Eine optimale Kombination von proportionalem und nichtproportionalem Selbstbehalt

Autor(en): **Schmitter, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1987)**

Heft 2

PDF erstellt am: **07.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967157

Hans Schmitter, Zürich

Eine optimale Kombination von proportionalem und nichtproportionalem Selbstbehalt

In der Rückversicherung sind sowohl rein proportionale und rein nichtproportionale Selbstbehalte als auch Kombinationen von beiden gebräuchlich. Dabei legt der Erstversicherer, der Rückversicherungsdeckung kauft, die Höhe seiner Selbstbehalte entweder einfach nach Gefühl fest, oder dann wendet er ein Prämienberechnungsprinzip an. Der vorliegende Artikel zeigt, wie er im zweiten Fall, unter der Annahme, er benütze das Varianzprinzip, eine optimale Kombination von proportionalem und nichtproportionalem Selbstbehalt bestimmen kann.

Wir setzen voraus, die Jahresschadenlast Z eines Risikos sei die Summe von K unabhängigen, identisch verteilten Einzelschäden $X_1, \ldots, X_K$, und K sei poissonverteilt.

Bezeichnen wir mit $\widetilde{Z}$ die Schadenlast im Selbstbehalt und mit $\widetilde{P}$ die Prämie, die nach Rückversicherung noch übrigbleibt, so verlangt das Varianzprinzip

$$\widetilde{P} = E[\widetilde{Z}] + v \ \mathrm{Var}[\widetilde{Z}]. \tag{1}$$

Den Faktor v legt jeder Erstversicherer nach seinen eigenen Kriterien fest. Wenn er so klein ist, dass die Prämie P vor Rückversicherung

$$P \geq E[Z] + v \ \mathrm{Var}[Z]$$

wird, ist keine Rückversicherung nötig und auch kein Selbstbehalt zu bestimmen, da nach dem Varianzprinzip P ausreicht. Einen Selbstbehalt gibt es nur dann zu bestimmen, wenn v so gross ist, dass

$$P < E[Z] + v \ \mathrm{Var}[Z].$$

Es sei

λ	der Poissonparameter
X	der Einzelschaden
F	die Verteilungsfunktion von X
$E = E[X]$	der Erwartungswert von X
$V = \mathrm{Var}[X]$	die Varianz von X
d	der nichtproportionale Selbstbehalt
$(X-d)^+$	der Exzessschaden, d. h.
$(X-d)^+ = \begin{cases} 0 & \text{falls } X \leq d \\ X-d & \text{falls } X > d \end{cases}$	
$X-(X-d)^+$	der Selbstbehaltsschaden nach Abzug des Exzessschadens
r	der proportionale Selbstbehalt ($0 < r \leq 1$).

Die Prämie betrage nach Abzug aller Kosten, aber vor Rückversicherung,

$$P = \lambda E(1+a).$$

Der erwartete Gewinn ist somit λEa. Die Zuschläge auf den Rückversicherungsrisikoprämien seien proportional zu den Risikoprämien und betragen

b	für die proportionale Rückversicherung und
c	für die nichtproportionale Rückversicherung.

Wenn der Erstversicherer eine Kombination von proportionaler und nichtproportionaler Rückversicherung wählt, reduziert er jeden Einzelschaden X auf den Selbstbehaltsschaden

$$\widetilde{X} = r(X-(X-d)^+).$$

Die Prämie, die ihm nach Rückversicherung noch bleibt, beträgt

$$\widetilde{P} = \lambda\{E\,(1+a) - (1-r)\,E\,(1+b) - rE\,[(X-d)^+](1+c)\}, \tag{2}$$

und die Varianz im Selbstbehalt, da die Schadenlast zusammengesetzt poissonverteilt ist,

$$\mathrm{Var}[\widetilde{Z}] = \lambda r^2 E\,[(X-(X-d)^+)^2]. \tag{3}$$

Als weitere Abkürzungen führen wir noch ein:

$$h = E\left[(X-d)^+\right] \tag{4}$$

und

$$k = E\left[(X-(X-d)^+)^2\right]. \tag{5}$$

Aus (1), (2), (3), (4) und (5) folgt

$$E(a-b) + r(Eb - ch) = v\,r^2\,k. \tag{6}$$

Auf der linken Seite von (6) steht, abgesehen von einem Faktor λ, der erwartete Gewinn nach Rückversicherung. Wir bezeichnen diejenige Kombination von d und r als optimal, die zum grösstmöglichen Gewinn im Selbstbehalt führt. Es ist also

$$G = E(a-b) + r(Eb - ch) \tag{7}$$

unter der Nebenbedingung (6) zu maximieren.
Diese Aufgabe besitzt nur dann reelle, positive Lösungen r und d, wenn Rückversicherung überhaupt etwas nützt, wenn sie also das Verhältnis zwischen Gewinn und Varianz im Selbstbehalt vergrössert. Wir bezeichnen dieses Verhältnis als Funktion von r und d mit w und seine partiellen Ableitungen nach r und d mit w_r und w_d. Rückversicherung vergrössert w nur dann, wenn

$$w_r < 0 \qquad \text{und} \qquad w_d < 0 \tag{8}$$

sind; nur dann gibt es Selbstbehalte d und r, bei denen w die verlangte Höhe v annimmt, wo also (6) erfüllt ist. Die Forderung (8) beschränkt bei gegebenem a die Rückversicherungszuschläge b und c nach oben. Ausserdem folgt aus ihr, dass d bei konstantem w als Funktion von r abnimmt (je weniger proportionale Rückversicherung der Erstversicherer kauft, desto mehr nichtproportionale hat er nötig und umgekehrt).
Eliminieren wir r aus (6) und (7), so erhalten wir

$$\left[G - E(a-b)\right]^2 - G\,(Eb - ch)^2 / (vk) = 0 \tag{9}$$

Abbildung 1

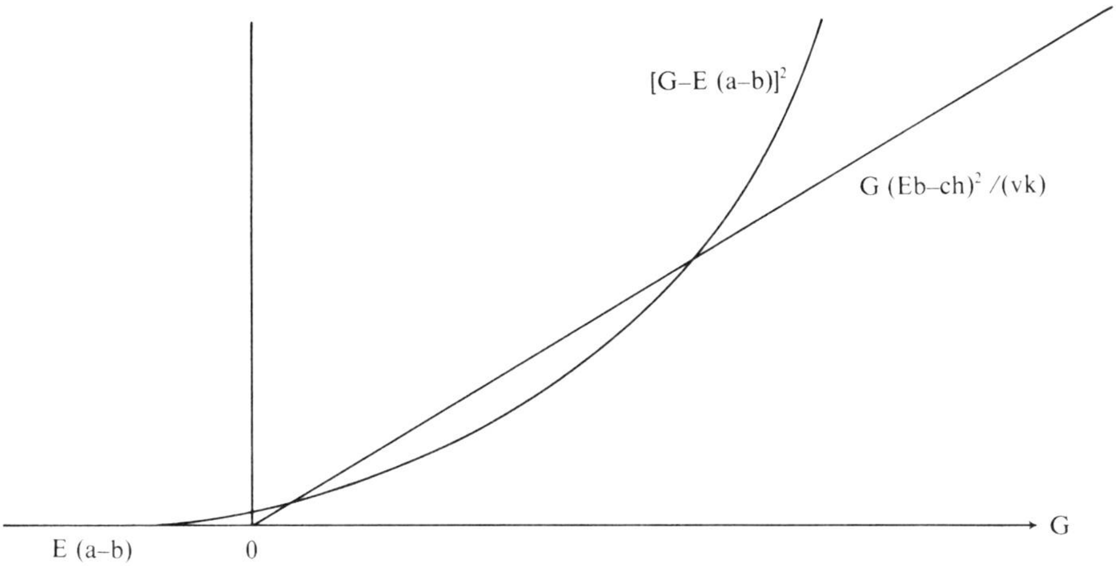


Abbildung 1 zeigt die Parabel $\left[G - E\,(a-b)\right]^2$ und die Gerade $G\,(Eb-ch)^2\,/\,(vk)$ als Funktionen von G bei festen E, a, b, h, k und v. Wenn a zu klein oder v zu gross ist, schneidet die Gerade die Parabel nicht und (9) besitzt keine reelle Lösung; andernfalls gibt es zwei reelle Lösungen. Uns interessiert nur die grössere der beiden. Man sieht dies an der Abhängigkeit von v: Je kleiner v ist, desto grösser soll der erwartete Gewinn im Selbstbehalt werden.
Je steiler die Gerade verläuft, desto grösser wird der Gewinn. Eine möglichst steile Gerade finden wir durch geeignete Wahl von d.
h und k sind Funktionen von d,

$$h = \int_d^\infty \left(1 - F(x)\right) dx \tag{10}$$

und

$$k = \int_0^d x^2\, dF(x) + d^2\left(1 - F(d)\right). \tag{11}$$

Durch partielle Integration formt man (11) um zu

$$k = d^2 - 2 \int_0^d xF(x)\,dx. \tag{12}$$

Die Ableitungen nach d von (10) und (12) sind

$$h' = -\left[1 - F(d)\right] \tag{13}$$

und

$$k' = 2d\left[1 - F(d)\right], \tag{14}$$

und somit ist

$$k' = -2\,d\,h'.$$

Die Steigung der Geraden in Abbildung 1 beträgt

$$t = (Eb - ch)^2 \,/\, (vk).$$

Für die Ableitung nach d finden wir mit Hilfe von (13) und (14)

$$t' = 2\big(1 - F(d)\big)(Eb - ch)^2\left[kc \,/\, (Eb - ch) - d\right] \,/\, (vk^2). \tag{15}$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die eckige Klammer in (15) < 0, > 0 oder gleich 0 ist:

1. $d > kc \,/\, (Eb - ch)$ im ganzen Definitionsbereich von F. Der Gewinn wird umso höher, je kleiner d ist. Die rein nichtproportionale Rückversicherung ist otimal. (16)
2. $d < kc \,/\, (Eb - ch)$ im ganzen Definitionsbereich von F. In diesem Fall ist es genau umgekehrt: Die rein proportionale Rückversicherung ist otimal. (17)
3. Es gibt Lösungen $d = kc \,/\, (Eb - ch)$. (18)
   Dann erreicht dort G ein Maximum.

Es bleibt noch abzuklären, wieviele Lösungen (18) es geben kann.

Um die Anzahl möglicher Lösungen zu bestimmen, nennen wir

$$f = d\,(Eb - ch) \qquad \text{und}$$
$$g = kc$$

und betrachten die Lösungen von

$$f - g = 0. \tag{19}$$

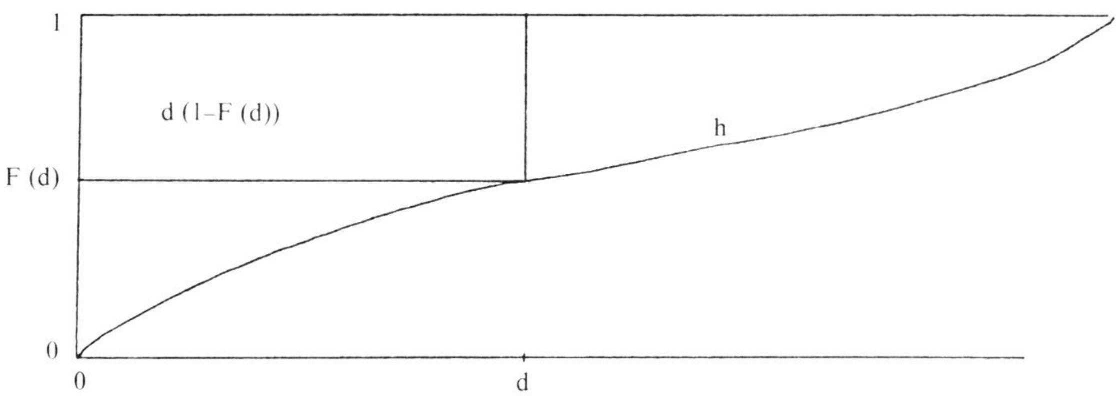
Mit (13) und (14) erhält man

$$f' - g' = Eb - c\,\big[d\,\big(1 - F(d)\big) + h\big]. \tag{20}$$

Abbildung 2 zeigt, dass $d\,\big(1 - F(d)\big) + h$ als Funktion von d abnimmt. Wenn F an der Stelle d differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} f'' - g'' &= c\,d\,F' \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Abbildung 2



Setzt man in (20) $d = 0$, so wird

$$f'(0) - g'(0) = E\,(b - c). \tag{22}$$

1. Fall: $b > c$
$d = 0$ ist eine Lösung von (19). Aus (22) und (21) folgt, dass es die einzige ist.

2. Fall: $b = c$
Im Unterschied zum ersten Fall sind auch alle d, für die $F(d) = 0$ ist, Lösungen. Als Nebenergebnis finden wir wegen (16), dass für $b > c$ die rein nichtproportionale Rückversicherung optimal ist.

3. Fall: $b < c$
Bei $d = 0$ ist $f - g = 0$. Wegen (22) und (21) gibt es höchstens ein $d > 0$, für das $f - g = 0$ wird.
Also hat (18) höchstens eine Lösung $d > 0$.

Bedeutsam ist, dass in (18) v gar nicht vorkommt. Der durch (18) gegebene optimale Selbstbehalt hängt ausser von der Verteilung F nur vom Verhältnis b/c der Rückversicherungszuschläge ab. Er wird um so grösser, je teurer nichtproportionale Rückversicherung im Verhältnis zur proportionalen ist. Solange v so klein ist, dass der rein nichtproportionale Selbstbehalt grösser als $kc/(Eb-ch)$ wird, ist analog zu (16) die rein nichtproportionale Lösung die beste. Bei demjenigen v, für das d bei $r = 1$ gerade gleich $kc/(Eb-ch)$ wird, hat d seinen optimalen Wert erreicht. Ist v noch grösser, reicht der optimale rein nichtproportionale Selbstbehalt noch nicht aus. Es ist jetzt aber besser, d nicht mehr weiter zu senken, sondern durch proportionale Rückversicherung zu ergänzen. Dabei wird r durch Gleichung (6) bestimmt.

Hans Schmitter
Schweizer Rück
Postfach 172
8022 Zürich

Zusammenfassung

Eine optimale Kombination von proportionalem und nichtproportionalem Selbstbehalt wird aufgrund der folgenden Grössen bestimmt: der Einzelschadenverteilung, der Gewinnmargen von Erstversicherung, proportionaler Rückversicherung und nichtproportionaler Rückversicherung und dem tolerierbaren Verhältnis zwischen Gewinn und Varianz im Selbstbehalt.

Résumé

Une combinaison optimale des réassurances proportionnelle et en excess-of-loss est déterminée à partir des informations suivantes: la répartition des sinistres, les marges de profit de l'assurance, des réassurances proportionnelle et en excess-of-loos ainsi que le rapport tolérable entre le profit et la variance pour propre compte.

Abstract

An optimal combination of proportional and nonproportional retentions is determined based on the following information: The claims distribution, the profit margins of direct insurance, proportional and nonproportional reinsurance and the tolerable ratio between profit and variance of the retention.