 0,275$ *Premier groupe*

no.	Var(X)	Asym(X)	n	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
I	2	1	40	0,633756742	6,865623546	-3,546045522	0,508782908
II	2	2	80	1,158219671	2,064259678	-0,458413784	0,039504477
III	2	3	120	1,347952488	1,308548443	-0,112854729	0,004804738

*Second groupe*

no.	Var( $\lambda$ )	Asym( $\lambda$ )	n	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
IV	3	2	70	0,822572741	3,386487847	-0,907040209	0,074942524
V	3	3	100	1,112899961	1,932767915	-0,283106126	0,014838244
VI	3	4	160	1,241821424	1,506799444	-0,140324094	0,004889578

Tableau IV

*Cas type du premier groupe*

Cas no.	Variable no.	U	R	borne sup. $\xi$	T	$10^4 \cdot \frac{U}{T-1} q$	mode de $U_{150} - U$
1	I	24,03	0,095801	10,0 %	81	3,855	15,675
2	I	25,14	0,095801	9,0 %	87	3,291	15,675
3	II	25,14	0,091602	10,0 %	80	3,558	16,500
4	III	25,14	0,087552	11,1 %	72	3,791	17,325
5	III	26,30	0,087552	10,0 %	78	3,279	17,050

Tableau V

*Cas types du second groupe*

Cas no.	Variable no.	U	R	borne sup. $\xi$	T	$10^4 \cdot \frac{U}{T-1} q$	mode de $U_{150} - U$
6	IV	37,11	0,062055	10,0 %	118	2,526	16,775
7	IV	38,44	0,062055	9,2 %	126	2,222	16,775
8	V	38,44	0,059893	10,0 %	117	2,357	17,600
9	VI	38,44	0,057825	10,8 %	108	2,483	18,425
10	VI	39,82	0,057825	10,0 %	116	2,202	18,425

Tableau VI  
 Probabilités de ruine  $|_t q$   
 Premier groupe de variables aléatoires

Cas no. t	1	2	3	4	5
5	0,000000	0,000000	0,000000	0,000006	0,000003
10	0,000000	0,000000	0,000008	0,000090	0,000055
15	0,000013	0,000006	0,000077	0,000355	0,000235
20	0,000112	0,000058	0,000296	0,000866	0,000599
25	0,000395	0,000231	0,000727	0,001640	0,001173
30	0,000929	0,000583	0,001396	0,002665	0,001954
35	0,001734	0,001145	0,002299	0,003910	0,002927
40	0,002796	0,001918	0,003411	0,005339	0,004065
45	0,004084	0,002887	0,004703	0,006916	0,005342
50	0,005560	0,004027	0,006142	0,008607	0,006731
55	0,007185	0,005309	0,007695	0,010382	0,008207
60	0,008923	0,006706	0,009335	0,012215	0,009747
65	0,010743	0,008191	0,011038	0,014085	0,011334
70	0,012619	0,009742	0,012782	0,015975	0,012951
75	0,014529	0,011339	0,014550	0,017870	0,014585
80	0,016454	0,012965	0,016328	0,019758	0,016224
85	0,018380	0,014606	0,018104	0,021630	0,017859
90	0,020295	0,016251	0,019869	0,023479	0,019483
95	0,022190	0,017891	0,021616	0,025299	0,021089
100	0,024057	0,019518	0,023338	0,027086	0,022674
105	0,025892	0,021125	0,025031	0,028836	0,024233
110	0,027690	0,022709	0,026691	0,030547	0,025763
115	0,029448	0,024265	0,028316	0,032218	0,027263
120	0,031164	0,025790	0,029904	0,033847	0,028730
125	0,032837	0,027283	0,031454	0,035433	0,030163
130	0,034465	0,028742	0,032965	0,036977	0,031562
135	0,036048	0,030166	0,034436	0,038478	0,032927
140	0,037586	0,031554	0,035868	0,039937	0,034256
145	0,039080	0,032906	0,037260	0,041354	0,035551
150	0,040530	0,034222	0,038613	0,042731	0,036811



Tableau VII

*Probabilités de ruine  $|_t q$* *Deuxième groupe de variables aléatoires*

Cas no. t	6	7	8	9	10
5	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000000
10	0,000000	0,000000	0,000002	0,000018	0,000011
15	0,000004	0,000002	0,000020	0,000086	0,000058
20	0,000029	0,000017	0,000080	0,000236	0,000165
25	0,000103	0,000064	0,000207	0,000490	0,000353
30	0,000255	0,000166	0,000424	0,000858	0,000633
35	0,000507	0,000343	0,000742	0,001343	0,001010
40	0,000871	0,000608	0,001166	0,001942	0,001484
45	0,001353	0,000968	0,001695	0,002646	0,002050
50	0,001950	0,001425	0,002323	0,003446	0,002701
55	0,002655	0,001975	0,003044	0,004331	0,003430
60	0,003459	0,002613	0,003848	0,005290	0,004228
65	0,004351	0,003332	0,004726	0,006314	0,005087
70	0,005322	0,004122	0,005667	0,007390	0,005998
75	0,006358	0,004977	0,006663	0,008511	0,006954
80	0,007451	0,005886	0,007705	0,009668	0,007947
85	0,008590	0,006843	0,008785	0,010854	0,008971
90	0,009766	0,007838	0,009895	0,012061	0,010019
95	0,010972	0,008867	0,011029	0,013284	0,011086
100	0,012201	0,009921	0,012180	0,014517	0,012168
105	0,013445	0,010996	0,013345	0,015757	0,013259
110	0,014701	0,012086	0,014518	0,016998	0,014357
115	0,015962	0,013186	0,015696	0,018238	0,015458
120	0,017225	0,014294	0,016874	0,019474	0,016559
125	0,018486	0,015404	0,018050	0,020702	0,017657
130	0,019742	0,016515	0,019221	0,021922	0,018750
135	0,020990	0,017623	0,020385	0,023130	0,019837
140	0,022229	0,018726	0,021540	0,024326	0,020916
145	0,023455	0,019823	0,022684	0,025508	0,021984
150	0,024668	0,020910	0,023816	0,026675	0,023042

## Résumé

Se basant sur la notion d'entropie maximale d'une distribution, l'auteur met sur pied un modèle mathématique permettant de calculer des probabilités de ruine à partir d'un nombre restreint de connaissances sur la distribution collective des sinistres, à savoir la valeur des trois premiers moments.

S'appuyant sur des illustrations numériques établies par cette méthode, il étudie ensuite l'influence que peut avoir une variation de l'asymétrie de la répartition du montant global des sinistres sur l'évolution du risque couru par l'assureur.

## Zusammenfassung

Auf dem Maximum-Entropie-Prinzip baut der Autor ein mathematisches Modell auf, das die Möglichkeit bietet, Ruinwahrscheinlichkeiten rechnen zu können, wenn man nur die drei ersten Momente der kollektiven Schadenverteilung kennt.

Aufgrund einiger durch diese Methode gerechneten Beispiele studiert er dann den Einfluss einer Änderung der Schiefe dieser Totalschadenverteilung auf die Entwicklung des Versichererrisikos.

## Summary

Relying on the maximum entropy principle, the author sets up a mathematical model that allows calculations of ruin probabilities, starting from only a restricted basic knowledge about the collective risk distribution, that is its first three moments.

After having computed a few numerical illustrations through this method, he studies the influence which a variation of the skewness of the accumulated claims distribution can have upon the features of the insurer's risk.

