Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1988)

Heft: 2

Artikel: Allgemeine Lebensversicherungen : Überschuss und Rentabilität

Autor: Hürlimann, Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967004

Werner Hürlimann, Winterthur

Allgemeine Lebensversicherungen: Überschuss und Rentabilität

Einführung

Ende der siebziger Jahre ist das Problem der Rentabilität von Lebensversicherungen in Deutschland ergiebig diskutiert worden (z. B. *Feilmeier* [1979]). Die bekannteste Methode, um die Rentabilität und die Finanzierbarkeit der Überschussbeteiligung nachzuweisen, ist das sogenannte "Verbandsverfahren", das von *Gessner* (1978) ausführlich behandelt worden ist (siehe auch *Wolfsdorf* [1986], Kap. 8.8).
In dieser Arbeit schlagen wir einen alternativen Lösungsweg ein, um aus der Sicht des Versicherers die Rentabilität von Lebensversicherungsbeständen zu messen. Insbesondere berücksichtigen wir die neuesten risikotheoretischen Methoden und die Möglichkeit des Einsatzes von Rechenanlagen. Wir hoffen weiter, dass unsere Überlegungen als mathematische Grundlagen für computerunterstützte Verwaltungssysteme in der Lebensversicherung dienen können.
In Abschnitt 1 charakterisieren wir Lebensversicherungen durch wenige Elemente, die es erlauben, das Lebensversicherungsgeschehen mit einer Ausscheideursache zu beschreiben. Danach interpretieren wir in Abschnitt 2 das Versicherungsgeschehen auf zwei verschiedene Arten, die zu unterschiedlichen Prämienzerlegungen in Spar-, Risiko- und Kostenkomponenten führen. Es sind dies die bekannten Netto- und Bruttokomponenten, letztere auch ausreichende Komponenten genannt. Diese Betrachtungsweisen sind nicht unabhängig. Der Übergang zwischen den Interpretationen ist durch Formeln gewährleistet, die Vermögensschiebungen darstellen. Wir erhalten ebenfalls interessante Formeln für die Kosten 1. Ordnung, die nach Tarifgrundlagen genügen, um eine Lebensversicherung durchzuführen.
Wir erinnern weiter daran, dass die Deckungskapitalien mit Hilfe von Rekursionsformeln berechnet werden können (z. B. *Wolfsdorf* [1986], Kap. 4.2). In Abschnitt 3 diskutieren wir ausführlich ein additives Modell der "Technischen Rechnung" eines Lebensversicherungsunternehmens, das auf die Zerlegung des Versicherungsprozesses in Spar-, Risiko- und Kostenprozesse angewendet wird. Insbesondere erhalten wir einfache Formeln für die Zerlegung des Nettoergebnisses nach seinen Quellen Zins, Risiko und Kosten. In Abschnitt 4 diskutieren wir die Betriebsrechnung eines Lebensversicherungsunternehmens,

insbesondere die Hauptfragen nach Rentabilität und Ermittlung der Überschüsse nach den Quellen Zins, Risiko und Kosten. Wir beschränken uns auf deterministische Zins- und Kostenprozesse und diskutieren den Risikobereich anhand eines stochastischen Modellansatzes, der nach Modifikationen auf Zins- und Kostenbereich möglicherweise anwendbar wäre. In Abschnitt 5 berücksichtigen wir ein einfaches Modell der strukturierten Programmierung, um die "Technische Rechnung" computergestützt zu generieren. Das Konzept wird anhand von zwei numerischen Beispielen in Abschnitt 6 illustriert.
Zum Schluss möchten wir auf mögliche Verbesserungen und Weiterentwicklungen hinweisen. Kompliziertere Modelle, die die unterjährige Zahlungsweise und die unterjährigen Versicherungsereignisse (Eintritt, Austritt usw.) berücksichtigen, sind durch Erweiterung unseres Basismodells denkbar. Wünschenswert ist ebenfalls ein Modell, das ein Überschussbeteiligungssystem integriert. Es wäre dann von Interesse, dieses Modell mit dem herkömmlichen "Verbandsverfahren" zum Nachweis der Finanzierbarkeit eines Bestandes samt Überschussbeteiligung zu vergleichen. Schliesslich bleibt ebenfalls ein übergreifendes Modell zu konstruieren, das imstande ist, die globale Rentabilität von verschiedenartigen Beständen zu messen.

1 Zum Konzept der allgemeinen Lebensversicherung

Wir setzen voraus, dass der Leser mit den modernen Grundlagen der Lebensvesicherungsmathematik vertraut ist. Durch Algebraisierung der Lebensversicherungstechnik streben wir danach, wesentliche Konzepte in einfacher und klarer Weise darzustellen.
Unser Ausgangspunkt ist eine *allgemeine Lebensversicherung,* charakterisiert durch folgende Elemente:

- ein *Versicherungstarif* (z. B. gemischte Versicherung, Altersrente, Risikoversicherung, Erlebensversicherung usw.),
- ein *Eintrittsalter* x,
- eine *Versicherungsdauer* n,
- *Todesfallleistungen* $(T_1^x, \ldots, T_n^x)$, wobei T_t^x nach t Jahren fällig wird, falls der Versicherte im t-ten Versicherungsjahr stirbt.
- *vorschüssige Rentenleistungen* $(R_1^x, \ldots, R_n^x)$, wobei R_t^x zu Beginn des t-ten Versicherungsjahres fällig wird, falls der Versicherte zu diesem Zeitpunkt lebt, und/oder
- *nachschüssige Erlebensfallleistungen* $(E_1^x, \ldots, E_n^x)$, wobei E_t^x nach t Jahren fällig wird, falls der Versicherte diesen Zeitpunkt überlebt,

– *Nettoprämien* $(\pi_1^{N,x}, \ldots, \pi_n^{N,x})$ und *Kostenprämien* $(\pi_1^{K,x}, \ldots, \pi_n^{K,x})$, wobei $\pi_t^{N,x}$ und $\pi_t^{K,x}$ zu Beginn des t-ten Versicherungsjahres fällig werden, falls der Versicherte zu diesem Zeitpunkt lebt.

Wir setzen natürlich voraus, dass der Versicherungstarif die Rechnungsgrundlagen vorgibt, wie z. B. Sterblichkeiten, Kostensätze α, β, γ usw. Die obigen Elemente sind die *fundamentalen Grössen* der Lebensversicherungstechnik. Wir behaupten, dass sie genügen, das Lebensversicherungsgeschehen mit einer Ausscheideursache vollständig zu beschreiben, sowohl aus theoretischer wie aus rechnerisch praktischer Hinsicht. Diese Arbeit befasst sich aber nicht damit, diese Behauptung mathematisch streng zu beweisen, sondern möchte die Nützlichkeit unserer Betrachtungen für eine moderne computerunterstützte Lebensversicherungspraxis in konstruktiver Weise hervorheben. Ein komplizierteres Berechnungsmodell für mehrere Ausscheideursachen (z. B. Tod und Invalidität) sollte ebenfalls in Reichweite sein (hierzu verwende man die Technik von *Gerber* [1986], Kap. 7).

Unseres Erachtens ist eine analoge Methode sogar in der Nicht-Lebensversicherung denkbar. Dazu erweitere man das Konzept mit einer Lösung des Problems der Schadenreservierung: unbekannte Schadenhöhen (stochastische Natur der Leistungen), d. h. IBNER-claims (incurred but not enough reserved), sowie verspätete Kenntnisnahme von Schäden, d. h. IBNR-claims (incurred but not reported).

Für die weitere Diskussion benötigen wir noch folgende durchgehend verwendete Bezeichnungen:

t — das Versicherungsjahr der Beobachtung, zu Beginn dessen der Versicherte mit Eintrittsalter x lebt

${}_tV_x$ — das Nettodeckungskapital

${}_tV_x^B$ — das Bruttodeckungskapital (auch ausreichendes Deckungskapital genannt)

${}_tV_x^K = {}_tV_x^B - {}_tV_x$

das Kostendeckungskapital

$\pi_t^x = \pi_t^{N,x} + \pi_t^{K,x}$

die Bruttoprämie

$\pi_t^{BS,x}$ — die Bruttosparprämie (auch ausreichende Sparprämie)

$\pi_t^{S,x}$ — die Sparprämie

$\pi_t^{BR,x}$	die Bruttorisikoprämie (auch ausreichende Risikoprämie)
$\pi_t^{R,x}$	die Risikoprämie
$\pi_t^{BK,x} = \pi_t^x - \pi_t^{BS,x} - \pi_t^{BR,x}$	die Bruttokostenprämie (auch ausreichende Kostenprämie)
$\pi_t^{K,S,x}$	die Sparkomponente der Kostenprämie
$\pi_t^{K,R,x}$	die Risikokomponente der Kostenprämie
K_t^x	die Kosten 1. Ordnung, d. h. die nach Tarifgrundlagen Ende des Jahres t fällig werdenden Kosten zur Verwaltung einer allgemeinen Lebensversicherung
q_x, $p_x = 1 - q_x$	die Sterblichkeit bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeit
i, $v = 1/(1+i)$	der technische Zins bzw. der dazugehörige Diskontierungsfaktor

Im folgenden wird der Index x meistens weggelassen, und die Bezeichnungen ebenfalls für *Bestände*, d. h. Kollektive von allgemeinen Lebensversicherungen zu demselben Versicherungstarif verwendet.

2 Zwei Interpretationen des Lebensversicherungsgeschehens

Die fundamentale Zerlegung der Prämien in Spar-, Risiko- und Kostenkomponenten ist auf mindestens zwei Arten möglich, je nachdem wie der Geldfluss gedeutet wird.

In einer *ersten Interpretation* kann man verlangen, dass der stochastische Prozess des ausreichenden Geldflusses genügt, die finanzielle Lage zu beschreiben. Der Erwartungswert dieses Prozesses ist durch die *Gleichung des erwarteten Bruttogeldflusses* gegeben:

$$({}_{t-1}V^B + \pi_t - R_t)(1+i) - q_{x+t-1}T_t - K_t = p_{x+t-1}({}_tV^B + E_t) \tag{2.1}$$

In Worten ausgedrückt, werden die verfügbaren Einnahmen, abzüglich den erwarteten Todesfallleistungen und den Ende Jahr fällig werdenden Kosten, dem Kapital gleichgesetzt, das bei Erlebensfall vorhanden sein muss. Die Auflösung dieser Gleichung nach der Bruttoprämie ergibt nach Umordnung die Beziehung

$$\pi_t = v_t V^B - {}_{t-1}V^B + R_t + vE_t + vK_t + vq_{x+t-1}(T_t - {}_tV^B - E_t) \tag{2.2}$$

aus der man die folgende Zerlegung in ausreichende Komponenten erhält:

$$\pi_t^{BS} = v_t V^B - {}_{t-1}V^B + R_t + vE_t \tag{2.3}$$

$$\pi_t^{BR} = vq_{x+t-1}(T_t - {}_tV^B - E_t) \tag{2.4}$$

$$\pi_t^{BK} = vK_t \tag{2.5}$$

Dabei werden die Kosten 1. Ordnung *residual* bestimmt als

$$K_t = (\pi_t - \pi_t^{BS} - \pi_t^{BR})(1+i) \tag{2.6}$$

Ausserdem liefert (2.1) *Rekursionsformeln* zur Berechnung der Bruttodekkungskapitalien, nämlich:

$$\begin{aligned} {}_tV^B &= \frac{1}{p_{x+t-1}}\{({}_{t-1}V^B + \pi_t - R_t)(1+i) - K_t - q_{x+t-1}T_t\} - E_t \\ {}_0V^B &= -\alpha \qquad (\alpha: \text{ Abschlusskostensatz}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

In diesem Fall genügt für die Definition einer allgemeinen Lebensversicherung die Kenntnis der Bruttoprämien anstelle der Netto- und Kostenprämien, um die Zerlegung in ausreichende Komponenten rechnerisch durchzuführen. Diese Interpretation hat also eine *informationstheoretische Reduktion* der notwendigen Statistiken zur Folge. Ferner beachte man, dass im allgemeinen

$$\pi_t^{BS} + \pi_t^{BR} \neq \pi_t^N, \qquad \pi_t^{BK} \neq \pi_t^K \tag{2.8}$$

Beispiel 1: Für eine lebenslänglich laufende Altersrente

$$T_t = E_t = 0, \qquad R_t = 1,$$

gilt

$$\pi_t = \pi_t^N = \pi_t^K = 0$$

und

$${}_tV^B = (1+\gamma_2)\ddot{a}_{x+t}$$

wobei γ_2 ein Verwaltungskostensatz für Rentenbezüger ist. Durch Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \pi_t^{BR} &= -vq_{x+t-1}(1+\gamma_2)\ddot{a}_{x+t} \\ \pi_t^{BS} &= -\pi_t^{BR} - \gamma_2, \qquad \pi_t^{BK} = \gamma_2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

In dieser Deutung des Versicherungsgeschehens enthalten die Bruttosparprämien und die Bruttorisikoprämien einen Kostenanteil. Daher sind die dazugehörigen Spar- und Risikoprozesse keineswegs *kostenneutral*. Wie wir später sehen werden, besitzen die Hauptfragen eines Lebensversicherungsunternehmens nach Überschussermittlung und Rentabilität trotzdem vernünftige Antworten. Möchte man aus betriebswirtschaftlichen, tariflich konstruktiven, risikotheoretischen oder anderen Gründen echte Spar-, Risiko- und Kostenprozesse, so muss das Versicherungsgeschehen anders gedeutet werden.
In der *zweiten Interpretation* verlangt man, dass die stochastischen Prozesse des Netto- und Kostengeldflusses, separat betrachtet, die finanzielle Lage beschreiben. Die Erwartungswerte dieser Prozesse sind gegeben durch die *Gleichungen des erwarteten Netto- und Kostengeldflusses:*

$$({}_{t-1}V + \pi_t^N - R_t)(1+i) - q_{x+t-1}T_t = p_{x+t-1}({}_tV + E_t) \tag{2.10}$$

$$({}_{t-1}V^K + \pi_t^K)(1+i) - K_t = p_{x+t-1}\ {}_tV^K \tag{2.11}$$

Wie zuvor erhalten wir durch Umformungen die Beziehungen

$$\pi_t^N = v_tV - {}_{t-1}V + R_t + vE_t + vq_{x+t-1}(T_t - {}_tV - E_t) \tag{2.12}$$

$$\pi_t^K = v_tV^K - {}_{t-1}V^K + vK_t - vq_{x+t-1}\ {}_tV^K \tag{2.13}$$

aus denen man folgende (Netto)Komponenten abliest:

$$\pi_t^S = v_tV - {}_{t-1}V + R_t + vE_t \tag{2.14}$$

$$\pi_t^R = vq_{x+t-1}(T_t - {}_tV - E_t) \tag{2.15}$$

$$\pi_t^{K,S} = v_tV^K - {}_{t-1}V^K + vK_t \tag{2.16}$$

$$\pi_t^{K,R} = -vq_{x+t-1}\ {}_tV^K \tag{2.17}$$

$$K_t = ({}_{t-1}V^K - \pi_t^{K,R})(1+i) - {}_tV^K + \pi_t^K(1+i) \tag{2.18}$$

Man erhält ebenfalls die folgenden *Rekursionsformeln* zur Berechnung der Deckungskapitalien:

$$\begin{aligned} {}_tV &= \frac{1}{p_{x+t-1}}\{({}_{t-1}V + \pi_t^N - R_t)(1+i) - q_{x+t-1}T_t\} - E_t \\ {}_0V &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} {}_tV^K &= \frac{1}{p_{x+t-1}}\{({}_{t-1}V^K + \pi_t^K)(1+i) - K_t\} \\ {}_0V^K &= -\alpha \end{aligned} \tag{2.20}$$

Hiermit überzeugt man sich, dass diese zweite Komponentenzerlegung vollständig anhand des Informationsinhalts einer allgemeinen Lebensversicherung durchgeführt werden kann. Diese zweite Interpretation ist im Einklang mit der risikotheoretischen Standardliteratur, die meistens nur den Nettogeldfluss ausführlich behandelt.

Beispiel 2: Für dieselbe laufende Altersrente wie zuvor erhalten wir mit ${}_tV = \ddot{a}_{x+t}$ und ${}_tV^K = \gamma_2 \ddot{a}_{x+t}$ die Komponenten

$$\pi_t^R = -vq_{x+t-1}\,{}_tV, \qquad \pi_t^S = -\pi_t^R, \qquad \pi_t^{K,R} = \gamma_2 \pi_t^R, \qquad \pi_t^{K,S} = -\pi_t^{K,R}$$
$$K_t = \gamma_2(1+i)$$

Im allgemeinen bestehen zwischen der ersten und zweiten Interpretation folgende Zusammenhangsformeln (Geldverschiebungen):

$${}_tV^B = {}_tV + {}_tV^K \tag{2.21}$$
$$\pi_t^{BS} = \pi_t^S + \pi_t^{K,S} - \pi_t^{BK} \tag{2.22}$$
$$\pi_t^{BR} = \pi_t^R + \pi_t^{K,R} \tag{2.23}$$

Bemerkung: Es ist möglich, den Begriff allgemeine Lebensversicherung und die dazugehörigen Interpretationen des Geldflusses auf *unterjährige Prämienzahlungen und Leistungen* sowie auf *unterjährige Versicherungsereignisse* (Deckungskapitalien zu einem gebrochenen Zeitpunkt) auszudehnen. Die Techniken hierzu findet der interessierte Leser im Lehrbuch von *Gerber* (1986).

3 Technische Rechnung für allgemeine Lebensversicherungen

Nach geringfügigen Vereinfachungen lässt sich das Nettoergebnis einer Lebensversicherungsgesellschaft wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\text{Nettoergebnis} = {} & \text{Prämien} \\ & + \text{Zinsen} \\ & - \text{Leistungen} \\ & - \text{Kosten} \\ & - \text{Erhöhung Rückstellungen}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese Gleichung wollen wir als *additives Modell der technischen Rechnung* benützen, um den Gesamtprozess sowie die Spar-, Risiko- und Kostenprozesse von allgemeinen Lebensversicherungen zu beschreiben.

Als Konsequenz dieses Modells diskutieren wir dann die Hauptfragen nach Überschussermittlung und Rentabilität.

Nebst den Annahmen, die dem Begriff allgemeine Lebensversicherung zugrunde liegen, setzen wir voraus, dass der Stichtag mit dem Beginn des Versicherungsjahres und mit ganzzahligem Eintrittsalter stattfindet. Seit der Einführung des BVG-Obligatoriums in der Schweiz ist diese zusätzliche Annahme zumindest im Kollektivbereich überwiegend erfüllt. Durch eine adäquate Behandlung der Unterjährigkeit (vgl. hierzu *Gerber* [1986], insbesondere 4.8, 6.6) kann diese Annahme aufgehoben werden. Um einfache und klare Konzepte zu erhalten, verzichten wir hier auf den allgemeinsten Fall.

Zur mathematischen Beschreibung benötigen wir noch folgende Grössen:

$Rk_t^x =$ *Rückkaufsleistung* (Abfindungswert) des Versicherten x, die nach t Jahren fällig wird.

$$\varepsilon_{x+t} = \begin{cases} 1, & \text{bei Tod des Versicherten } x \text{ im Jahr } t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_{x+t} = \begin{cases} 1, & \text{bei Rückkauf des Versicherten } x \text{ im Jahr } t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Omega_{x+t} = \varepsilon_{x+t} + \delta_{x+t} = \begin{cases} 1, & \text{bei Tod oder Rückkauf} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Variablen $\varepsilon, \delta, \Omega$ sind *Zustandsindikatoren* und werden als Zufallsvariablen behandelt. Hiermit erhält man die Zufallsvariable der individuellen *zufälligen Leistungen* als

$$L_t^x = \varepsilon_{x+t}\,(T_t^x - E_t^x) + \delta_{x+t}\,Rk_t^x \tag{3.2}$$

Für ein festes Versicherungsjahr t betrachten wir nun einen *Bestand* von N Versicherten mit Eintrittsalter x_i, die sich im Beobachtungsjahr t_i befinden, und Anfang Versicherungsjahr t noch leben, $i = 1, \ldots, N$.

Die *Bestandesgrössen* von Interesse, die durch Summation von individuellen Grössen definiert werden, sind gegeben durch

π	die Bruttoprämien
π^{BS}	die Bruttosparprämien
π^{S}	die Sparprämien
π^{BR}	die Bruttorisikoprämien
π^{R}	die Risikoprämien
π^{BK}	die Bruttokostenprämien
π^{K}	die Kostenprämien
$\pi^{K,S}$	die Sparkomponente der Kostenprämien
$\pi^{K,R}$	die Risikokomponente der Kostenprämien
R	die Rentenleistungen
E	die Erlebensfallleistungen
$L = \sum_i L_{t_i}^{x_i}$	die zufälligen Leistungen
$S^B = \sum_i (L_{t_i}^{x_i} - \Omega_{x_i+t_i} \cdot {}_{t_i}V_{x_i}^B)$	die Bruttoschadensummen (auch ausreichende Schadensummen)
$S = \sum_i (L_{t_i}^{x_i} - \Omega_{x_i+t_i} \cdot {}_{t_i}V_{x_i})$	die Schadensummen
$S^K = S^B - S$	die Schadensummen der stochastischen Komponente des Kostenprozesses
K	die Kosten 1. Ordnung
$Keff$	die effektiven Kosten des Bestandes
${}_{t-1}V^B$, ${}_tV^B$	die Bruttodeckungskapitalien zu Beginn, bzw. Ende des Versicherungsjahres t
${}_{t-1}V$, ${}_tV$	die Nettodeckungskapitalien zu Beginn, bzw. Ende des Versicherungsjahres t
${}_{t-1}V^K$, ${}_tV^K$	die Kostendeckungskapitalien zu Beginn, bzw. Ende des Versicherungsjahres t

Dabei sind die Grössen L, S^B, S, S^K natürlich Zufallsvariablen. Zu beachten ist, dass alle Bestandesgrössen, bis auf die effektiven Kosten, additiv definiert sind. Findet man eine geeignete Verschlüsselung, um die effektiven Kosten des Bestandes auf die individuellen Versicherten umzuverteilen, so gelten die Überlegungen dieses Abschnittes ebenfalls für individuelle Versicherte. Wir lassen die Kostenprobleme beiseite und betrachten lediglich eine *proportionale Umverteilung der effektiven Kosten*, definiert durch

$$Keff_{t_i}^{x_i} = K_{t_i}^{x_i} \cdot Keff/K \tag{3.3}$$

Der effektive Zins, der von der Versicherungsgesellschaft im Versicherungsjahr erwirtschaftet wird, sei i_e. Je nachdem wie das Lebensversicherungsgeschehen interpretiert wird, ergeben sich verschiedene Darstellungen der technischen Rechnung. Das Nettoergebnis zerlegen wir jeweils nach seinen Quellen Zins, Risiko, Kosten.
Für jeden Prozess erhalten wir ein dem additiven Modell (3.1) ähnliches *Abrechnungsschema*. Die sich ergebenden Abrechnungsschemas sind in den Tabellen 1 bis 8 ersichtlich.
Die Herleitung der Ergebnisse sei im folgenden kurz erläutert. Nach Umformung erhält man für das Nettoergebnis in Tabelle 1:

$$({}_{t-1}V^B + \pi^{BS} - R)(i_e - i) + ({}_{t-1}V^B + \pi^{BS} - R)(1+i) - {}_tV^B - E$$

was nach (2.3) das gewünschte Resultat liefert.
Die Tabelle 2 ist klar, und für die Tabelle 3 beachte man, dass $\pi^{BK}(1+i) = K$ nach (2.5). Die Tabelle 4 erklärt man wie die Tabelle 1 mit Hilfe von (2.14) an Stelle von (2.3). Die Tabelle 5 ist wiederum klar. Dagegen braucht die Tabelle 6 eine ausführliche Erklärung. Analog zur Zerlegung des Nettoprozesses in Spar- und Risikoprozess, zerlegen wir den Kostenprozess in eine deterministische und stochastische Komponente wie in Tabelle 8. Das deterministische Nettoergebnis Kosten ist dann nach Umformung gleich

$$({}_{t-1}V^K + \pi^{K,S})(i_e - i) + ({}_{t-1}V^K + \pi^{K,S})(1+i) - {}_tV^K - Keff$$

was nach (2.16) die gewünschte Darstellung liefert. Die stochastische Komponente erklärt sich von selbst. Der Eintrag der Schadensumme

$$S^K = -\sum_i \Omega_{x_i+t_i} \cdot {}_{t_i}V^K_{x_i}$$

in der Position Kosten der stochastischen Komponente bedeutet Befreiung der Kostenreserve bei Tod oder Rückkauf.
Die Tabelle 7 folgt durch Addition der Tabellen 1, 2, 3 bzw. 4, 5, 6.

Bemerkung: Man beachte, dass im Gegensatz zur Tarifierung, beschrieben in den Abschnitten 1 und 2, das Abrechnungsverfahren das Stornorisiko berücksichtigt.

Tabelle 1: Bruttosparprozess

Prämien	π^{BS}
Zinsen	$({}_{t-1}V^B + \pi^{BS} - R)i_e$
Leistungen	$R + E + L - S^B$
Kosten	—
Erhöhung Rückstellungen	${}_tV^B - {}_{t-1}V^B + S^B - L$
Nettoergebnis Zins	$({}_{t-1}V^B + \pi^{BS} - R)(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	—
Nettoergebnis Kosten	—

Tabelle 2: Bruttorisikoprozess

Prämien	π^{BR}
Zinsen	$\pi^{BR} \cdot i_e$
Leistungen	S^B
Kosten	—
Erhöhung Rückstellungen	—
Nettoergebnis Zins	$\pi^{BR}(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	$\pi^{BR}(1 + i) - S^B$
Nettoergebnis Kosten	—

Tabelle 3: Bruttokostenprozess

Prämien	π^{BK}
Zinsen	$\pi^{BK} \cdot i_e$
Leistungen	—
Kosten	$Keff$
Erhöhung Rückstellungen	—
Nettoergebnis Zins	$\pi^{BK}(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	—
Nettoergebnis Kosten	$K - Keff$

Tabelle 4: Sparprozess

Prämien	π^S
Zinsen	$({}_{t-1}V + \pi^S - R)\, i_e$
Leistungen	$R + E + L - S$
Kosten	—
Erhöhung Rückstellungen	${}_tV - {}_{t-1}V + S - L$
Nettoergebnis Zins	$({}_{t-1}V + \pi^S - R)(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	—
Nettoergebnis Kosten	—

Tabelle 5: Risikoprozess

Prämien	π^R
Zinsen	$\pi^R \cdot i_e$
Leistungen	S
Kosten	—
Erhöhung Rückstellungen	—
Nettoergebnis Zins	$\pi^R(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	$\pi^R(1 + i) - S$
Nettoergebnis Kosten	—

Tabelle 6: Kostenprozess

Prämien	π^K
Zinsen	$({}_{t-1}V^K + \pi^K)i_e$
Leistungen	—
Kosten	$Keff$
Erhöhung Rückstellungen	${}_tV^K - {}_{t-1}V^K + S^K$
Nettoergebnis Zins	$({}_{t-1}V^K + \pi^K)(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	$\pi^{K,R}(1 + i) - S^K$
Nettoergebnis Kosten	$K - Keff$

Tabelle 7: Gesamtprozess (1. und 2. Interpretation)

Prämien	π
Zinsen	$({}_{t-1}V^B + \pi - R)i_e$
Leistungen	$R + E + L$
Kosten	$Keff$
Erhöhung Rückstellungen	${}_tV^B - {}_{t-1}V^B + S^B - L$
Nettoergebnis Zins	$({}_{t-1}V^B + \pi - R)(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	$\pi^{BR}(1 + i) - S^B$
Nettoergebnis Kosten	$K - Keff$

Tabelle 8: Zerlegung des Kostenprozesses

	Deterministische Komponente	Stochastische Komponente
Prämien	$\pi^{K,S}$	$\pi^{K,R}$
Zinsen	$({}_{t-1}V^K + \pi^{K,S})i_e$	$\pi^{K,R} \cdot i_e$
Leistungen	—	—
Kosten	$Keff - S^K$	S^K
Erhöhung Rückstellungen	${}_tV^K - {}_{t-1}V^K + S^K$	—
Nettoergebnis Zins	$({}_{t-1}V^K + \pi^{K,S})(i_e - i)$	$\pi^{K,R}(i_e - i)$
Nettoergebnis Risiko	—	$\pi^{K,R}(1 + i) - S^K$
Nettoergebnis Kosten	$K - Keff$	

4 Betriebsrechnungen, Überschuss und Rentabilität

Damit der Versicherer wirtschaftlich erfolgreich sein kann, hat er Anspruch auf angemessene Gewinnmargen, die z. B. bestandesspezifisch und nach Überschussquellen definiert sind. Die Rentabilität eines Bestandes, oder allgemeiner einer Kollektion von Beständen, wird durch die Realisierung der Gewinnmarge beurteilt. Wir beschränken uns auf die Definition von möglichst einfachen und praktischen betriebswirtschaftlichen Kriterien für die Beurteilung der Rentabilität eines einzigen Bestandes. Je nach Interpretation des Versicherungsgeschehens ergeben sich unterschiedliche Kriterien. Wir fordern, dass die einzelnen Prozesse selbsttragend sind, sei es in der Brutto- oder Nettorechnung.

Wir beginnen mit der Rentabilität in einem *deterministisch* angenommenen Zins- und Kostenbereich. Modelle zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes und der effektiven Kosten sollen in dieser Arbeit nicht behandelt werden. Die Gewinnmargen des Versicherers seien durch einen *Zinsgewinnsatz* i_G mit $i_G - i \geq 0$, was einen *Zinsrückbehalt* definiert, und einen *Kostenrückbehalt* RB^K gegeben. Als Modell für das Bestandesergebnis eines Prozesses aus der Sicht des Versicherers dient das *additive Modell:*

$$\text{Bestandesergebnis} = \text{Rückbehalt} - \text{Überschaden} \tag{4.1}$$

wobei wir definieren

$$\text{Überschaden} = (\text{Rückbehalt} - \text{Nettoergebnis})_+ \tag{4.2}$$

mit $(X)_+$ der positive Teil von X. Die Terminologie "Überschaden" stammt aus der Interpretation des Risikoprozesses, der weiter unter detailliert behandelt wird. Alternativ könnte man die klassischere Terminologie "Gewinn" für "Rückbehalt" und "Verlust" für "Überschaden" verwenden.
Unter *Zinsprozess* verstehen wir die Überlagerung der *Überzinsprozesse* (Zins über dem technischen Zins) für jeden einzelnen Spar-, Risiko und Kostenbereich. Die Tabellen 3 und 7 liefern sofort:

$$\begin{aligned} &\text{Bestandesergebnis Zinsprozess} \\ &\qquad = ({}_{t-1}V^B + \pi - R)\{(i_G - i) - (i_G - i_e)_+\} \qquad (4.3) \\ &\text{Bestandesergebnis Bruttokostenprozess} \\ &\qquad = RB^K - (Keff - K + RB^K)_+ \end{aligned}$$

Im Normalfall, d. h. deterministischer Zinsprozess mit $i \leq i_G \leq i_e$ und positiver Zinsträger, ist ein Bestand immer *zinstragend,* d. h. rentabel im Zinsbereich. Ein Bestand ist *kostentragend* (im deterministischen Fall und in der ersten Interpretation), d. h. rentabel im Kostenbereich, falls das Bestandesergebnis Bruttokostenprozess positiv ist. Die Beurteilung des Kostenbereiches für die zweite Interpretation folgt später.
Der Risikobereich soll nun aufgrund der neueren risikotheoretischen Erkenntnisse behandelt werden. Die Beurteilung des Risikobereiches kann auf folgende allgemeine Situation zurückgeführt werden.
Am Ende des Versicherungsjahres stehen für einen gewissen Bestand verfügbare Einnahmen P Schäden X gegenüber, die zufällig schwanken.

Für die Kompensation eines Schadens $X > P$ stellt der Versicherer einen *Risikorückbehalt* $R(X)$ in Rechnung, der durch das Nettoergebnis Risiko $P-X$ finanziert werden soll, d. h. mit $0 \leq R(X) \leq (P-X)_+$. Dieser Rückbehalt soll eine *Risikogewinnmarge* und einen *Schwankungsausgleich* enthalten. Dieser letzte Zuschlag ist notwendig, weil nur endlich viele Jahre oder Verträge zur Verfügung stehen, um Verluste aufzufangen. Sei noch

$$U(X) = (R(X) - (P - X))_+ \tag{4.4}$$

die Zufallsvariable des Überschadens, der nach Abzug des Nettoergebnisses vom Rückbehalt entstehen kann. Die resultierende Zufallsvariable

$$Y = R(X) - U(X) \tag{4.5}$$

beschreibt dann das *Bestandesergebnis Risiko*, das zur Beurteilung der Rentabilität im Risikobereich dient. Ein Bestand heisst *risikotragend*, d. h. rentabel im Risikobereich, falls im Erwartungswert das Bestandesergebnis positiv ist und die jährlichen Schwankungen des Risikoergebnisses mit einer vorgegebenen *Sicherheitswahrscheinlichkeit* auffängt (vgl. hierzu *Bernhardt/Endres* [1979], 203). Um dieses Kriterium in der Praxis verifizieren zu können, muss noch die Funktion $R(X)$ bestimmbar sein. Wir bemerken, dass das Bestandesergebnis Risiko *selbst* ein Risiko ist, das mit Hilfe eines Prämienkalkulationsprinzips H tarifiert wird. Da der Rückbehalt $R(X)$ die bestandesspezifische *Selbstfinanzierung* dieses Risikos durch das Nettoergebnis Risiko garantieren soll, ist keine Prämie mehr nötig, um das Risiko Y zu decken. In anderen Worten verlangen wir, dass

$$H(R(X) - U(X)) = 0 \tag{4.6}$$

wobei das Prämienprinzip H den Risikogewinnanteil des Versicherers und den Schwankungsausgleich natürlich enthalten (diese Forderung ist ebenfalls in der Notiz *Hürlimann* [1988]).

Es sei vorweggenommen, dass die Gleichung (4.6) nicht immer lösbar sein muss, wie auch $R(X)$ konkret aussieht. Das heisst, es gibt Bestände, die a priori nicht risikotragend sind. Dies ist zum Beispiel intuitiv einleuchtend bei sehr kleinen Beständen. Die Marge $P-E(X)$ genügt nicht mehr, um Lösungen von (4.6) zu garantieren. In der Literatur sind bisher folgende Wahlen für den Risikorückbehalt am häufigsten getroffen worden:

$$R(X) = \min(B, (P - X)_+), \qquad B = \text{const.} \tag{4.7}$$

was einen konstanten Abzug vom Nettoergebnis Risiko bedeutet, oder

$$R(X) = g(P - X)_+, \qquad 0 < g < 1 \tag{4.8}$$

was ein proportionaler Abzug ist (*Bernhard/Endres* [1979]).
In der weiteren Diskussion behandeln wir nur den Fall (4.7), der bei schadenfreiem Verlauf grosse Überschüsse liefert. Wir wählen ein translationsinvariantes Prämienkalkulationsprinzip (d. h. $H(X + C) = H(X) + C$ für konstantes C), zum Beispiel das Streuungsprinzip $H(X) = E(X) + a\sigma(X)$, $a > 0$. Durch Nachrechnen erhält man

$$\begin{aligned} H(R(X) - U(X)) &= H(B - (X - (P - B))_+) \\ &= B - H((X - (P - B))_+) \end{aligned}$$

Die Forderung (4.6) liefert somit

$$B = H((X - (P - B))_+), \tag{4.9}$$

was die Konstante B als eine *Brutto-Stop-Loss-Prämie* zur Priorität $P - B$ mit implizit definiertem B identifiziert (siehe auch *Bernhard/Endres* [1979], *Hürlimann* [1988]).
Dieses allgemeine Resultat soll nun auf die Lebensversicherung angewendet werden. Wir benötigen folgende Risikogrössen mit ihren Bezeichnungen:

SB^B	Selbstbehalt des Bruttorisikoprozesses
SB^R	Selbstbehalt des Risikoprozesses
SB^K	Selbstbehalt der stochastischen Komponente des Kostenprozesses
F^B	Verteilungsfunktion der Bruttoschadensumme S^B
F^R	Verteilungsfunktion der Schadensumme S
F^K	Verteilungsfunktion der Schadensumme im Kostenprozess S^K

Für die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X sei weiter

$$BSL(F, SB) = E[(X - SB)_+] + a\sigma[(X - SB)_+] \tag{4.10}$$

die Brutto-Stop-Loss-Prämie zum Selbstbehalt SB (Streuungsprinzip). Nach den neuesten Erkenntnissen können diese Prämien sowohl im individuellen wie im kollektiven Modell mit Hilfe einer Rechenanlage exakt oder zumindest approximativ sehr genau gerechnet werden. Für das kollektive Modell benützt man die Adelson-Panjer-Rekursion (*Panjer* [1981]) bzw. deren

Verallgemeinerungen auf negative Risikosummen (*Hürlimann* [1985], *Sundt* [1986]) oder die FFT-Methode (FFT: schnelle Fourier Transformation, *Bertram* [1981/83], *Hürlimann* [1986]). Im individuellen Modell benützt man das exakte, aber langsame Verfahren von *De Pril* [1986] oder andere schnelle und gute Approximationsmethoden (*Kornya* [1983], *De Pril* [1987], Bemerkung von *Reimers* [1987], *Goovaerts / van Heerwaarden / Kaas* [1988], diese letzte Methode ist allgemeiner im Nicht-Leben-Bereich anwendbar). Die verwendeten Grundlagen sind nun, in Kontrast zu den Tabellen 1 bis 7, nicht mehr tarifliche Grundlagen, sondern Sterblichkeiten 2. Ordnung.
Die eingeführten Selbstbehalte seien nun implizit als Lösungen, falls sie existieren, der folgenden Gleichungen definiert (Begründung durch Formel (4.9)):

$$BSL(F^B, SB^B) = \pi^{BR}(1+i) - SB^B, \tag{4.11}$$

$$BSL(F^R, SB^R) = \pi^R(1+i) - SB^R, \tag{4.12}$$

$$BSL(F^R, SB^K) = \pi^{K,R}(1+i) - SB^K, \tag{4.13}$$

Die Berechnung aller *Bestandesergebnisse* nach Modell (4.1) in den verschiedenen Interpretationen liefert zusammengefasst:

Bestandesergebnis Zinsprozess

$$\doteq ({}_{t-1}V^B + \pi - R)\{(i_G - i) - (i_G - i_e)_+\} \tag{4.14}$$

Bestandesergebnis Bruttorisikoprozess

$$= BSL(F^B, SB^B) - (S^B - SB^B)_+ \tag{4.15}$$

Bestandesergebnis Risikoprozess

$$= BSL(F^R, SB^R) - (S - SB^R)_+ \tag{4.16}$$

Bestandesergebnis Bruttokostenprozess

$$= RB^K - (Keff - K + RB^K)_+ \tag{4.17}$$

Bestandesergebnis Kostenprozess

$$\begin{aligned} &= RB^K - (Keff - K + PB^K)_+ \\ &\quad + BSL(F^K, SB^K) - (S^K - SB^K)_+ \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die *Überschüsse* der verschiedenen Prozesse, gegeben durch die additive Modellgleichung

$$\text{Überschuss} = (\text{Nettoergebnis} - \text{Rückbehalt})_+ \tag{4.19}$$

lassen sich ebenfalls berechnen.

Man erhält:

Überschuss Zinsprozess

$$= ({}_{t-1}V^B + \pi - R)(i_e - i_G)_+ \tag{4.20}$$

Überschuss Bruttorisikoprozess

$$= (SB^R - S^B)_+ \tag{4.21}$$

Überschuss Risikoprozess

$$= (SB^R - S)_+ \tag{4.22}$$

Überschuss Bruttokostenprozess

$$= (K - Keff - RB^K)_+ \tag{4.23}$$

Überschuss Kostenprozess

$$= (K - Keff - RB^K)_+ + (SB^K - S^K)_+ \tag{4.24}$$

Zusammenfassend haben wir für Bestände von allgemeinen Lebensversicherungen einen allgemeinen Weg aufgezeigt, um die Rentabilität zu messen und die Überschüsse zu ermitteln. Die Frage der Rentabilität und Überschüsse eines ganzen Portefeuilles von verschiedenen Lebensversicherungsprodukten für eine Lebensversicherungsgesellschaft sollte unseres Erachtens auf den behandelten Spezialfall zurückführbar sein. Für kostenneutrale Beurteilungen ist die zweite Interpretation des Lebensversicherungsgeschehens (Nettoprozesse und Kostenprozess selbsttragend) vermutlich vorzuziehen.
Andererseits ist durch die Ermittlung der Überschüsse die Überschussbeteiligung noch nicht festgelegt. Obwohl durch unsere Methode der totale Überschuss eines Bestandes dem Versicherungsnehmer zurückerstattet werden kann, ist aus verschiedenen Gründen (z. B. Aufsichtsbehörde) denkbar, dass dies nicht der Fall sein muss. In diesem Fall sind weitere Überlegungen zu unserem Modellansatz notwendig.

Beispiel 3: Wir diskutieren kurz den behandelten Abzug (4.7) ohne Gewährung einer Überschussbeteiligung im Risikobereich. Das Ergebnis Risiko des Versicherers lässt sich auf zwei Arten darstellen, als das Nettoergebnis Risiko oder als die Differenz Rückbehalt abzüglich Überschaden. Mit $SB = P - B$, Schaden X mit Verteilungsfunktion F, ergibt dies die Gleichung

$$P - X = BSL(F, SB) - (X - SB)_+ \tag{4.25}$$

mit SB als Lösung der Gleichung

$$BSL(F, SB) + SB = P \tag{4.26}$$

Durch Einsetzen folgt

$$(X - SB)_+ = X - SB \tag{4.27}$$

Nimmt man an, dass X nur positive Werte annimmt (positive Risikosummen), so bedeutet dies, dass $SB = 0$ sein muss. In diesem Fall gilt

$$BSL(F, 0) = E(X) + a\sigma(X), \qquad a = \frac{P - E(X)}{\sigma(X)} \tag{4.28}$$

Der Parameter a muss natürlich so festgelegt sein, dass die Sicherheit und der Gewinn des Versicherers für den betrachteten Bestand "gerade" genügen. Die Tarifierung ist damit mit dem Streuungsprinzip äquivalent. Als typisches Lebensversicherungsprodukt zu diesem Beispiel gilt die Stop-Loss Rückversicherung, wobei X folgendermassen interpretiert wird: $X = (S - T)_+$, S der Gesamtschaden des Bestandes, T die Priorität.

5 Computerunterstützte Berechnungen

Die Begriffe und Konzepte dieser Arbeit sind so entwickelt worden, dass sie auf kleinere Rechenanlagen (Personal Computer) mit relativ geringem Aufwand implementierbar sind. Wir skizzieren einen möglichen Weg zur erfolgreichen Realisierung unserer Konzepte.
Das Leitmotiv der strukturierten Programmierung, das in den siebziger Jahren vorgeschlagen worden ist, beruht auf dem vereinfachten Berechnungsmodell:

$$\text{Programm} = \text{Datenstruktur} + \text{Algorithmen} \tag{5.1}$$

das von *Wirth* [1975] popularisiert worden ist. Höhere Programmiersprachen, die diesem Paradigma folgen, sind z. B. PASCAL und MODULA-2. Für eine Realisierung auf PC's ist z. B. das effiziente Programmiersystem TURBO PASCAL 4.0 verfügbar.
Abgesehen von den Stop-Loss-Berechnungen, für die es zur Zeit verschiedene gute effiziente Algorithmen gibt, bereiten die anderen Berechnungen keine arithmetischen Schwierigkeiten. Wie schon erwähnt, ist die Berechnung der Stop-Loss-Prämien in letzter Zeit in der Literatur ergiebig diskutiert worden. Deshalb konzentrieren wir uns in dieser Arbeit ausschliesslich auf die bestandesspezifische computerunterstützte Erzeugung der Tabellen 1 bis 7.

Eine elegante Lösung hängt gemäss (5.1) von einer geeigneten Wahl der Datenstruktur ab. Der *Zustand* einer allgemeinen Lebensversicherung für einen Versicherten in einem bestimmten Versicherungsjahr ist beschrieben durch einen Datensatz (= Datenstruktur "record"):

$$\textbf{\textit{VersicherteDaten}} = (g, x, n, t, RL, EL, TL, RkL, IndT, IndRk) \tag{5.2}$$

wobei die (neu eingeführten) Variablen folgende Bedeutung haben:

> g : Geschlecht, $RL = R_t^x$, $EL = E_t^x$, $TL = T_t^x$, $RkL = Rk_t^x$, $IndT = \varepsilon_{x+t}$, $IndRk = \delta_{x+t}$, wobei t die Ende Versicherungsjahr abgelaufenen Jahre seit dem Eintritt zählt.

Die bestandesspezifischen Daten können in einer Datei (= "file") oder in einer indizierten Tabelle (= "array") gespeichert werden, wobei jeder Eintrag von der obigen Datenstruktur ist. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass diese Daten durch folgende strukturierte Variable dargestellt sind:

$$\textbf{\textit{BestandDaten:}}\ \text{array}[1 \ldots \textbf{\textit{AnzVMax}}]\ \text{of}\ \textbf{\textit{VersicherteDaten}}, \tag{5.3}$$

wobei ***AnzVMax*** eine Konstante, die die speicherbedingte maximale Anzahl von Versicherten angibt. Durch die flexible Verwendung einer Datei muss diese Konstante übrigens nicht festgesetzt werden. Das Element *Versicherungstarif* einer allgemeinen Lebensversicherung wird durch eine Variable ***VTarif*** vom folgenden Datentypus (= "record") beschrieben:

$$\textbf{\textit{Tarif}} = (Ps, Pr, Pks, Pkr, Va, Ve, BVa, BVe, KVa, KVe, K) \tag{5.4}$$

mit

> $PS = \pi_t^{S,x}$, $Pr = \pi_t^{R,x}$, $Pks = \pi_t^{K,S,x}$, $Pkr = \pi_t^{K,R,x}$, $Va = {}_{t-1}V_x$, $Ve = {}_tV_x$, $BVa = {}_{t-1}V_x^B$, $BVe = {}_tV_x^B$, $KVa = {}_{t-1}V_x^K$, $KVe = {}_tV_x^K$, $K = K_t^x$.

Zur Berechnung von ***VTarif*** aufgrund von ***VersicherteDaten***, dies geschehe in einer Routine namens ***ComputeVTarif***, benötigt man nebst mathematischen Formeln versicherungstechnische Grundlagen wie z. B. Sterblichkeiten, Barwerte usw. Diese werden in Variablen $q_x, \ddot{a}_x$ usw. mit Hilfe von geeigneten Tabellen ***Tafeln*** einmal generiert, z. B. durch eine Prozedur ***Generate Tafeln***, und dann zur ständigen Verwendung bereitgehalten. Danach benötigt man eine Routine, sagen wir ***ComputeIndSchema,*** zur Berechnung eines *individuellen Abrechnungsschemas* mit Hilfe der Prozedur ***ComputeVTarif*** und aufgrund von ***VersicherteDaten.*** Dieses individuelle Abrechnungsschema entspricht einer Variablen ***IndSchema*** vom Datentypus (= "record"):

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{Schema}} = (&P,\ Ps,\ Pr,\ Pk,\ Pkr,\ Pks,\\
&Va,\ Ve,\ BVa,\ BVe,\ KVa,\ KVe,\\
&S,\ BS,\ KS.\\
&L,\ RL,\ EL,\ TL,\ RkL,\\
&K,\ Keff)
\end{aligned}
$$

mit den (neu eingeführten) Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
Pk &= Pks + Pkr(= \pi_t^{K,x}),\\
P &= Ps + Pr + Pk(= \pi_t^x),\\
S &= L_t^x - \Omega_{x+t} \cdot {}_tV_x,\\
BS &= L_t^x - \Omega_{x+t} \cdot {}_tV_x^B,\\
KS &= BS - S,\\
L &= L_t^x.
\end{aligned}
$$

Anschliessend werden aufgrund der konkreten ***BestandDaten*** das *bestandesspezifische Abrechnungsschema,* Variable ***Bestandschema*** vom Datentypus ***Schema,*** in ***ComputeBestandSchema*** durch Abrufen der Prozedur ***ComputeIndSchema*** generiert. Die so erhaltenen Informationen werden schliesslich dem Benützer mit Hilfe von geeigneten Druckprozeduren zugänglich gemacht. Übersichtshalber sei die wesentliche algorithmische Struktur des Verfahrens durch folgenden Programmausschnitt dargestellt:

```
PROGRAMM      Abrechnungsschema;
CONST         AnzVMax = ... ;
TYPE          Tafeln = ... ;
              VersicherteDaten = ... ;
              Tarif = ... ;
              Schema = ... ;
VAR           AnzV: INTEGER;
              BestandDaten: ARRAY [1 ... AnzVMax] OF VersicherteDaten;
              VTarif: Tarif;
              IndSchema, BestandSchema: Schema;
              q_x, aex, ... : Tafeln;
PROCEDURE     GenerateTafeln;
              {generiert die versicherungstechnischen Grundlagen }
PROCEDURE     ReadBestandDaten;
              {liest die bestandesspezifischen Daten }
PROCEDURE     ComputeVTarif (Versicherte: VersicherteDaten; VAR VTarif: Tarif);
              {berechnet den Versicherungstarif für einen Versicherten }
PROCEDURE     ComputeIndSchema (Versicherte: VersicherteDaten; VAR Indschema:
              Schema);
              {berechnet ein individuelles Abrechnungsschema für einen Versicherten}
PROCEDURE     ComputeBestandSchema;
              { berechnet ein bestandesspezifisches Abrechnungsschema }
PROCEDURE     WriteBestandSchema;
              { Druckprozedur }

{ Hauptprogramm }
BEGIN
      GenerateTafeln;
      ReadBestandDaten;
      ComputeBestandSchema;
      WriteBestandSchema;
END.
```

Im nächsten Abschnit werden die Prozeduren **_ComputeVTarif_**, **_ComputeIndSchema_** und **_ComputeBestandSchema_** anhand von illustrativen Beispielen näher erläutert.

6 Numerische Beispiele

Das allgemeine Konzept dieser Arbeit sei anhand von zwei speziellen Versicherungstarifen inklusive numerische Auswertungen illustriert. Die Methode wurde in PASCAL implementiert.

6.1 *Laufende Altersrenten*

In der heutigen Tarifierungspraxis werden immer häufiger anwartschaftliche Versicherungen von laufenden Renten auseinandergehalten. Dafür gibt es sowohl statistische Gründe (z. B. *Niedermann* [1987], 188) wie auch risikotheoretische Motivationen (z. B. *Hürlimann* [1986], "Two inequalities ..."). Deshalb ist es erwünscht, Bestände von laufenden Renten separat zu untersuchen.

Als Spezialisierung unserer allgemeinen Lebensversicherungen betrachten wir lebenslängliche laufende Altersrenten mit vorschüssigen jährlichen Zahlungen ohne Todesfallleistungen (Beispiele 1, 2). Mit einem Kostenansatz γ_2 beschreiben wir nun die relevanten Formeln zur computerunterstützten Bestandesberechnung. Die Grössen q_x, $\ddot{a}_x$ nach (GRM80, analytische Formeln) werden in Tafeln gespeichert. Einfachheitshalber sollen keine Rückkäufe stattfinden, d. h. es gilt stets $IndRk = 0$. Die Variablen q_x, $\ddot{a}_x$, i, v, i_e ***BestandDaten, BestandSchema*** und ***AnzV*** (= Anzahl Versicherte) sind global definiert. Der Komponente ***BestandSchema.Keff*** werden zu Beginn die effektiven Kosten des Bestandes zugewiesen. Die anderen Komponenten von ***BestandSchema*** werden zu 0 initialisiert. Für die einzelnen Prozeduren erhalten wir im wesentlichen:

ComputeVTarif

Der Variablen ***VTarif*** werden in Abhängigkeit von g, x, t (Komponenten von ***Versicherte)*** folgende Werte zugeteilt:

$$Va = \ddot{a}_{x+t-1},$$

$$Ve = \ddot{a}_{x+t},$$

$$Pr = -vq_{x+t-1}Ve,$$

$$K = \gamma_2(1+i).$$

ComputeIndSchema
Der Variablen ***IndSchema*** werden in Abhängigkeit von g, x, t, RL, $IndT$ (Komponenten von ***Versicherte***), via der Hilfsvariablen ***VTarif***, wie folgt Werte zugeordnet:

ComputeVTarif(Versicherte, VTarif)
$Va = RL \cdot$ ***VTarif.Va***, $\quad Ve = RL \cdot$ ***VTarif.Ve***,
(beachte die PASCAL-Schreibweise für Komponenten vom Typ RECORD)
$BVa = (1+\gamma_2) \cdot Va$, $\quad BVe = (1+\gamma_2) \cdot Ve$, $\quad KVa = \gamma_2 \cdot Va$, $\quad KVe = \gamma_2 Ve$,
$Pr = RL \cdot$ ***VTarif.Pr***, $\quad Ps = -Pr$, $\quad Pkr = \gamma_2 Pr$, $\quad Pks = -Pkr$, $\quad Pk = 0$,
$P = 0$, $\quad S = -IndT \cdot Ve$, $\quad BS = (1+\gamma_2) \cdot S$, $\quad KS = \gamma_2 \cdot S$, $\quad K = RL \cdot$ ***Tarif.K***,
$Keff = K \cdot$ ***BestandSchema.Keff***
(proportional zugewiesene effektive Kosten)

ComputeBestandSchema
Die Variable ***BestandSchema*** wird gestützt auf ***BestandDaten***, wie folgt algorithmisch berechnet:

FOR j := 1 TO AnzV DO BEGIN
    ComputeIndSchema(BestandDaten [j], ***IndSchema)***
    $P = P +$ ***IndSchema.P***, ... (andere additive Zuweisungen)
END

Mit Hilfe von geeigneten Druckprozeduren können die Tabellen 1 bis 7 erzeugt werden. Nach nochmaliger Anwendung der Prozedur ***ComputeIndSchema*** und proportionaler Umverteilung der effektiven Kosten auf die Versicherten können sogar individuelle Tabellen 1 bis 7 erzeugt und gedruckt werden. Die Ergebnisse der numerischen Auswertungen sind in den folgenden Tabellen zusammengefasst. Wir rechneten mit $i_e = 0.05$, $\gamma_2 = 0.02$.

Tabelle 9:
Versicherte Daten für einen Bestand von 500 laufenden Altersrenten

Anzahl Versicherte	g	x	t	RL	IndT	Risikosummen Tod
5	1	65	3	12 000	1	– 118 428
5	1	65	6	6 000	1	– 49 002
5	1	65	9	24 000	1	– 152 220
5	1	65	12	10 000	1	– 43 117
120	1	65	1	24 000	0	– 262 854
120	1	65	5	18 000	0	– 157 425
120	1	65	10	12 000	0	– 68 355
120	1	65	15	6 000	0	– 11 663

Tabelle 10:
Technische Bruttorechnung: laufende Altersrenten

	Sparen	Risiko	Kosten	Gesamt
Prämien	1 211 479	– 1 360 679	149 200	0
Zinsen	3 002 424	– 68 034	7 460	2 941 850
Leistungen	9 274 338	– 1 814 338		7 460 000
Kosten			125 000	125 000
Erhöhung Rückst.	– 6 261 405			– 6 261 405
Nettoerg. Zins	1 200 970	– 27 214	2 984	1 176 740
Nettoerg. Risiko		412 839		412 839
Nettoerg. Kosten			28 676	28 676

Tabelle 11:
Technische Nettorechnung: laufende Altersrenten

	Sparen	Risiko	Kosten	Gesamt
Prämien	1 333 999	– 1 333 999	0	0
Zinsen	2 943 553	– 66 700	64 997	2 941 850
Leistungen	9 238 763	– 1 778 763		7 460 000
Kosten			125 000	125 000
Erhöhung Rückst.	– 6 138 632		– 122 773	– 6 261 405
Nettoerg. Zins	1 177 421	– 26 680	25 999	1 176 740
Nettoerg. Risiko		404 744	8 095	412 839
Nettoerg. Kosten			28 676	28 676

Zur Ermittlung der Überschüsse und zur Beurteilung der Rentabilität dieses Bestandes sind Brutto-Stop-Loss-Prämien zu berechnen.
Wir wählen hier das kollektive Modell der Risikotheorie und die FFT-Methode. Für den Sicherheitszuschlag auf die Netto-Stop-Loss-Prämien gelte $a = 0.15$. In Anlehnung an die letzten statistischen Erhebungen in der schweizerischen Kollektivversicherung (*Niedermann* [1987]) gelte $q_x^{\mathrm{II}} = 1.2q_x$, q_x nach GRM80, als Sterblichkeit 2. Ordnung. Zur Illustration betrachten wir nur den Bruttorisikoprozess. Wir wissen, dass der Selbstbehalt SB^B Lösung der Gleichung (4.11) ist:

$$-1\,428\,713 = SB^B + BSL(F^B, SB^B) \tag{6.1}$$

Durch Interpolation der Werte (Risikosummen auf 1000 gerundet) $BSL(F^B, -1\,550\,000) = 125\,000$, $BSL(F^B, -1\,560\,000) = 129\,000$ kann man sich für $SB^B = -1\,555\,000$ entscheiden.
Mit (6.1) folgt damit $BSL(F^B, SB^B) = 126\,287$. Der Bestand ist, mit der gegebenen Sicherheit und Gewinnmarge (Wahl von a), risikotragend, falls der Rückbehalt mit Risikoprozess mindestens 126 287 ausmacht.

6.2 *Gemischte Versicherungen*

Das zweite klassische Beispiel behandelt die gemischte Versicherung mit Schlussalter $s = 65$ nach den Grundlagen GKM80 (analytische Formeln) und mit Kostensätzen $\alpha = 0$, $\beta = 0.13$, $\gamma = 0.00165$. Für die Sterblichkeiten 2. Ordnung gelte $q_x^{II} = 0.8q_x$, q_x nach GKM80, und wiederum sei $a = 0.15$ der Sicherheitszuschlag auf die Netto-Stop-Loss- Prämien. Die Beschreibung der relevanten Prozeduren beschränkt sich nur noch auf die tariflichen Gegebenheiten. Folgende Schritte (mit allgemeinem s, α, β, γ) sind zu beachten:

Compute VTarif:

$$n = s - x,$$

$$Va = 1 - \ddot{a}_{x+t-1\,:\,\overline{n-t+1}|} / \ddot{a}_{x\,:\,\overline{n}|}$$

$$Ve = \begin{cases} 1 - \ddot{a}_{x+t\,:\,\overline{n-t}|} / \ddot{a}_{x\,:\,\overline{n}|} & t < n \\ 0 & t = n \end{cases}$$

$$BVa = (1+\alpha)Va - \alpha, \qquad BVe = (1+\alpha)Ve - \alpha$$
$$KVa = \alpha(Va - 1) \quad , \qquad KVe = \alpha(Ve - 1)$$

$$Pr = \begin{cases} vq_{x+t-1}(1 - Ve) & t < n \\ 0 & t = n \end{cases}$$

$$Ps = \begin{cases} vVe - Va & t < n \\ v - Va & t = n \end{cases}$$

$$Pkr = -vq_{x+t-1}KVe$$

$$K = \frac{\beta}{1-\beta}\left(Pr + Ps + \frac{\gamma}{\beta} - \alpha\right)(1+i) + \begin{cases} 0 & t < n \\ \alpha(1 - q_{x+n-1}) & t = n \end{cases}$$

$$PKs = vKVe - KVa + vK$$

Ausser für die Kosten 1. Ordnung, Formel die mit (2.18) gewonnen wird, ist die Herleitung der Formeln klassisch (z. B. *Wolfsdorf* [1986], 207).

ComputeIndSchema
ComputeVTarif (Versicherte, VTarif)

$$EL = \begin{cases} 0 & t < n \\ TL & t = n \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} VA\ = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.VA}}, & Ve\ = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.Ve}} \\ BVa = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.BVA}}, & BVe = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.BVe}} \\ KVa = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.KVa}}, & KVe = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.KVe}} \\ BS\ = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.Ps}}, & Pr\ = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.Pr}} \\ Pks\ = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.Pks}}, & Pkr\ = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.Pkr}} \end{array}$$

$$Pk = Pks + kPkr, \qquad P = Ps + Pr + Pk$$

$$L = \begin{cases} TL \cdot IndT & t < n \\ 0 & t = n \end{cases}$$

$$S = L - IndT \cdot Ve, \quad BS = L - IndT \cdot BVe, \quad KS = BS - S$$

$$K = TL \cdot \textbf{\textit{VTarif.K}}, \quad Keff = K \cdot \textbf{\textit{BestandSchema.Keff}}$$

(proportional zugewiesene effektive Kosten)
Numerische Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen ersichtlich. Da $\alpha = 0$ stimmen Brutto- und Nettoprozess überein (keine stochastische Komponenten im Kostenprozess).

Tabelle 12: Versichterte Daten für einen Bestand von 802 gemischte Versicherungen mit Schlussalter 65

Anzahl Versicherte	g	x	t	TL	IndT	Risikosummen Tod
1	1	25	20	100 000	1	63 131
1	1	40	20	150 000	1	40 272
100	1	25	1	200 000	0	197 225
100	1	25	10	100 000	1	84 071
100	1	35	5	180 000	0	158 975
100	1	35	15	120 000	0	72 222
100	1	45	10	120 000	0	69 155
100	1	45	20	100 000	0	0
100	1	55	5	60 000	0	32 876
100	1	55	10	50 000	0	0

Tabelle 13:
Technische Nettorechnung: gemischte Versicherungen

	Sparen	Risiko	Kosten	Gesamt
Prämien	2 805 872	211 767	927 765	3 645 404
Zinsen	1 538 552	10 588	31 388	1 580 528
Leistungen	15 146 597	103 403		15 250 000
Kosten			320 000	320 000
Erhöhung Rückst.	– 11 417 594			– 11 417 594
Nettoerg. Zins	615 421	4 235	12 555	632 211
Nettoerg. Risiko		114 717		114 717
Nettoerg. Kosten			326 598	326 598

Die Untersuchung wird durch Angabe der Brutto-Stop-Loss-Prämie vervollständigt. Es ist (4.12) zu lösen:

$$222\,355 = SB^R + BSL(F^R, SB^R)$$

Man erhält $BSL(F^R, 100\,000) = 121\,000, BSL(F^R, 110\,000) = 113\,000$ und entscheidet sich für $SB^R = 105\,000, BSL(F^R, 105\,000) = 117\,355$.

Werner Hürlimann
Allgemeine Mathematik
Winterthur-Leben
8400 Winterthur

Literaturverzeichnis

Bernhardt, R./Endres J. (1979): Erfahrungstarifierung (Experience Rating) und getrennte Abrechnungsverbände in der Lebensversicherung. Blätter der DGVM, Bd. XIV, Heft 2, 200–229.

Bertram, J. (1981): Numerische Berechnung von Gesamtschadenverteilungen. Blätter der DGVM, Bd. XV, Heft 2.

Bertram, J. (1983): Calculation of aggregate claims distributions in case of negative risk sums. XVII-th ASTIN Colloquium, Lindau (Germany).

De Pril, N. (1986): On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model. ASTIN Bulletin 16, 109–112.

De Pril, N. (1987): Improved approximations for the aggregate claims distribution of a life insurance portfolio. Paper presented at the meeting on Risk Theory, Oberwolfach.

Feilmeier, M. (1979): Zur Finanzierbarkeit der Überschussbeteiligung in der Lebensversicherung: Grundsätzliches und Pragmatisches. Blätter der DGVM, Bd. XIV, 337–356.

Gerber, H. U. (1986): Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag.

Gessner, P. (1978): Überschusskraft und Gewinnbeteiligung in der Lebensversicherung. Schriftenreihe "Angewandte Versicherungsmathematik", Heft 7, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

Goovaerts, M.J./van Heerwaarden A.E./Kaas, R. (1988): On stop-loss premiums for the individual model. Appears in ASTIN Bulletin.

Goovaerts, M.J./van Heerwaarden A.E./Kaas, R. (1988): Between individual and collective model for the total claims. Submitted to ASTIN Bulletin.

Held, R.P. (1982): Zur rekursiven Berechnung von Stop-Loss-Prämien für Pensionskassen. Mitt. Vereinigung schweiz. Vers.math., Heft 1, 67–89.

Hürlimann, W. (1985): Semirekursive Berechnung von Gesamtschadenverteilungen und exakte Stop-Loss-Prämien. Mitt. Vereinigung schweiz. Vers.math., Heft 2, 175–188.

Hürlimann, W. (1986): Two inequalities on stop-loss premiums and some of its applications. Insurance: Mathematics and Economics 5, 159–163.

Hürlimann, W. (1986): Error bounds for stop-loss premiums calculated with the Fast Fourier Transform. Scand. Actuarial Journal 107–113.

Hürlimann, W. (1988): On algebraic equivalence of tariffing systems. Insurance: Mathematics and Economics 7, 35–37.

Kornya, P.S. (1983): Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model, Transactions Society of Actuaries 35, 823–858.

Niedermann, M. (1987): Die Sterblichkeitsstatistik 1981/84 in der schweizerischen Kollektivlebensversicherung. Mitt. Vereinigung schweiz. Vers.math., Heft 2, 181–208.

Panjer, H.H. (1981): Recursive evaluation of a family of compound distributions. ASTIN Bulletin 12, 22–26.

Reimers, L. (1987): Remarks on De Pril's 1987 paper. Letter to the Editor of ASTIN Bulletin.

Sundt, B. (1986): On stop-loss premiums and negative claim amounts. Mitt. Vereinigung schweiz. Vers.math., Heft 1, 89–94.

Wirth, N. (1983): Algorithmen und Datenstrukturen, 3. Aufl., Teubner-Verlag.

Wolfsdorf, K. (1986): Versicherungsmathematik, Teil 1, Personenversicherungen. Teubner-Verlag.

Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht Möglichkeiten, um aus der Sicht des Versicherers die Rentabilität von Lebensversicherungsbeständen zu messen. Das Lebensversicherungsgeschehen mit einer Ausscheideursache wird anhand des Begriffs einer allgemeinen Lebensversicherung auf zwei verschiedene Arten interpretiert. Es ergeben sich zwei unterschiedliche additive Zerlegungen der technischen Rechnung in Spar-, Risiko- und Kostenprozesse. Als Konsequenz analysieren wir die Hauptfragen nach Überschussermittlung und Rentabilität. Der Risikobereich wird unter Berücksichtigung der neueren stochastischen Modelle ausführlich behandelt. Schliesslich zeigen wir, gestützt auf ein einfaches Modell der strukturierten Programmierung, einen Weg, um numerische Ergebnisse ohne grossen Aufwand zu erzeugen. Zwei numerische Beispiele runden die Untersuchung ab.

Résumé

L'article est consacré à la mesure de la rentabilité d'un portefeuille d'assurances-vie du point de vue de l'assureur. Le processus de l'assurance-vie à une cause de sinistres est interprété de deux manières différentes à l'aide de la notion d'assurance-vie généralisée. Il en résulte deux décompositions additives différentes du compte de pertes et profits en processus épargne, risque et coûts. Les résultats obtenus permettent d'aborder les questions principales de la détermination des excédents et de la rentabilité. La composante risque est traitée de manière approfondie en tenant compte des modèles aléatoires les plus récents. Finalement l'auteur propose une méthode basée sur un modèle simple de programmation structurée pour engendrer sans grand effort des résultats numériques. Deux exemples numériques arrondissent cette recherche.

Summary

We investigate possibilities to measure the profitability of life insurance portfolios from the point of view of the insurer. The life insurance process with one claim event is interpreted in two different ways using the notion of a generalized life insurance. One obtains two different additive decompositions of the profit and loss account in savings, risk and cost processes. As a consequence we analyse the main questions of the determination of the surplus and the profitability. The risk component is comprehensively dealt with taking into account the more recent stochastic models. Finally we exhibit a way, based on a simple model of structured programming, to generate numerical results without great effort. Two numerical examples illustrate this investigation.