Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1985)

Heft: 2

Artikel: La participation aux excédents aléatoires

Autor: Schmutz, Raymond

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967069

Raymond Schmutz, La Tour-de-Peilz

La participation aux excédents aléatoires*

1 Introduction

La participation aux excédents en assurance collective de personnes revêt une grande importance pour les compagnies d'assurances à l'heure actuelle. Il s'agit d'une part d'un des éléments de concurrence entre les compagnies; il convient par conséquent d'offrir au preneur d'assurance la garantie d'une participation aux excédents la plus avantageuse possible. D'autre part, les marges bénéficiaires des assureurs deviennent de plus en plus restreintes et il s'avère nécessaire de fixer des critères précis pour l'attribution des bénéfices aux assurés.

La participation aux excédents obéit donc à des exigences contradictoires et il n'est plus possible de travailler de manière empirique dans ce domaine.

Les objectifs poursuivis par la présente étude sont les suivants:

- déterminer de manière scientifique et sur la base de critères objectifs les taux de participation aux excédents de contrats d'assurance collective de personnes;
- montrer que le système de participation décrit est une manière d'atténuer les fluctuations du risque pour l'assureur;
- présenter une application pratique avec des valeurs réelles.

Le présent article est un résumé de [6]. L'accent est mis sur les idées de base et les principaux résultats. Le lecteur intéressé par les détails et les développements peut obtenir un exemplaire de [6] auprès de l'auteur.

2 Définitions et modèle mathématique

L'élaboration du modèle mathématique est conduite par la question suivante: étant donné un contrat d'assurance collective de personnes avec une clause de participation aux excédents sous forme de «compte d'assurance sans report de perte», quelle est la part du bénéfice maximum attribuable au preneur d'assurance permettant d'équilibrer les résultats du contrat pour l'assureur? Nous désignons par:

* Exposé présenté à l'Assemblée générale de l'Association, le 21 septembre 1985 à Neuchâtel.

X la variable aléatoire représentant le montant total des sinistres pendant une période déterminée (ci-après toujours 1 année)
P la prime de risque de 2e ordre
λP le chargement de sécurité appliqué à la prime de risque
P' la prime pure de 1er ordre
P'' la prime brute
$\varepsilon P''$ le chargement d'exploitation et la marge bénéficiaire de l'assureur
μ le taux de participation aux excédents
B la variable aléatoire représentant le bénéfice global (preneur et assureur)
G la variable aléatoire représentant le bénéfice accordé au preneur
R la variable aléatoire représentant le résultat d'exploitation de l'assureur.

Les hypothèses de base du modèle sont les suivantes:

1^re^ hypothèse: la prime de risque de 2e ordre est égale à l'espérance mathématique du total annuel des sinistres, c'est-à-dire

$$P = E(X) \tag{1}$$

2^e^ hypothèse: le chargement $\varepsilon P''$ n'occasionne ni bénéfice, ni perte.

Dans ces conditions, la prime brute est égale à

$$P'' = P(1+\lambda)/(1-\varepsilon) \tag{2}$$

et la prime pure de 1er ordre qui est celle qui nous intéresse (selon l'hypothèse 2)

$$P' = P(1+\lambda) \tag{3}$$

Les variables aléatoires décrivant le bénéfice global et sa répartition peuvent être formulées de la manière suivante:

$$G = \begin{cases} (P'-X)\mu & \text{si } X < P' \\ 0 & \text{si } X \geqslant P' \end{cases} \tag{4}$$

Résultat de l'assureur:

$$R = \begin{cases} (P'-X)(1-\mu) & \text{si } X < P' \\ P'-X & \text{si } X \geqslant P' \end{cases} \tag{5}$$

Bénéfice global:

$$B = G + R = P' - X \tag{6}$$

En supposant connue la fonction de répartition du total annuel des sinistres $F_c(x)$, la fonction de répartition du résultat est:

$$F(r)=\begin{cases} 1-F_c(P'-r) & \text{si } R\leqslant 0 \\ 1-F_c\left\{P'-\dfrac{r}{1-\mu}\right\} & \text{si } R>0 \end{cases} \tag{7}$$

La condition d'équilibre du résultat est donnée par la relation:

$$E(R)=0 \tag{8}$$

L'espérance du résultat de l'assureur est égale à:

$$E(R)=\lambda P-\mu\phi_c(P') \tag{9}$$

où $\phi_c(P')$ est l'intégrale de la fonction de répartition du total annuel des sinistres.

On tire de (8) et (9) l'expression du taux de participation limite, noté μ_0:

$$\boxed{\mu_0=\frac{\lambda P}{\phi_c(P')}} \tag{10}$$

La limite supérieure du taux de participation μ_0 exprime le rapport entre la marge de sécurité λP qui représente également l'espérance du bénéfice global B et la quantité $\phi_c(P')$ égale à l'espérance d'un résultat positif ou le coût moyen d'une participation de 100%. On peut vérifier (voir [6]) que μ_0 est toujours compris entre 0 et 1.

3 Variance du résultat de l'assureur

Il est intéressant d'étudier la variance de la variable aléatoire R qui nous indique la mesure des fluctuations du résultat de l'assureur. Cette variance est égale à:

$$V(R)=V(X)-2\mu\{2\psi_c(P')-\lambda P\phi_c(P')\}+\mu^2\{2\Psi_c(P')-\{\phi_c(P')\}^2\} \tag{11}$$

où

$$V(R)=V(X)+V(G)+2\lambda PE(G)-\frac{2}{\mu}E(G^2)$$

avec $\Psi_c(P')=2^e$ intégration de la fonction de répartition du total des sinistres.

On démontre (voir [6]) que $V(R)$ est une fonction décroissante de la variable μ dans l'intervalle de définition de μ compris entre 0 et 1.

Cette propriété nous montre l'intérêt de ce type de participation aux excédents qui permet une diminution des écarts dans les résultats de l'assureur. Celui-ci crée par le biais de la participation aux excédents un fonds de stabilisation ou d'égalisation qui tend à diminuer les fluctuations du processus aléatoire de l'assurance.

4 Application pratique

4.1 *Loi de répartition du total annuel des sinistres provenant de contrats collectifs d'indemnités journalières en cas de maladie*

Pour décrire la distribution du total annuel des sinistres d'un contrat, nous avons choisi une loi de type lognormal. Ce choix est basé sur l'étude de 14 contrats d'indemnités journalières en cas de maladie avec un délai d'attente de 2 jours et un effectif compris entre 25 et 120 assurés.
La loi lognormale utilisée, normée à son espérance mathématique, est la suivante:

$$Y=\frac{X}{E(X)} \quad \text{suit une loi lognormale si}$$

$$f(y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}\,b}\, e^{-\frac{1}{2b^2}\left\{\ln y+\frac{b^2}{2}\right\}^2}$$

$$\text{et} \quad F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b}\int \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{1}{2b^2}\left\{\ln \tau+\frac{b^2}{2}\right\}^2} d\tau$$

Espérance mathématique: $E(Y)=1$

Variance: $V(Y)=e^{b^2}-1$

Pour un contrat donné, l'estimation du paramètre b se fait à partir de la relation le liant à la variance:

$$b^2=\ln\{V(Y)+1\} \tag{12}$$

4.2 *Relation entre l'effectif et la variance*

Dans l'étude de la statistique des 14 contrats, nous avons pu mettre en lumière une relation entre l'effectif de chaque contrat et la variance de la distribution.

Dans notre cas, cette relation est de type exponentielle:

$$V(Y) = 1{,}2\ e^{-0{,}025\,N} \tag{13}$$

où

N est l'effectif du groupe.

Un test de Student appliqué sur le coefficient de régression donne une valeur significative au seuil de 0,01 pour un nombre de degrés de liberté égal à 12. Les formules (12) et (13) permettent par conséquent de déterminer directement le paramètre de la loi lognormale par rapport à l'effectif du groupe en utilisant la méthode suivante:

1. Déterminer la variance de la loi lognormale basée sur l'effectif du groupe assuré – formule (13).
2. Déterminer le paramètre de la loi lognormale à partir de la variance – formule (12).

4.3 *Variation du taux de participation maximum* μ_0

Connaissant la loi de distribution du total annuel des sinistres de type lognormal, on peut déterminer le taux de participation μ_0 selon la formule (10). Le calcul de $\phi_c(P')$ nécessite le recours à l'ordinateur et l'utilisation de procédés d'intégration numérique, mais ne présente pas de difficultés particulières.

Nous présentons sur les deux pages suivantes la variation du taux de participation μ_0 en fonction du facteur de sécurité λ (fig. 1) et en fonction de l'effectif (fig. 2). On constate dans notre exemple que:

- le facteur de sécurité λ a une influence plus grande que l'effectif sur le taux de participation μ_0; ceci est particulièrement vrai pour les valeurs de λ jusqu'à 30% qui sont les valeurs les plus réalistes;
- la variation de μ_0 en fonction de l'effectif du groupe est quasi linéaire. Une hypothèse simplificative de linéarité serait tout-à-fait acceptable;
- si nous avons isolé les deux facteurs d'influence du taux de participation μ_0, il faut cependant indiquer qu'il existe une interaction entre ces deux facteurs. En effet, le facteur de sécurité λ dépend souvent de la variance ou de l'écart-type de la distribution des sinistres; et c'est précisément de l'effectif que nous avons fait dépendre la variance de la loi de distribution.

Fig. 1. Variation de μ_0 en fonction de λ

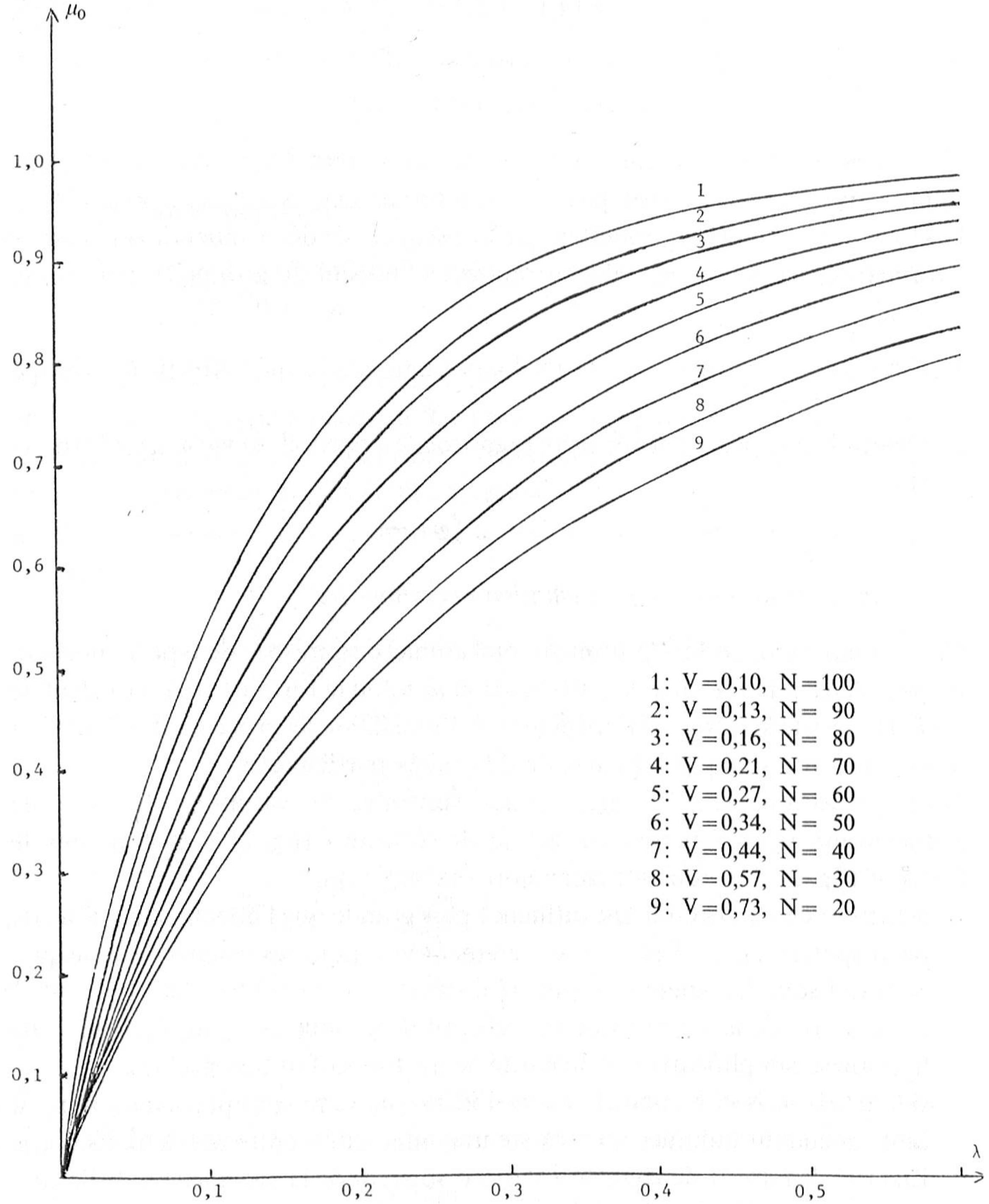
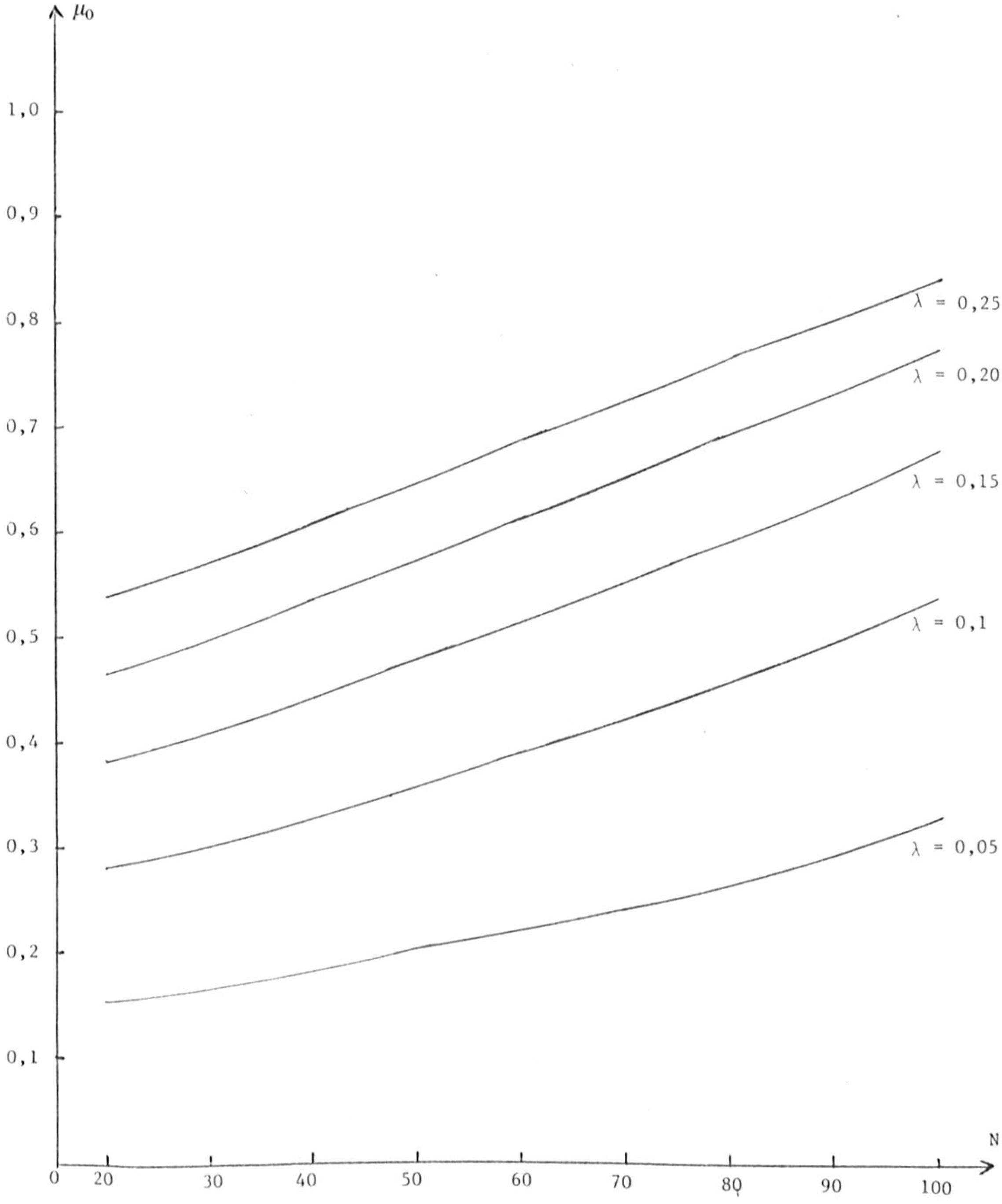


Fig. 2. Variation de μ_0 en fonction de N



4.4 *Exemple d'application tarifaire*

Supposons qu'une compagnie d'assurances ait un portefeuille de contrats collectifs du type étudié ci-dessus. Elle a fixé à 15 % de la prime pure le facteur de sécurité λ. Elle pourrait alors avoir le tableau suivant de participation aux excédents:

Effectif du groupe assuré	Taux de participation aux excédents maximum
25– 34	42 %
35– 44	45 %
45– 54	48 %
55– 64	52 %
65– 74	56 %
75– 84	60 %
85– 94	64 %
95–104	68 %
105 et plus	70 %

5 Conclusions

Nous nous sommes fixés trois objectifs au début de notre étude.
Le premier consistait à déterminer de manière scientifique et sur la base de critères objectifs la participation aux excédents de contrats d'assurance collective de personnes. Nous avons déterminé par un modèle mathématique des formules de calcul et une méthode aboutissant aux valeurs des taux de participation aux excédents. Cette méthode est basée sur des critères objectifs que sont le facteur de sécurité compris dans la prime et l'effectif du groupe assuré. Nous estimons également que ces formules ont l'avantage de la simplicité.
Le deuxième objectif visait à montrer que le système de participation aux excédents décrit est une manière d'atténuer les fluctuations du risque. L'étude de la variance du résultat de l'assureur nous éclaire effectivement à ce sujet, puisque cette variance diminue lorsque le taux de participation augmente.
Nous voulions enfin présenter une application pratique. Il est évident que les valeurs réelles indiquées ne représentent qu'une illustration du modèle et ne sauraient servir à une application directe. Nous pensons cependant que la méthode peut être utile à l'actuaire praticien pour des applications similaires.

Bibliographie

[1] *Ammeter, H.*: Stop loss cover and experience rating. Comptes rendus du XVI Congrès International d'Actuaires. Bruxelles 1960.

[2] *Ammeter, H.*: Experience rating – A new application of the collective theory of risk. Bulletin Astin 1963.

[3] *Beard, R./Pentikainen, T./Pesonen, E.*: Risk Theory. Methuen, Londres 1969.

[4] *Jones, D.A./Gerber, H.U.*: Dividend Formulas in group insurance. Transactions of the Society of American Actuaries, 1974.

[5] *Seal, H.*: Mixed Poisson Processes and risk theory. Institut de sciences actuarielles, Lausanne 1980.

[6] *Schmutz, R.*: La participation aux excédents aléatoires et son application à des contrats collectifs d'assurance maladie. Thèse HEC, Lausanne 1984.

[7] *Strickler, P.*: In welchem Ausmass kann in der Lebensversicherung der Versicherungsnehmer am Risikogewinn einzelner Gruppen oder Verträge beteiligt werden? Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses, 1982.

[8] *Zoppi, G.*: Refund Formula in Group Life Insurance. Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses, 1982.

Raymond Schmutz
Perrausaz 26
1814 La Tour-de-Peilz

Résumé

L'auteur développe un modèle mathématique décrivant le système de participation aux excédents de contrats collectifs d'assurances de personnes. Le modèle permet le calcul de taux de participation aux excédents à partir du facteur de sécurité compris dans la prime et l'effectif du groupe assuré.

Zusammenfassung

Der Autor entwickelt ein mathematisches Modell zur Beschreibung des Überschussystems von Kollektivverträgen in der Personenversicherung. Das Modell erlaubt die Berechnung des Überschussatzes in Abhängigkeit des Sicherheitszuschlages in der Prämie und der Grösse des Bestandes des Kollektivs.

Summary

The author develops a mathematical model to calculate participation in profits in group insurance. The outcome is a function of the security loading contained in the premium and of the size of the group insured.