D. Kurzmitteilungen

ROBERT F. TICHY, Wien

Bemerkung zu einem versicherungsmathematischen Modell

H. U. Gerber [2] hat das folgende Modell in der kollektiven Risikotheorie eingeführt. Die Zufallsvariable $X(t)$ bezeichnet dabei das Kapital einer Versicherungsgesellschaft zur Zeit t; der Verlauf eines Pfades ist stückweise linear mit $X(t) = x + ct$, wobei c die Prämiendichte und $x = x_0$ das Anfangskapital bezeichnet. Die Sprungstellen t_i (Schadensfälle) seien nach Poisson mit Parameter λ verteilt und die Sprunghöhen $y = x_i + c(t_{i+1} - t_i) - x_{i+1} \geq 0$ (Schadenshöhen) nach einer vorgegebenen Verteilung $F(y)$. Stets wird $c > \lambda \int_0^\infty y\, dF(y)$ vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, dass das Kapital oberhalb einer vorgegebenen linearen Schranke $b + at$ ($b \geq 0$ $0 < a < c$) als Gewinn (Dividenden) abgeschöpft wird, d. h. die Höhe des Kapitals verläuft entlang der linearen Schranke bis zum nächsten Schadensfall.
Im Spezialfall exponentialverteilter Schadenshöhen ($F(y) = 1 - e^{-y}$, $y \geq 0$) hat *Gerber* [3] explizite Formeln für die Überlebenswahrscheinlichkeit $U(x, b)$ der Versicherungsgesellschaft im betrachteten Modell (d. h. für die Wahrscheinlichkeit, dass $X(t)$ stets ≥ 0 ist) und für den Erwartungswert der mit einem Faktor δ verzinsten Dividendenzahlungen angegeben. Im allgemeinen Fall wurden in [2] Abschätzungen und asymptotische Formeln mit Martingalargumenten hergeleitet.
Es wird nun wie in [3] der Erwartungswert V der mit δ verzinsten Dividenden berechnet, und zwar wird angenommen, dass die Dividendenzahlungen auch nach dem Ruin fortgesetzt werden. Dann ist $V = V(u)$ eine Funktion in $u = b - x$. Aus dem Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit ergibt sich für $u > 0$

$$V(u) = (1 - \delta dt)(1 - \lambda dt)\, V(u - (c - a)dt) + \lambda dt \int_0^\infty V(u + y)\, dF(y)$$

und mit $V(u - (c - a)dt) = V(u) - (c - a)dt\, V'(u)$

$$(c - a)V'(u) + (\delta + \lambda)V(u) - \lambda \int_0^\infty V(u + y)\, dF(y) = 0. \tag{1}$$

Ein analoges Argument liefert die Randbedingung

$$V'(0) = -1\,. \tag{2}$$

In [3] wurde gezeigt, dass die Integrodifferentialgleichung (1) mit Randbedingung (2) genau eine stetige, beschränkte Lösung besitzt. Für den Fall $F(y) = 1 - e^{-y}$ wurde die Lösung explizit bestimmt. Dies ist in einfacher Weise auch für den allgemeinen Fall möglich und liefert als Lösung eine Exponentialfunktion, was auch anschaulich zu erwarten ist. Man setzt an

$$V(u) = Ae^{-\varrho u} \tag{3}$$

und erhält durch Einsetzen in (1):

$$A(c-a)(-\varrho)e^{-\varrho u} + A(\delta + \lambda)\, e^{-\varrho u} - \lambda A \int_0^\infty e^{-\varrho u} e^{-\varrho y}\, dF(y) = 0\,.$$

Nun ist die Funktion

$$G(\varrho) = (c-a)(-\varrho) + (\delta + \lambda) - \lambda \int_0^\infty e^{-\varrho y}\, dF(y) \tag{4}$$

für $0 \leq \varrho < \infty$ stetig und es gilt

$$G(0) = \delta > 0\,, \qquad \lim_{\varrho \to \infty} G(\varrho) = -\infty. \tag{5}$$

Daher existiert eine positive Nullstelle ϱ_0 von $G(\varrho)$ und diese ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Problems eindeutig bestimmt. Aus (2) ergibt sich für $A = 1 / \varrho_0$, also

$$V(u) = \frac{1}{\varrho_0}\, e^{-\varrho_0 u}\,. \tag{6}$$

Betrachten wir kurz das Beispiel der Γ-Verteilung

$$dF(y) = \frac{1}{\Gamma(P)}\, y^{P-1}\, e^{-y}\, dy \;\; (P \geq 1)\,. \tag{7}$$

Es zeigt sich, dass ϱ_0 die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung

$$\delta + \lambda = \frac{\lambda}{(\varrho + 1)^P} + \varrho\,(c - a) \tag{8}$$

ist.

Im folgenden betrachten wir den Erwartungswert $W(x, b)$ der mit δ verzinsten Dividendenzahlungen, die im Falle des Ruins abgebrochen werden. Ferner betrachten wir ein etwas allgemeineres Modell, wie in [3] vorgeschlagen wurde: $c = c + \theta x$ soll linear vom Anfangskapital abhängen; d. h. durch eine Verzinsung (mit dem Faktor θ) bedingt, wird die Prämiendichte vom Anfangskapital beeinflusst. Wie zuvor kann eine Integrodifferentialgleichung

$$(c + \theta x)\,\frac{\partial W}{\partial x} + a\,\frac{\partial W}{\partial b} - (\delta + \lambda)\,W + \lambda \int_0^x W\,(x - y, b)\,dF(y) = 0 \tag{9}$$

für $0 \leq x \leq b < \infty$ mit Randbedingung

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=b} = 1 \tag{10}$$

aufgestellt werden. Es wird nun der wichtige Spezialfall $a = 0$ behandelt, d. h. die lineare Schranke zur Abschöpfung der Dividenden ist horizontal (für $c \equiv$ const siehe [1]).

Dazu wird $W(x, b) = W(x)(b$ fest) gesetzt und es ergibt sich für $W(x)$ die Integrodifferentialgleichung

$$(c + \theta\,x)\,W'(x) - (\delta + \lambda)\,W\,(x) + \lambda \int_0^x W\,(x - y)\,dF(y) = 0. \tag{11}$$

Eine einfache Anwendung des Fixpunktsatzes von *Banach* zeigt (siehe auch am Ende der vorliegenden Note), dass (11) eine eindeutig bestimmte beschränkte Lösung (bei vorgegebenem $W(0)$) besitzt. Diese Lösung $W(x)$ besitzt daher eine Laplace-Transformierte $\widetilde{W}\,(s)$.

Wegen

$$\int_0^\infty W'(x)\,e^{-sx}\,dx = s\,\widetilde{W}\,(s) - W(0),$$

$$\int_0^\infty x\,W'(x)\,e^{-sx}\,dx = -\left(s\,\frac{d}{ds}\,\widetilde{W}\,(s) + \widetilde{W}\,(s)\right)$$

folgt aus (11):

$$c\left(s\widetilde{W}(s) - W(0)\right) - \theta\left(s\frac{d}{ds}\widetilde{W}(s) + \widetilde{W}(s)\right) - (\delta + \lambda)\widetilde{W}(s)$$
$$+ \lambda\widetilde{W}(s)\varphi(s) = 0 \tag{12}$$

mit $\varphi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sy}\, dF(y)$. Nun setzt man ($\theta \neq 0$)

$$\widetilde{P}(s) = \frac{-cs + \theta + \delta + \lambda - \lambda\,\varphi(s)}{\theta\, s}, \qquad \widetilde{Q}(s) = -\frac{c}{\theta\, s} \tag{13}$$

und erhält als Lösung von (12)

$$\widetilde{W}(s) = -W(0)\exp\left(-\int\limits_1^s \widetilde{P}(t)\, dt\right)\cdot\int\limits_s^\infty \widetilde{Q}(t)\exp\left(\int\limits_1^t \widetilde{P}(u)\, du\right) dt\,. \tag{14}$$

Da $\widetilde{W}(s) = O\left(\frac{1}{s}\right)$, existiert die inverse Laplace-Transformation von $\widetilde{W}(s)$, und Rücktransformation liefert daher

$$W(x,b) = W(0,b)\cdot G(x)\,, \tag{15}$$

wobei $G(x)$ die inverse Laplace-Transformierte von

$$\exp\left(-\int\limits_1^s \widetilde{P}(t)\, dt\right)\cdot\int\limits_1^s \widetilde{Q}(t)\exp\left(\int\limits_1^t \widetilde{P}(u)\, du\right) dt$$

bezeichnet.
Die Randbedingung (10) ergibt dann zusammen mit (15)

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=b} = 1 = W(0,b)\cdot G'(b)\,,$$

d. h. $W(0,b) = 1\,/\,G'(b)$.
Insgesamt hat man daher die explizite Formel

$$W(x,b) = \frac{G(x)}{G'(b)} \qquad (\text{für } \theta = 0 \text{ siehe [1]})\,. \tag{16}$$

Abschliessend sei bemerkt, dass eine einfache Anwendung des Fixpunktsatzes von *Banach* zeigt, dass die Integrodifferentialgleichung (9) mit Randbedingung (10) eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Man braucht dazu nur den Integraloperator

$$
\begin{aligned}
&(Ag)(x,b)\\
&= \int_0^{(b-x)/(c+\theta x-a)} \lambda\, e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+(c+\theta x)t} g(x+(c+\theta x)t-y,\, b+at)\, dF(y)\, dt\\
&\quad + \int_{(b-x)/(c+\theta x-a)}^{\infty} \lambda\, e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b+at} g(b+at-y,\, b+at)\, dF(y)\, dt\\
&\quad + \frac{c+\theta x-a}{\lambda+\delta} \exp\left(-(\lambda+\delta)\,\frac{b-x}{c+\theta x-a}\right)
\end{aligned}
$$

sowie die Abschätzung

$$|(Ag_1)(x,b)-(Ag_2)(x,b)| \leq \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\, \|g_1-g_2\|$$

zu beachten. Somit ist diese Lösung von (10) + (9) im Falle $a=0$ durch (16) gegeben (insbesondere ist auch $G'(b) \neq 0$).

Robert F. Tichy
Institut für Analysis,
Technische Mathematik und Versicherungsmathematik
TU Wien
Wiedner Hauptstrasse 8–10
A-1040 Wien

Literatur

[1] *Bühlmann, H.:* Mathematical methods in risk theory. Springer Verlag, New York 1970.

[2] *Gerber, H. U.:* Martingals in risk theory. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 73, 205–216.

[3] *Gerber, H. U.:* On the Probability of Ruin in the Presence of a Linear Dividend Barrier. Scand. Acturial J., 1981, 105–115.

[4] *Wolff, K. H.:* Versicherungsmathematik. Springer Verlag, Wien 1970.

Erhard Kremer, Hamburg

An improved approximation of the ultimate ruin probability

A very old problem of risk theory is the calculation of the probability of ruin for the risk business. First results go back to *Lundberg* (1909) and *Cramér* (1955). In the past twenty years those classical results were generalized into many directions and more generalized models were developed (see *Janssen* (1981)). Only recently the numerical evaluation of the classical formulas for the ruin probability became of interest for the risk theorists. For example *Beekman* gave an interesting expansion (*Beekman* (1985)), *De Vylder* a simple, but crude approximation (*De Vylder* (1978)), and *Goovaerts/De Vylder* (1984) a numerical discretization method. Also the author gave a contribution (*Kremer* (1987)), pointing at the possibility of applying some renewal theoretical approximation formulas. Already *Seal* (1983) discussed a method similar to one of the author's (1987) approximate results. *Seal*'s method (3) is based on a renewal equation for the nonruin probability, whereas the author's three methods were based directly on the renewal equation for the ruin probability. *Seal* showed in an example that his method (3) based on *Bartholomew*'s (1963) result is too crude. The author uses in his (1987) paper a refinement of *Bartholomew*'s (1963) result, published by *Deligönül* (1985). Let us now follow *Seal*'s approach replaced by *Deligönül*'s (1985) instead of *Bartholomew*'s (1963) result. The renewal equation for the *nonruin probability* $U(u)$ with finite initial surplus $u \geq 0$ is given by:

$$U(u) = U(0) + \int_0^u U(u-y) \cdot h(y)\, dy,$$

where the density h is defined according:

$$h(y) = \left(\frac{1 - F(y)}{\mu}\right)$$

with the distribution function F of a single claim and the corresponding mean:

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(y))\, dy = \int_0^\infty x F(dx)$$

The renewal equation holds for the classical compound Poisson risk model (see *Gerber* (1980)) with yearly premium:

$$c = (1 + \Lambda) \cdot \lambda \cdot \mu,$$

where μ is defined above, λ is the mean claims number and Λ the security loading. It is well-known that with the solution Φ of:

$$\Phi(u) = \int_0^u \big(1 - \Phi(u - y)\big) \cdot h(y)\, dy$$

one has in our special situation (see *Kohlas* (1975)):

$$\boxed{U(u) = U(0) \cdot [1 + \Phi(u)]}\,. \tag{1}$$

According to *Deligönül*'s result (1985) we have the approximation:

$$\boxed{\Phi(u) \approx \lambda_* \cdot u - H_*(u) + \int_0^u \big(1 - H_*(u - y)\big) \cdot \left[h(y) + \lambda_* \cdot \left(\frac{H^2(y)}{H_*(y)}\right)\right] dy} \tag{2}$$

with:

$$H(y) = \int_0^y h(t)\, dt,$$

$$H_*(y) = \lambda_* \cdot \int_0^y \big(1 - H(t)\big)\, dt,$$

$$\lambda_* = \left[\int_0^\infty t \cdot h(t)\, dt\right]^{-1}.$$

Finally it is known that:

$$\boxed{U(0) = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda}} \tag{3}$$

(see *Gerber* (1980)). According to the numerical results of *Deligönül*'s paper (1985) one expects that the approximation method (1)–(3) is much more precise than Seal's method (3). Obviously the method is easier to evaluate than the corresponding method (4.3) – (4.7) in *Kremer* (1987).

Prof. Dr. E. Kremer
Universität Hamburg
Institut für Mathematische Statistik
Bundesstrasse 55
D-2000 Hamburg 13

References

Bartholomew, D. W. (1963): An approximate solution of the integral equation of renewal theory. J. R. Statist. Soc. B 25.

Beekman, J. A. (1985): A series for infinite time ruin probabilities. Insurance: Mathematics & Economics.

Cramér, H. (1955): Collective risk theory. A survey. Scandia Jubilee Volume. Stockholm.

Deligönül, Z. S. (1985): An approximate solution of the integral equation of renewal theory. J. Appl. Prob. 22.

De Vylder, F. (1978): A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. Scandinavian Actuarial Journal.

Gerber, H. U. (1980): An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation.

Goovaerts, M. / De Vylder, F. (1984): A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities. Astin Bulletin, Vol. 14.

Janssen, J. (1981): Generalized risk models. Cahier du centre d'études de recherche opérationelle, Vol. 23.

Kohlas, J. (1977): Stochastische Methoden des Operations Research. Teubner, Stuttgart.

Kremer, E. (1987): Some approximations of ultimate ruin probability for finite initial surplus. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.

Lundberg, F. (1909): Über die Theorie der Rückversicherung. Trans. VI. Int. Congr. Act. 1.

Seal, H. L. (1983): Numerical probabilities of ruin when expected claim numbers are large. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

Addendum to "Hierarchical Credibility Revisited" by H. Bühlmann and W. S. Jewell, Bulletin 1, 1987

In the bibliography reference number 3 should read

Norberg, R. (1980) instead of *Norberg, R.* (1975)

We also should have mentioned

Norberg, R. (1986): Hierarchical Credibility: Analysis of a Random Effect Linear Model with Nested Classification, SAJ 204-222 (No. 3–4).

H. Bühlmann and W. S. Jewell