Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1983)

Heft: 1

Artikel: Versicherungsprämien und optimales Verhalten von Konsumenten und Produzenten gegenüber Risiken

Autor: Bichsel, Fritz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967134

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FRITZ BICHSEL, Räterschen

Versicherungsprämien und optimales Verhalten von Konsumenten und Produzenten gegenüber Risiken

Die vorliegende Arbeit beruht auf einem Vortrag, den der Verfasser im Herbst 1982 an der Tagung über Risikotheorie in Oberwolfach gehalten hat. Es geht dabei um die volkswirtschaftliche Bedeutung der richtigen Bestimmung von Versicherungsprämien.
In Abschnitt 1 wird ein einfacher Satz bewiesen, der das mathematische Fundament der Arbeit darstellt. In Abschnitt 2 wird ein Modell einer Volkswirtschaft beschrieben, vorerst ohne Versicherung. Für dieses Modell gilt, dass das Gesamtresultat der Volkswirtschaft maximal wird, wenn die Agierenden (Konsumenten und Produzenten) sich bei ihren Entscheiden an das Erwartungswertprinzip halten. In Abschnitt 3 wird gezeigt, dass bei vollständiger Versicherung aller Risiken das Gesamtresultat der Volkswirtschaft maximal wird, wenn die Prämien dem Erwartungswert der Schäden entsprechen. Abschnitt 4 enthält ergänzende Bemerkungen.

1 Das mathematische Fundament

Wir betrachten Personen i, $i=1,\ldots,I$.
Jede Person i könne unter Zufallsgrössen X_{ij}, $j=1,\ldots,J$, eine auswählen.
Das Resultat dieser Wahlen ist ein Zufallsvektor. Es gibt $K=J^I$ verschiedene Möglichkeiten für diesen Zufallsvektor. Wir bezeichnen sie mit

$$\mathbf{X}^{(k)}=(X_1^{(k)},\ldots,X_I^{(k)}) \qquad k=1,\ldots,K$$

$X_i^{(k)}$ bezeichnet die durch i ausgewählte Zufallsvariable.
Nun betrachten wir die folgende *Aufgabe*:

> Wie müssen die $X_i^{(k)}$ gewählt werden, damit die *Summe* $X^{(k)}=X_1^{(k)}+\ldots+X_I^{(k)}$ maximal wird?

In dieser Form ist die Aufgabe unbestimmt, denn die $X^{(k)}$ sind Summen von Zufallsgrössen und damit selbst Zufallsgrössen, und Zufallsgrössen lassen sich nicht ohne weiteres nach der Höhe vergleichen.
Damit die Aufgabe bestimmt wird, treffen wir

Voraussetzung 1

Es seien:

a) Die Anzahl I der Personen gross genug,

b) Für jede mögliche Auswahl k die ausgewählten Zufallsvariablen $X_1^{(k)}, \ldots, X_I^{(k)}$ genügend unabhängig und nicht so verschieden voneinander, dass die Summe

$$X^{(k)} = X_1^{(k)} + \ldots + X_I^{(k)}$$

«praktisch konstant» ist infolge des Gesetzes der grossen Zahlen. «Praktisch konstant» soll heissen, dass die *relative* Standardabweichung der Zufallsgrösse $X^{(k)}$ sehr klein ist.

Diese Voraussetzung könnte exakter formuliert werden. Im vorliegenden Zusammenhang wird darauf verzichtet.

Nun kann die Summe $X^{(k)}$ als praktisch konstant betrachtet werden, und die Aufgabe ist daher jetzt praktisch bestimmt.

Um sie leicht lösen zu können, treffen wir

Voraussetzung 2

Für alle i und k gelte:

$E[X_i^{(k)}]$ hängt nur von der Wahl der Person i und nicht von den Wahlen ab, die die andern Personen getroffen haben.

Die einfache Lösung lautet nun:

Satz 1

$X^{(k)}$ ist maximal dann und nur dann, wenn für jedes i $E[X_i^{(k)}]$ maximal ist unter den $E[X_{ij}]$, $\quad j = 1, \ldots, J$.

In grober, anschaulicher Formulierung: Das gemeinsame Resultat wird maximal, wenn jeder einzelne seinen Erwartungswert maximiert, d.h. sich risikoneutral verhält.

Beweis von Satz 1

Nach Voraussetzung 1 ist

$$X^{(k)} \simeq E[X^{(k)}] = E[X_1^{(k)}] + \ldots + E[X_I^{(k)}]$$

($\simeq$ bedeutet «praktisch gleich»).

Nach Voraussetzung 2 ist jeder Summand rechts unabhängig von den andern. Die Summe ist daher maximal genau dann wenn jeder einzelne Summand maximal ist.

2 Das volkswirtschaftliche Modell, ohne Versicherung

Wir betrachten eine Volkswirtschaft mit Konsumenten und Produzenten, gemeinsam bezeichnet als Agierende i, $i=1,\ldots,I$, während einer Zeitperiode T. Zu Beginn von T kann jeder Agierende i unter Plänen P_{ij}, $j=1,\ldots,J$, wählen. Jeder Plan P_{ij} ergibt eine Zufallsgrösse X_{ij}, die wie folgt definiert ist:

Für Konsumenten:
$X_{ij}=$ Konsum während T
$+$ Vermögen am Ende von T
$-$ Vermögen am Anfang von T

Für Produzenten
$X_{ij}=$ Vermögen am Ende von T
$-$ Vermögen am Anfang von T

Für die Produzenten nehmen wir zur Vereinfachung an, dass während T keine Ausschüttung von Gewinnen stattfinde. Im vorliegenden Zusammenhang ist das keine wesentliche Einschränkung.
Damit die einzelnen Summanden von X_{ij} und später die X_{ij} selbst addiert werden können, müssen wir eine *Bewertung* vorgeben. Dies geschieht wie folgt:

Einheit: Schweizerfranken, zahlbar am Ende von T.

Bewertung für Konsumenten:
Für Konsum und Vermögen: subjektives Äquivalent zu Schweizerfranken, zahlbar am Ende von T.

Bewertung für Produzenten:
Wir nehmen an, dass in der Volkswirtschaft Preise gegeben sind für den Austausch von Gütern und Dienstleistungen. Die Bewertung des Vermögens der Produzenten erfolge zu diesen Preisen.

Bemerkung: Mit der vorstehenden Bewertung wird ein intersubjektiver Nutzenvergleich und damit die Betrachtung des Gesamtnutzens möglich.

Das volkswirtschaftliche Modell und die Bewertung seien an zwei Beispielen erläutert.

Beispiel A

Der Agierende 1, ein Konsument, habe die Wahl zwischen den Plänen

P_{10}: Kein Auto kaufen
P_{11}: Ein Auto kaufen und vorsichtig fahren
P_{12}: Ein Auto kaufen und leichtsinnig fahren

Für die Wahl zwischen P_{10} *und* P_{11} ist die Differenz $X_{11} - X_{10}$ zu betrachten. Entsprechend der obigen Definition der Zufallsvariablen X_{ij} besteht die Differenz aus den folgenden zwei Teilen (das Vermögen am Anfang von T ist für alle Pläne gleich und daher die Differenz $= 0$):

Mehrkonsum während T durch den Kauf des Autos:
Äquivalent in Franken am Ende von T für das Vergnügen aus der Benützung des Autos (Vergnügen am Fahren an sich, Möglichkeit von Reisen usw.)

Differenz im Vermögen am Ende von T:
Erhöhung durch die Ersparnisse im Vergleich zu Transport ohne Auto
– Verminderung durch Kosten des Autos, zu denen insbesondere auch die Zahlungen gehören für Schäden, die Dritten durch den Betrieb des Autos zugefügt werden.

Die Differenz $X_{12} - X_{11}$, die für die Wahl zwischen P_{11} *und* P_{12} zu betrachten ist, setzt sich wie folgt zusammen:

Mehrkonsum während T:
Erhöhung des Vergnügens durch das leichtsinnige Fahren (Äquivalent in Franken am Ende von T)

Differenz im Vermögen am Ende von T:
Verminderung durch die Mehrkosten infolge des leichtsinnigen Fahrens
= Aufwand für eigene Schäden und andern zugefügte Schäden.

Beispiel B

Der Agierende 2, ein Produzent, habe die Wahl zwischen den Plänen

P_{20}: Kein Atomkraftwerk bauen
P_{21}: Ein Atomkraftwerk bauen mit Sicherheitsmassnahmen gemäss Plan 1

P_{22}: Ein Atomkraftwerk bauen mit Sicherheitsmassnahmen gemäss Plan 2 (weniger weitgehend als Plan 1)

$X_{21} - X_{20}$ ergibt sich aus
Erlös aus dem Verkauf von Strom
– Kosten für den Bau und Betrieb des Werks, insbesondere auch für Schäden, die Dritten zugefügt werden.

$X_{22} - X_{21}$:
Ersparnis beim Bau und beim Betrieb infolge der weniger weitgehenden Sicherheitsmassnahmen
– Höhere Kosten für allfällige eigene Schäden und Schäden, die Dritten zugefügt werden.

Wir kommen nun zum Kern dieser Arbeit, nämlich zum *Problem*:
Maximiere das Gesamtresultat der Volkswirtschaft, nämlich
$X^{(k)} = X_1^{(1)} + \ldots + X_I^{(k)}$
wobei $X_i^{(k)}$, analog zu Abschnitt 1, das Resultat aus dem vom Agierenden i gewählten Plan $P_i^{(k)}$ bezeichnet.

Wir können das Problem auch so formulieren:
Nach welcher Regel sollen die Agierenden ihre Pläne wählen, damit das Gesamtresultat der Volkswirtschaft maximal wird?
Unter Vorbehalt der Prüfung der Voraussetzungen können wir Satz 1 anwenden und erhalten

Satz 2

Das Resultat der Volkswirtschaft wird maximal, wenn jeder Agierende seinen Erwartungswert maximiert.

Wir haben nun noch zu prüfen, was die Voraussetzungen des Satzes 1 für unser volkswirtschaftliches Modell bedeuten.

Voraussetzung 1 besagt im wesentlichen, dass für die Volkswirtschaft als Ganzes das Gesetz der grossen Zahlen spielt. Diese Voraussetzung wird im allgemeinen praktisch erfüllt sein, wenn eine Volkswirtschaft gross genug ist. Es ist kaum mit einzelnen zufälligen Ereignissen zu rechnen, die das Gesamtresultat einer Volkswirtschaft wesentlich ändern.

Voraussetzung 2 bedingt, dass im volkswirtschaftlichen Modell folgendes gilt:

A. Jeder Agierende kann seinen Plan unabhängig von den andern wählen.
B. Die Preise in der Volkswirtschaft hängen nicht von den Wahlen der Agierenden ab.
C. Die Wirkungen der Wahlen eines Agierenden i auf die andern Agierenden werden durch Zahlungen ausgeglichen.

A dürfte im allgemeinen annähernd erfüllt sein.
B ist sicher nicht erfüllt für abgeschlossene Volkswirtschaften ohne Austausch von Gütern und Dienstleistungen mit andern Volkswirtschaften. Für offene Volkswirtschaften jedoch mit intensivem Austausch mit anderen Volkswirtschaften (wie zum Beispiel die schweizerische Volkswirtschaft) kann B annähernd als erfüllt betrachtet werden.
C ist erfüllt, wenn der Austausch von Gütern und Dienstleistungen zu Marktpreisen erfolgt und durch die Gesetzgebung über Haftpflicht dafür gesorgt wird, dass andern zugefügter Schaden durch Zahlungen ausgeglichen werden muss.

3 Versicherung

In dieser Arbeit wird der Versicherer nicht als einer der Agierenden der Volkswirtschaft, sondern sozusagen als Deus ex machina betrachtet.
Nach Abschnitt 2 müssen die Agierenden einer Volkswirtschaft sich risikoneutral verhalten, wenn das Gesamtresultat maximal sein soll. In Wirklichkeit haben die Agierenden im allgemeinen eine Risikoaversion, und das maximale Resultat wird daher – ohne Versicherung – nicht erreicht.
Wie ist es mit Versicherung?
Wir nehmen an, dass jeder Agierende i für jeden zur Wahl stehenden Plan P_{ij} eine «Versicherung» abschliessen könne, die die Zahlung von

$$E[X_{ij}] - X_{ij} \tag{1}$$

garantiert.
«Versicherung» ist hier in Anführungszeichen gesetzt, weil es sich nicht um eine Versicherung in der üblichen Form handelt. Es ist keine Prämie vorgesehen. Der Versicherer findet seinen Ausgleich darin, dass die von ihm gemäss (1) versprochene Zahlung manchmal positiv und manchmal negativ ist.

Wenn X_{ij} gegen oben beschränkt ist auf M_{ij}, können wir (1) so transformieren, dass eine Versicherung der üblichen Form entsteht, und zwar wie folgt:

$$E[X_{ij}] - M_{ij} + [M_{ij} - X_{ij}] \tag{2}$$

$M_{ij} - X_{ij}$ ist dann die Leistung des Versicherers und $M_{ij} - E[X_{ij}]$ die nach dem Erwartungswertprinzip berechnete Versicherungsprämie.
Mit der Versicherung gemäss (1) oder (2) wird das Resultat des Agierenden i, der den Plan P_{ij} wählt,

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= X_{ij} + E[X_{ij}] - X_{ij} \\ &= E[X_{ij}] \end{aligned}$$

Das Resultat ist somit konstant. Der Agierende hat kein Risiko mehr, es wird ihm vom Versicherer vollständig abgenommen. Wir bezeichnen daher die Versicherung nach Formel (1) als *vollständige Versicherung*.
Mit der vollständigen Versicherung gemäss (1) wird der Agierende unter den Plänen P_{ij} jenen auswählen, der $Y_{ij} = E[X_{ij}]$ maximiert, d.h. er wird sich risikoneutral verhalten.
Mit Satz 2 erhalten wir damit

Satz 3

Wenn die Möglichkeit zum Abschluss von vollständigen Versicherungen gemäss (1) besteht und jeder Agierende einer Volkswirtschaft sich so verhält, dass sein Resultat maximal wird, wird das Gesamtresultat der Volkswirtschaft maximal.

Das ist das Hauptresultat dieser Arbeit.
Ganz wesentlich ist hier natürlich, dass der Versicherer $E[X_{ij}]$ für jeden Plan P_{ij} richtig berechnet.

4 Bemerkungen

a. Die Voraussetzungen, unter denen das Hauptresultat von Satz 3 abgeleitet wurde, sind in der Wirklichkeit nicht vollständig erfüllt. Der Verfasser ist jedoch der Ansicht, dass das Resultat trotzdem einen wesentlichen Aspekt unseres Wirtschaftslebens widerspiegelt. Man könnte das verwendete Modell etwa mit Newton'scher Mechanik ohne Berücksichtigung der Reibung vergleichen. Die Reibung spielt in der Wirklichkeit eine wesentliche Rolle, und doch führen Modelle ohne Reibung zu wichtigen Erkenntnissen über die Wirklichkeit.

b. Ganz wesentlich ist, dass der Versicherer durch die richtige Berechnung der Prämie eine wichtige volkswirtschaftliche Funktion erfüllt. Seine Funktion besteht nicht nur darin, Risiken zu übernehmen, sondern auch – durch die richtige Berechnung der Prämie für die verschiedenen Pläne, unter denen der Versicherte wählen kann – diesen zu jener Wahl zu veranlassen, die zur Maximierung des Resultats der gesamten Volkswirtschaft führt.
So wird zum Beispiel der Versicherer durch die richtige Anpassung der Prämie an die vom Versicherten getroffenen Sicherheitsmassnahmen diesen veranlassen, diese zu optimieren (was nicht gleich bedeutend ist mit maximieren!).

c. Das Resultat dieser Arbeit darf nicht so verstanden werden, dass die Kosten- und Gewinnmarge der Versicherer volkswirtschaftlich schädlich sei. In Wirklichkeit ist der Versicherer nicht ein Deus ex machina, sondern ein Agierender der Volkswirtschaft, der für seinen Aufwand und für das von ihm getragene Risiko Anspruch hat auf eine angemessene Entschädigung.
Es ist möglich, Modelle zu konstruieren, die dieser Tatsache Rechnung tragen. Das wesentliche Resultat dieser Arbeit, wie es in Anmerkung b zusammengefasst ist, wird auch in solchen komplizierteren Modellen grundsätzlich gültig bleiben.

d. *«moral hazard»*
In unserem Modell haben wir angenommen, dass nach der Wahl eines Planes P_{ij} die Zufallsgrösse X_{ij} nicht mehr vom Verhalten der Person i abhängt. Damit ist auch vorausgesetzt, dass X_{ij} nicht davon abhängt, ob i eine Versicherung abgeschlossen hat oder nicht.
Diese Voraussetzung ist in Wirklichkeit nicht erfüllt. Das hat zur Folge, dass die Versicherung auch eine negative Wirkung auf das Gesamtresultat einer Volkswirtschaft ausüben kann.
Es ist eine wichtige, aber auch schwierige Aufgabe der Versicherungswirtschaft, die angebotenen Versicherungen so zu gestalten, dass die positiven Auswirkungen im Sinne von Abschnitt 3 durch die negativen des «moral hazard» möglichst wenig beeinträchtigt werden.

Fritz Bichsel
Auwiesenstr. 8
8352 Räterschen

Zusammenfassung

Es wird ein mathematisches Modell einer Volkswirtschaft dargestellt, für welches folgendes gilt:

a) Ohne Versicherung wird das Gesamtresultat der Volkswirtschaft maximal, wenn die Konsumenten und Produzenten ihre Entscheide so treffen, dass der Erwartungswert ihrer Resultate maximiert wird.

b) Bei vollständiger Versicherung aller Risiken wird das Gesamtresultat der Volkswirtschaft maximal, wenn die Prämien den von den Versicherten getroffenen Entscheiden angepasst werden, indem sie den Erwartungswerten entsprechen, die sich aufgrund dieser Entscheide ergeben. Das heisst insbesondere, dass die Prämien die von den Versicherten getroffenen Sicherheitsmassnahmen berücksichtigen müssen.

Résumé

L'auteur propose, pour décrire l'économie d'un pays, un modèle mathématique pour lequel:

a) sans assurance, le résultat global de l'économie est maximal lorsque les consommateurs et producteurs se comportent de façon à maximiser en espérance mathématique leurs propres résultats,

b) avec couverture complète d'assurance, le résultat global de l'économie est maximal lorsque les primes sont adaptées aux dispositions prises par les assurés, c.à.d. correspondent aux espérances mathématiques conditionnées par les décisions prises. Cette propriété exige en particulier que les primes tiennent compte des mesures de sécurité prises par les assurés.

Summary

The paper presents a mathematical model of an economy for which the following holds:

a) Without insurance the overall result of the economy is maximized if the agents (consumers and producers) take their decisions so that the expectancy of their individual results is maximized.

b) With complete insurance of all risks the total result of the economy is maximized if the premiums are related to the decisions taken by the insured so that they correspond to the expected values resulting from these decisions. In particular this means that premiums have to reflect the safety measures taken by the insured.