Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Band: - (1984)

Heft: 1

Artikel: Untere Grenzen für Selbstbehalte von Schadenexzedenten

Autor: Schmitter, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555030

Hans Schmitter, Zürich

Untere Grenzen für Selbstbehalte von Schadenexzedenten

1 Einleitung

Wer die Höhe eines Selbstbehalts festzulegen hat, richtet sich normalerweise nach dem Selbstbehalt des Vorjahres oder nach dem, was im Markt etwa gebräuchlich ist. Ein technischeres Vorgehen schliesst er dagegen im allgemeinen aus, weil er seine Schadenverteilung nicht kennt.

Ohne jegliche Kenntnis der Schadenverteilung geht es natürlich nicht; aber schon aufgrund der rudimentären Angaben von Erwartungswert und Varianz der Einzelschadenverteilung kann man zumindest eine untere Grenze des Selbstbehalts bestimmen. Dies wird im vorliegenden Artikel hergeleitet.

2 Formulierung der Aufgabe und Angabe der Lösungen

Die Jahresschadenlast sei zusammengesetzt poissonverteilt. Wir verwenden die folgende Notation:

λ	Poissonparameter
X	Einzelschadenvariable
$E=E[X]$	Erwartungswert des Einzelschadens
$V=\mathrm{Var}[X]$	Varianz des Einzelschadens
d	Priorität des Schadenexzedenten
$(X-d)^+$	Exzessschaden, wobei $(X-d)^+ = \begin{cases} 0 & \text{falls } X\leqslant d \\ X-d & \text{falls } X>d \end{cases}$
$E(d)=E[(X-d)^+]$	
$Y=X-(X-d)^+$	Schaden im Selbstbehalt
$\lambda E(1+a)$	Prämie nach Abzug aller Kosten, aber vor Rückversicherung. Der erwartete Gewinn beträgt also λEa, wobei wir $a>0$ voraussetzen.
$\lambda E(d)\ (1+c)$	Schadenexzedentenprämie. Die Zuschläge auf der Schadenexzedenten-Risikoprämie betragen also $\lambda E[(X-d)^+]c$, wobei wir auch $c>0$ voraussetzen.
$\lambda(Ea-E(d)c)$	erwarteter Gewinn im Selbstbehalt.

Die Priorität d ist so zu bestimmen, dass der erwartete Gewinn im Selbstbehalt möglichst gross wird; das Verhältnis zwischen dem erwarteten Gewinn und der Varianz der Selbstbehaltsschadenlast, $\lambda E[Y^2]$, darf dabei aber eine gewisse willkürliche Schranke v nicht unterschreiten. D.h.:

$$\frac{Ea - E(d)c}{E[Y^2]} \geqslant v \tag{1}$$

Diese letzte Forderung (1) ist folgendermassen begründet:
Wenn die Summe aus n unabhängigen Jahresrisiken Z_i $(i=1,\ldots,n)$ asymptotisch normalverteilt ist und der erwartete Gewinn des i-ten Risikos G_i beträgt, so kann man annähernd die Verlustwahrscheinlichkeit

$$\text{Prob}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i > \sum_{i=1}^{n} (E[Z_i] + G_i)\right) = p$$

berechnen. Diese Verlustwahrscheinlichkeit ist durch das Verhältnis

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} G_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \text{Var}\,[Z_i]}} = 2v \tag{2}$$

bestimmt.
Schliesst man ein beliebiges Risiko, z.B. das n-te, aus dem Bestand aus, so verändert sich die Verlustwahrscheinlichkeit nicht, falls auch

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} G_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}\,[Z_i]}} = 2v. \tag{3}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \text{Var}\,[Z_i]} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}\,[Z_i]} + \frac{1}{2}\,\text{Var}\,[Z_n]$$

folgt aus (2) und (3)

$$\frac{G_n}{\text{Var}\,[Z_n]} = v, \tag{4}$$

d.h. das Verhältnis zwischen erwartetem Gewinn und Varianz ist v.

Im Spezialfall der zusammengesetzten Poissonverteilung, wo
$Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_K$,
$E[K] = \lambda$ und
$\mathrm{Var}\,[Z] = \lambda(E[Y]^2 + \mathrm{Var}\,[Y])$ ist,
folgt aus (4) die Beziehung (1).

Im nachfolgenden Abschnitt 3 wird hergeleitet, dass die oben formulierte Aufgabe genau die auf der folgenden Seite aufgeführten Lösungen besitzt.

3 Die ungünstigsten Einzelschadenverteilungen

In diesem Abschnitt konstruieren wir die Einzelschadenverteilung F, die zu gegebenen E, V, d und $E(d)$ den Wert $E[Y^2]$ maximiert oder, was auf das gleiche herauskommt, $E[(X-d)^{+2}]$ minimiert. Das Ergebnis sind zwei Verteilungstypen:

Falls $E(d) \leqslant E - d\,\dfrac{E^2}{E^2+V}$, ist

$$F(t) = \begin{cases} F(0) = 1 - \dfrac{E - E(d)}{d} & \text{für} \quad 0 \leqslant t < d \\ F(d) = 1 - \dfrac{E(d)^2}{E^2 + V - dE - dE(d)} & \text{für} \quad d \leqslant t < x = \dfrac{E^2 + V - Ed}{E(d)} \\ 1 & \text{für} \quad x \leqslant t \end{cases} \tag{5}$$

Falls $E - d\,\dfrac{E^2}{E^2+V} \leqslant E(d) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{V + (E-d)^2} + E - d\right)$, ist

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqslant t < x_1 = E - \sqrt{\dfrac{V(1-F)}{F}} \\ F & \text{für} \quad x_1 \leqslant t < x_2 = E + \sqrt{\dfrac{VF}{1-F}} \\ 1 & \text{für} \quad x_2 \leqslant t \end{cases} \tag{6}$$

F ist die kleinere der beiden Lösungen von $(1-F)\,(x_2 - d) = E(d)$.

Parameter a	Parameter c	Priorität d
$a \geqslant v \dfrac{E^2+V}{E}$	$c>0$	∞
$Ev \geqslant a$	$0<c\leqslant a$	$d=\dfrac{c}{2v}\left(1+\sqrt{1-4v\dfrac{c-a}{c^2}E}\right)$
$v\dfrac{E^2+V}{E}>a\geqslant Ev$	$0<c\leqslant a$	$d=\dfrac{a}{v}$
$v\dfrac{E^2+V}{E}>a$	$a\leqslant c\leqslant 2v\dfrac{E^2+V}{E}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{a}{v}\dfrac{E}{E^2+V}}\right)$	$d=\dfrac{c}{2v}\left(1+\sqrt{1-4v\dfrac{c-a}{c^2}\dfrac{E^2+V}{E}}\right)$
	$2a<c$	keine Lösung

Die Abbildungen 1 und 2 illustrieren beide Verteilungstypen.
Die schraffierte Fläche stellt E(d) dar.

Abbildung 1

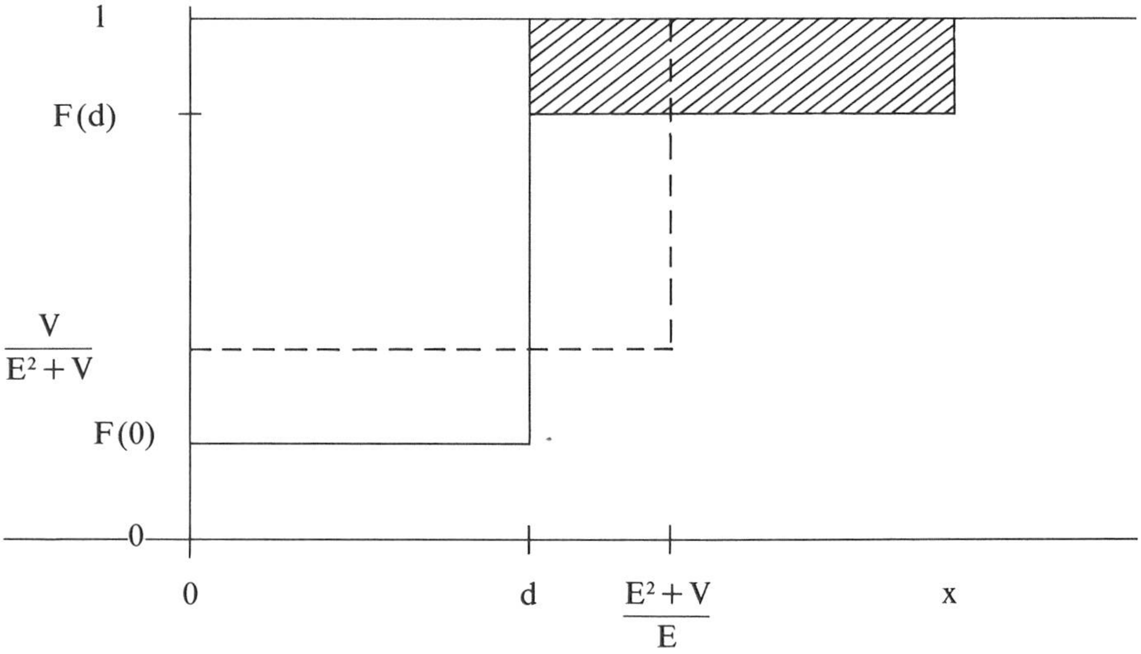
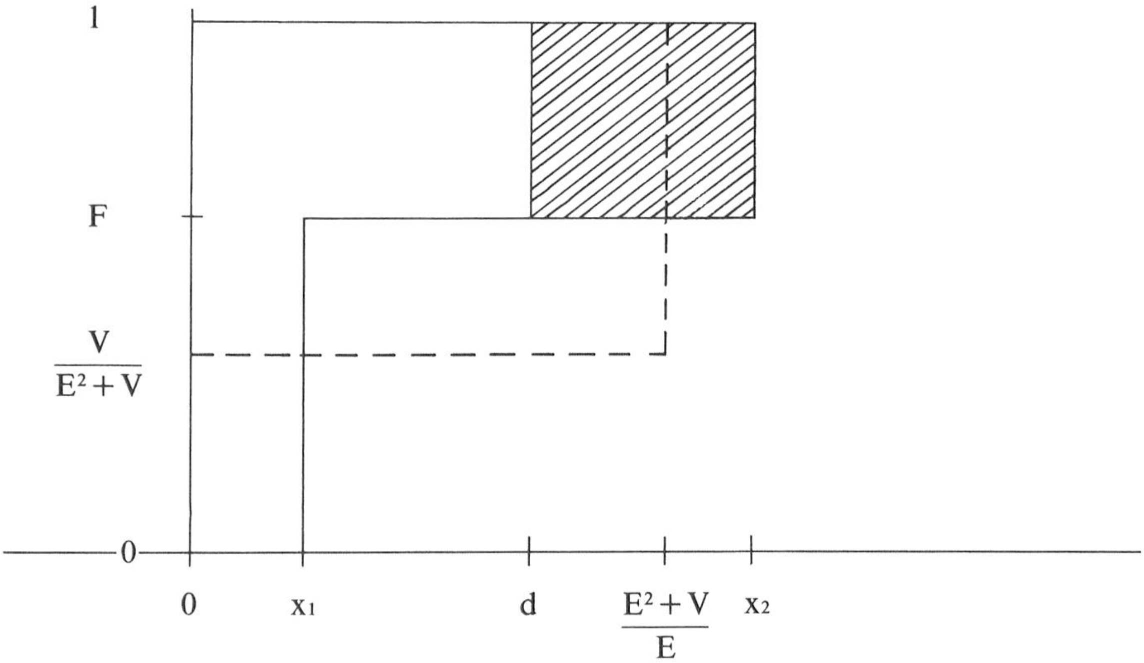


Abbildung 2



Um die Verteilung zu finden, die $E[(X-d)^{+2}]$ minimiert, brauchen wir als erstes die Beziehung

$$E[(X-d)^{+2}] \geqslant \frac{E(d)^2}{1-F(d)} \tag{7}$$

Beweis: Setzt man $x = \frac{E(d)}{1-F(d)} + d$

in der Definition von $E[(X-d)^{+2}]$ ein, so wird

$$\begin{aligned}
E[(X-d)^{+2}] &= \int_d^\infty (t-d)^2 dF(t) = \int_d^\infty (x-d-(x-t))^2 dF(t) \\
&= \frac{E(d)^2}{1-F(d)} + \int_d^\infty (x-t)^2 dF(t) - 2(x-d) \int_d^\infty (x-d+(d-t)) dF(t) \\
&= \frac{E(d)^2}{1-F(d)} + \int_d^\infty (x-t)^2 dF(t) - 2(x-d)^2 (1-F(d)) \\
&\quad + 2(x-d) E[(X-d)^+] \\
&= \frac{E(d)^2}{1-F(d)} + \int_d^\infty (x-t)^2 dF(t) \geqslant \frac{E(d)^2}{1-F(d)}
\end{aligned}$$

$E[(X-d)^{+2}]$ wird zu gegebenem $F(d)$ und $E(d)$ dann minimal, wenn F von der Form

$$F(t) = \begin{cases} F(d) & \text{für} \quad d \leqslant t \leqslant \dfrac{E(d)}{1-F(d)} + d \\[2ex] 1 & \text{für} \quad t > \dfrac{E(d)}{1-F(d)} + d \end{cases} \tag{8}$$

ist, denn für Verteilungen, die (8) erfüllen, ist Ungleichung (7) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt.

Die Höhe von $F(d)$ und der Verlauf von $F(t)$ für $t < d$ hängen von E und V ab. Eine obere Schranke von $F(0)$ ist durch

$$1 - F(0) \leqslant \frac{E - E(d)}{d} \tag{9}$$

gegeben. Weil $F(0) \leqslant F(d)$ und $E[X^2] = E^2 + V$ sein muss, kann $F(0)$ diese obere Schranke nur bei genügend grossem V annehmen, d.h. von der Form (5) sein.

Für jede Verteilung G mit E, V und $E(d) \leqslant E - d \dfrac{E^2}{E^2+V}$, die (8) erfüllt, ist $G(d) \geqslant F(d)$.

Beweis:

$$E^2 + V = E[X^2|X \leqslant d]G(d) + E[X^2|X > d]\ (1 - G(d))$$

$$= \int_0^d t^2 dG(t) + \left(d + \frac{E(d)}{1 - G(d)}\right)^2 (1 - G(d)) \text{ wegen (8).}$$

Durch partielle Integration erhält man

$$E^2 + V = d^2 + 2\,dE(d) + \frac{E(d)^2}{1 - G(d)} - 2 \int_0^d tG(t)\,dt. \tag{10}$$

Falls G von F verschieden ist, gibt es ein z, $0 < z < d$, so dass

$$G(t) < F(t) = F(0) \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t < z$$

$$G(t) > F(t) = F(0) \quad \text{für} \quad z < t < d.$$

Daraus und aus (10) folgt

$$\frac{E(d)^2}{1 - G(d)} - \frac{E(d)^2}{1 - F(d)} = 2 \int_0^d t(G(t) - F(t))\,dt$$

$$= 2 \left(\int_0^z t(G(t) - F(t))\,dt + \int_z^d t(G(t) - F(t))\,dt \right)$$

$$> 2z \left(\int_0^z (G(t) - F(t))\,dt + \int_z^d (G(t) - F(t))\,dt \right).$$

Weil

$$E - E(d) = d - \int_0^d G(t)\,dt = d - \int_0^d F(t)\,dt,$$

verschwindet die rechte Seite der letzten Ungleichung. Daraus folgt $G(d) \geqslant F(d)$.

Somit ist für den Fall $E(d) \leqslant E - d\dfrac{E^2}{E^2 + V}$ die ungünstigste Verteilung gefunden.

Für jede Verteilung G mit $E[X] = E$, $\mathrm{Var}[X] = V$ und $E(d) \geqslant E - d\,\dfrac{E^2}{E^2 + V}$ ist $G(d) \geqslant F$, wobei F gemäss (6) definiert ist.

Für den Beweis sind ein paar Eigenschaften der Verteilungen $F(t)$ gemäss (6) nötig:

F1) $F(t)$ erfüllt (8).

F2) $E(d) = (1 - F)\ (x_2 - d)$ erreicht als Funktion von F das Maximum bei

$$F_{\max} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E - d}{\sqrt{V + (E - d)^2}}\right).$$

(Die Definition von x_2 steht in (6).)

Beweis:
$$\frac{d}{dF}E(d) = -(E-d) + \frac{V}{2}\frac{(1-2F)}{\sqrt{VF(1-F)}}$$

wird 0 an der Stelle $F_{\max}$.

F3)
$$E(d)_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{V+(E-d)^2} + E - d\right).$$

Verteilungen der Art (6) erreichen also den grösstmöglichen Wert von $E[(X-d)^+]$ zu gegebenem $E[X]=E$ und $\mathrm{Var}[X]=V$, wie beispielsweise in [3] und [4] bewiesen wird.

F4)
$$\text{Für } \frac{V}{V+E^2} \leqslant F \leqslant F_{\max} \text{ ist } x_1 + x_2 \leqslant 2d.$$

(Auch die Definition von x_1 steht in (6).)
Nach (6) ist nämlich
$$x_1 + x_2 = 2E - \sqrt{\frac{V(1-F)}{F}} + \sqrt{\frac{VF}{1-F}},$$

und die Abteilung nach F
$$\frac{d}{dF}(x_1+x_2) = \frac{V}{2\sqrt{VF(1-F)}}\left(\frac{1}{1-F} + \frac{1}{F}\right) > 0.$$

Bis zur Stelle $F_{\max}$ wächst somit $x_1 + x_2$, und bei $F_{\max}$ erreicht $x_1 + x_2$ gerade $2d$. Um die Behauptung $G(d) \geqslant F$ zu beweisen, betrachten wir eine Verteilung $G(t)$ mit $E_G[X]=E$, die (8) erfüllt. Weil
$$E \geqslant d(1-G(d)) + E(d), \text{ ist } G(d) \geqslant 1 - \frac{E-E(d)}{d}.$$

Ausgehend von $G(t)$ bilden wir eine Verteilung $\tilde{G}(t)$:
$$\tilde{G}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < z_1 = \dfrac{E-E(d)-d(1-G(d))}{G(d)} \\[2ex] G(d) & \text{für} \quad z \leqslant t < z_2 = d + \dfrac{E(d)}{1-G(d)} \\[2ex] 1 & z_2 \leqslant t. \end{cases}$$

Aus der Definition von $\tilde{G}(t)$ folgt

G1) $$G(t) \geqslant \tilde{G}(t) \quad \text{für} \quad t < z_1$$

G2) $$G(t) \leqslant \tilde{G}(t) \quad \text{für} \quad t \geqslant z_1$$

G3) $$E_{\tilde{G}}[X] = E$$

G4) $$\int_0^d G(t)\,dt = \int_0^d \tilde{G}(t)\,dt = d + E(d) - E$$

Nun ist $E_G[X^2] \geqslant E_{\tilde{G}}[X^2]$, denn nach partieller Integration ist

$$E_G[X^2] = -2\int_0^d tG(t)\,dt + d^2 + 2\,dE(d) + \frac{E(d)^2}{1-G(d)}$$

und

$$E_{\tilde{G}}[X^2] = -2\int_0^d t\tilde{G}(t)\,dt + d^2 + 2\,dE(d) + \frac{E(d)^2}{1-G(d)},$$

also

$$\begin{aligned} E_G[X^2] - E_{\tilde{G}}[X^2] &= 2\int_0^d t(\tilde{G}(t) - G(t))\,dt \\ &\geqslant 2\left(z_1 \int_0^{z_1} -G(t)\,dt + z_1 \int_{z_1}^d (G(d) - G(t))\,dt\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus den Eigenschaften G1), G2) und G4). Bezeichnen wir $G(d)$ mit G und $E_G[X^2]$ mit $h(G)$, so ist

$$\begin{aligned} h(G) &= z_1^2 G + z_2^2(1-G) \\ &= \frac{(E - E(d) - d)^2}{G} + 2\,dE - d^2 + \frac{E(d)^2}{1-G}, \end{aligned}$$

somit die Ableitung nach G

$$\begin{aligned} \frac{d}{dG}\,h(G) &= \frac{E(d)^2}{(1-G)^2} - \frac{(E - E(d) - d)^2}{G^2} \\ &= \left(\frac{E(d)}{1-G} + \frac{E - E(d) - d}{G}\right)\left(\frac{E(d)}{1-G} - \frac{E - E(d) - d}{G}\right). \end{aligned}$$

Weil für $E(d) > E - d\dfrac{E^2}{E^2+V}$

$E-E(d)-d<0$ ist, wird $\dfrac{d}{dG}h(G)<0$, solange $\dfrac{E(d)}{1-G}+\dfrac{E-E(d)-d}{G}<0$ ist.

Gemäss (6) ist $\dfrac{E(d)}{1-F}=x_2-d$ und $\dfrac{E-E(d)-d}{F}=x_1-d$, und nach Eigenschaft F4) ist $x_1+x_2<2d$ für $F<F_{\max}$.

Daher ist $h(G)<0$ für $G(d)<F$, was bedeutet:

$$E_F[X^2] < E_{\tilde{G}}[X^2] \leqslant E_G[X^2] \quad \text{für} \quad G(d)<F$$

bzw.:

$$\text{Aus } E_G[X^2] \leqslant E_F[X^2] \quad \text{folgt} \quad F \leqslant G(d).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

4 Bestimmung von d für die ungünstigsten Einzelschadenverteilungen

Nach Abschnitt 3 kennen wir zu jedem $E(d)$ die Verteilung, die $E[Y^2]$ maximiert bzw., wenn $Ea-E(d)c>0$, $\dfrac{Ea-E(d)c}{E[Y^2]}$ minimiert. Wir bezeichnen das Minimum, das dieser Ausdruck dabei annimmt, mit $w(d)$.

1. Fall: $E(d) \leqslant E-d\dfrac{E^2}{E^2+V}$.

Weil $F(t)$ in diesem Fall von der Art (5) ist, ist $E[Y^2]=d(E-E(d))$,

$$w(d)=\frac{Ea-E(d)c}{(E-E(d))d} \text{ und} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dE(d)}\,w(d)=\frac{E(a-c)}{(E-E(d))^2 d}. \tag{12}$$

Für $a>c$ ist $w(d)$ umso kleiner, je kleiner $E(d)$ ist bzw. $F(0)$ ist.

Die grösste untere Schranke von $F(0)$ ist

$$\inf\left\{F(0)=1-\frac{E-E(d)}{d}\right\}=\begin{cases}1-\dfrac{E}{d} & \text{für} \quad E(d)=0,\, E\leqslant d\\ 0 & \text{für} \quad E(d)=E-d,\, E\geqslant d.\end{cases}$$

Man beachte, dass eine Verteilung, für die

$$F(0)=1-\frac{E}{d} \text{ und } E(d)=0,$$

nicht zur Klasse der Verteilungen mit $E[X]=E$ und $\mathrm{Var}[X]=V$ gehört, sondern eine kleinere Varianz hat.

Im ersten Fall, $d \geqslant E$, ist das Infimum von $w(d)$, gebildet über alle $E(d)$, $\inf_{E(d)} w(d)=\frac{a}{d}$, und nach (1) darf diese Infimum gleich v sein. Damit ist

$$d=\frac{a}{v} \quad \text{für} \quad a \geqslant c, \quad \frac{a}{v} \geqslant E. \tag{13}$$

Im zweiten Fall, $d \leqslant E$, erreicht $w(d)$ ein Minimum,

$\operatorname{Min}_{E(d)} w(d)=\frac{Ea-(E-d)c}{d^2}$, was wieder gleich v werden soll.

Fordert man noch, dass d als Funktion von a zunehmen soll, wird

$$d=\frac{c}{2v}\left(1+\sqrt{1-4v\frac{c-a}{c^2}E}\right) \quad \text{für} \quad a \geqslant c, \quad \frac{a}{v} \leqslant E. \tag{14}$$

Für $a<c$ wird in (12) $\frac{d}{dE(d)}\, w(d)$ umso kleiner, je grösser $E(d)$ ist und erreicht das Minimum bei $E(d)=E-d\,\frac{E^2}{E^2+V}$, dem höchsten Wert, der für Verteilungen der Art (5) zugelassen ist.

Dann ist

$$d=\frac{c}{2v}\left(1+\sqrt{1-4v\frac{c-a}{c^2}\,\frac{E^2+V}{E}}\right), \tag{15}$$

wobei wieder das Vorzeichen der Wurzel durch die Forderung, dass d mit a wachsen soll, bestimmt ist.

2. Fall: $E(d) \geqslant E-d\,\frac{E^2}{E^2+V}$, $F(t)$ von der Art (6).

Zu bestimmen ist F so, dass $w(d)$ möglichst klein, aber immer noch positiv wird, unter der Bedingung

$$F_{\min}=\frac{V}{V+E^2} \leqslant F \leqslant F_{\max}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{E-d}{\sqrt{V+(E-d)^2}}\right).$$

Die Ableitung von $w(d)$ nach F hat das Vorzeichen von

$$u(F)=-E[Y^2]\; c\,\frac{d}{dF}\,E(d)-(Ea-cE(d))\,\frac{d}{dF}\,E[Y^2].$$

Durch Umformung erhält man

$$E[Y^2] = E^2 + (E^2 + V)(1-F) - 2E\,E(d) + (1-F)(d^2 - 2\,Ed)$$

oder

$$\frac{d}{dF}E[Y^2] = -(E^2+V) - 2E\frac{d}{dF}E(d) - (d^2 - 2\,Ed),$$

woraus folgt:

$$u(F) = (Ea - cE(d))(V + (E-d)^2) + (E^2(2a-c) - c(1-F)(V+(E-d)^2))\frac{d}{dF}E(d). \tag{16}$$

Zur Abklärung des Vorzeichens von $u(F)$ benötigen wir

$$\frac{d}{dF}E(d) = -(E-d) + \frac{V(1-2F)}{2\sqrt{VF(1-F)}} \quad \text{und} \tag{17}$$

$$\frac{d^2}{dF^2}E(d) = -\frac{V}{4F(1-F)\sqrt{VF(1-F)}} < 0. \tag{18}$$

Setzt man in (17) und (16) für F

$F_{\min} = \dfrac{V}{E^2+V}$ ein, so wird $u(F_{\min}) = (2a-c)\dfrac{Ed^2}{2}$.

Weil $Ea - cE(d) > 0$ und $\dfrac{d}{dF}E(d) \geqslant 0$ für $F_{\min} \leqslant F \leqslant F_{\max}$ $\left(F_{\max}\right.$ ist ja durch die Forderung $\left.\dfrac{d}{dF}E(d) = 0 \text{ bestimmt worden}\right)$, ist $u(F) \geqslant 0$ für alle zulässigen F, falls $u(F_{\min}) \geqslant 0$.

Dann ist auch die Ableitung $\dfrac{d}{dF}w(d) \geqslant 0$, und $w(d)$ nimmt seinen kleinsten Wert bei $F_{\min} = \dfrac{V}{E^2+V}$ an. Also führt $2a - c > 0$ wieder auf (15).

Ist hingegen $u(F_{\min}) < 0$, so gibt es Verteilungen F, die ungünstiger sind als

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{E^2+V} & \text{für} \quad t < \dfrac{E^2+V}{E} \\[2ex] 1 & \phantom{\text{für}} \quad t \geqslant \dfrac{E^2+V}{E} \end{cases}$$

Dann ist $w(d) < \dfrac{E^2+V}{E}\,\dfrac{a-c}{d^2} + \dfrac{c}{d}$.

Der Ausdruck rechts vom Ungleichheitszeichen wächst mit d, denn seine Ableitung beträgt

$$\frac{1}{d^2}\left(2(c-a)\,\frac{E^2+V}{Ed}-c\right)\geqslant\frac{c-2a}{d^2}\qquad\left(\text{weil } d\leqslant\frac{E^2+V}{E}\right).$$

Setzt man in $w(d)$ $\quad d=\dfrac{E^2+V}{E}$, so resultiert $w(d)<\dfrac{Ea}{E^2+V}$.

Dies bedeutet, dass Rückversicherung das Verhältnis zwischen Gewinn und Varianz noch verschlechtert, falls $c>2a$ ist.

Somit ist (15) die einzige Lösung für $a<c$. Damit die Wurzel reell wird, muss

$$c\leqslant 2v\,\frac{E^2+V}{E}\left(1-\sqrt{1-\frac{a}{v}\,\frac{E}{E^2+V}}\right)\quad\text{sein.}$$

5 Vergleich mit proportionaler Rückversicherung

In diesem Abschnitt bezeichnet

r den proportionalen Selbstbehalt und

$\lambda(1-r)E(1+b)$ die proportionale Rückversicherungsprämie.

Wir setzen $b>0$ voraus.

r ist so zu bestimmen, dass der erwartete Gewinn Gp im Selbstbehalt,

$$G_p=\lambda(Ea-(1-r)bE),$$

möglichst gross wird, wobei aber

$$\frac{Ea-(1-r)bE}{r^2(E^2+V)}\geqslant v\ \text{sein soll.}$$

Die Lösung ist

$$r=\frac{E}{E^2+V}\,\frac{b}{2v}\left(1+\sqrt{1-4v\,\frac{b-a}{b^2}\,\frac{E^2+V}{E}}\right)$$

$$\text{für}\quad 0<b\leqslant 2v\,\frac{E^2+V}{E}\left(1-\sqrt{1-\frac{a}{v}\,\frac{E}{E^2+V}}\right). \tag{19}$$

Ein Vergleich mit (15) zeigt, dass für $b=c\geqslant a$

$$\frac{E-E(d)}{E}=r \text{ wird.} \tag{20}$$

Das muss ja auch so herauskommen, denn wenn $E(d)=E-d\,\frac{E^2}{E^2+V}$ ist, sind alle Schäden Totalschäden; dann unterscheiden sich proportionale und nichtproportionale Rückversicherung nicht mehr.

Im Falle $d\leqslant E$, $c\leqslant a$ zeigt der Vergleich mit (14), wo $E(d)=E-d$, dass

$$\frac{E-E(d)}{E}\geqslant r \text{ wird, falls } b=c \text{ ist.} \tag{21}$$

Dann wird auch der erwartete Gewinn G_N nach nichtproportionaler Rückversicherung,

$$G_N=\lambda(Ea-E(d)c),$$

grösser als G_p.

Im letzten Fall, $E\leqslant d=\frac{a}{v}$ für $c\leqslant a$, ist $E(d)<E-d\,\frac{E^2}{E^2+V}$, weshalb wiederum

$$\frac{E-E(d)}{E}\geqslant r \text{ und } G_N\geqslant G_p \text{ für } b=c \text{ ist.} \tag{22}$$

Das heisst aber nicht etwa, dass bei $b=c$ der erwartete Gewinn nach dem Schadenexzedenten mit Priorität d mindestens gleich gross ist wie nach einer Quotenabgabe von $1-r$. Es heisst nur: Wenn der Schadenexzedentenselbstbehalt einen kleineren Gewinn erwarten lässt als der Quotenselbstbehalt, dann hat man es mit einer Einzelschadenverteilung zu tun, für die

$$\frac{Ea-E[(X-d)^+]c}{E[Y^2]}>v \text{ ist.}$$

Hans Schmitter
Schweizer Rück
Postfach 172
8022 Zürich

Literatur

[1] *Finetti, B. de:* Il problema dei «pieni». Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Roma, Anno XI, No. 1, 1940, S. 1–88.

[2] *Straub, E.:* How to fix retention. MVSM, 78. Band, Heft 1, 1978, S. 95–104.

[3] *Bowers, N. L.:* An upper bound on the stop-loss net premium – actuarial note. Transactions, Vol. XXI, Part I, June, 1969, S. 211–217.

[4] *de Vylder, F, Denderleeuw und Goovaerts, M.:* Upper and Lower Bounds on Stop-loss Premiums in Case of Known Expectation and Variance of the Risk Variable. MVSM, Heft 1, 1982, S. 149–164.

Zusammenfassung

Eine untere Grenze für den nichtproportionalen Selbstbehalt wird aufgrund der folgenden Grössen bestimmt: Dem Erwartungswert und der Varianz des Einzelschadens, der Gewinnmargen von Erst- und Rückversicherung und dem tolerierbaren Verhältnis zwischen Gewinn und Varianz im Selbstbehalt.

Résumé

Une limite inférieure du plein de conservation par sinistre est déterminée à partir des informations suivantes: L'espérance mathématique et la variance de la distribution des sinistres, les marges de profit de l'assurance et de la réassurance ainsi que le rapport tolérable entre le profit et la variance pour propre compte.

Abstract

A lower limit for the non proportional retention is determined based on the following information: The expected value and the variance of the claims distribution, the profit margins of the direct insurer and the reinsurer and the tolerable ratio between profit and variance of the retention.