Lineare Filtration und Kredibilitätstheorie

Autor(en): **Hiss, Karin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (1991)**

Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967279

KARIN HISS, Basel

Lineare Filtration und Kredibilitätstheorie

Einleitung

Der vorliegende Artikel ist eine Zusammenfassung einer Diplomarbeit an der Universität Basel (1990). Er verfolgt, wie der Titel bereits zum Ausdruck bringt, zwei Ziele:

- eine kurze Darstellung der linearen Filtrationstheorie mit dem Hauptresultat, dem Theorem von *Kalman;*
- die Anwendung der Filtrationsresultate auf Versicherungsmodelle zur Ermittlung des Kredibilitätsschätzers.

Im Gegensatz zur Originalarbeit ist hier der erste Teil knapp gehalten. Für eine ausführliche Behandlung der linearen Filtrationstheorie sei auf die Literatur verwiesen, insbesondere auf *Davis* [3] und *Hiss* [6]. Das Schwergewicht des Artikels liegt auf dem zweiten Teil, wo ein allgemeines Kredibilitätsmodell mit *stetigem* Zeitparameter formuliert und der Kredibilitätsschätzer mit dem Kalman-Filter berechnet wird. Die klassischen Modelle von *Bühlmann* (1967) und von *Bühlmann/Straub* (1970) und das lineare Regressionsmodell von *Hachemeister* (1975) werden auf den stetigen Fall übertragen und stellen so Spezialfälle des allgemeinen Modells dar. Ferner werden noch zwei neue Modelle vorgestellt.

1 Lineare Filtration

1.1 Grundlagen

Alle im folgenden betrachteten Zufallsvariablen sind auf einem festen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definiert. Sei $\widetilde{\mathscr{H}}$ die Menge der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen und $\mathscr{N} := \{X \in \widetilde{\mathscr{H}} | P(X = 0) = 1\}$. Auf dem Quotientenraum $\mathscr{H} := \widetilde{\mathscr{H}} / \mathscr{N}$ können wir ein Skalarprodukt definieren durch $(X, Y) := \mathbb{E}[X \cdot Y]$. Damit wird $\mathscr{H}$ zu einem Hilbertraum, den wir auch mit $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ bezeichnen.

Ist $\{x_t = (x_t^1, \ldots, x_t^n), t \geq 0\} \subseteq \mathscr{H}$ ein n-dimensionaler stochastischer Prozess, so betrachten wir folgende Unterräume von $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H}_t^x := \overline{\mathscr{L}\{x_{t^1}^1, \ldots, x_{t^n}^n | 0 \leq t^k \leq t, k = 1, \ldots, n\}}^{\mathscr{H}}$$
$$= \{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_i^k x_{t_i^k}^k | a_i^k \in \mathbb{R}, 0 \leq t_i^k \leq t, m \in \mathbb{N}\} \quad , \quad t \geq 0.$$

Der Prozess $\{x_t = (x_t^1, \ldots, x_t^n), t \geq 0\}$ besitzt orthogonale Zuwächse, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ und $s \leq t$ gilt:

$$x_t^i - x_s^i \perp \mathscr{H}_s^x.$$

Für Schätzprobleme ist folgender Satz von zentraler Bedeutung:

1.1.1 Satz

Sei $\{x_t = (x_t^1, \ldots, x_t^n), t \geq 0\}$ ein Prozess in $\mathscr{H}$. Ist $Y \in \mathscr{H}$, so ist der beste affine Minimum-Quadrat-Schätzer $\widehat{Y}$ von Y, gegeben $\{x_s, s \leq t\}$, gerade

$$\widehat{Y} = P_t^{x,1} Y.$$

D.h. $\widehat{Y}$ ist die Projektion von Y auf $\mathscr{H}_t^{x,1}$.

Dabei bezeichnen wir mit $\mathscr{H}_t^{x,1}$ den von $\{x_s, s \leq t\}$ und der konstanten Zufallsvariablen $1(\omega) \equiv 1 \ \ \forall \omega \in \Omega$ aufgespannten Unterraum von $\mathscr{H}$. Ferner ist $P_t^{x,1}$ der Projektionsoperator von $\mathscr{H}$ auf diesen abgeschlossenen Unterraum $\mathscr{H}_t^{x,1}$.

1.2 Der Kalman-Filter

Das Filtrationsproblem ist im groben folgendes:

> Gegeben sind Beobachtungen $\{y_s, s \leq t\}$. Welches ist nun die beste lineare Minimum-Quadrat-Schätzung $\widehat{x}_t$ für den Zustand x_t des Systems zum Zeitpunkt t, basierend auf diesen Beobachtungen?

Wir wollen dieses Problem mathematisch exakt formulieren.

Sei $\{x_t, t \geq 0\}$ ein n-dimensionaler Prozess, der den Zustand eines Systems beschreibt. Der Prozess $\{x_t, t \geq 0\}$ ist definiert als Lösung der folgenden linearen stochastischen Differentialgleichung:

$$\text{Systemgleichung} \qquad \begin{aligned} dx_t &= A(t)x_t\,dt + C(t)\,dv_t \\ x_0 &= x. \end{aligned} \tag{1}$$

Sei $\{y_t, t \geq 0\}$ der beobachtete m-dimensionale Prozess, der folgender Gleichung genügt:

$$\text{Beobachtungsgleichung} \qquad \begin{aligned} dy_t &= H(t)x_t\,dt + G(t)\,dw_t \\ y_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Prozesse $\{x_t, t \geq 0\}$ und $\{y_t, t \geq 0\}$, welche durch (1) bzw. (2) definiert sind, bilden ein sogenanntes *dynamisches System.*

1.2.1 Annahmen

Wir treffen folgende Annahmen:

(a) $\{v_t, t \geq 0\}$ und $\{w_t, t \geq 0\}$ sind l-dimensionale bzw. r-dimensionale Prozesse mit orthogonalen Zuwächsen und Erwartungswert 0.

(b) $\mathscr{H}^v \perp \mathscr{H}^w$.

(c) Für die Kovarianzfunktionen von $\{v_t, t \geq 0\}$ und $\{w_t, t \geq 0\}$ gilt:

(i) $\operatorname{cov}[v_t, v_s] = \mathbb{E}[v_t v_s'] = \int_0^{t \wedge s} S(u)S'(u)\,du$ mit einer Diagonalmatrix $S(u)$ mit stückweise stetigen Komponenten.

$$S(u) = \begin{pmatrix} S_1(u) & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & S_l(u) \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad S_i^2(u) > 0 \ \forall u.$$

Also $\operatorname{cov}[v_t^i, v_s^j] = \mathbb{E}[v_t^i v_s^j] = \delta_{ij} \int_0^{t \wedge s} S_i(u)S_j(u)\,du.$

(ii) $\operatorname{cov}[w_t, w_s] = \mathbb{E}[w_t w_s'] = \int_0^{t \wedge s} T(u)T'(u)\,du$ mit einer Diagonalmatrix $T(u)$ mit stückweise stetigen Komponenten.

$$T(u) = \begin{pmatrix} T_1(u) & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & T_r(u) \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad T_i^2(u) > 0 \ \forall u.$$

Also $\operatorname{cov}[w_t^i, w_s^j] = \mathbb{E}[w_t^i w_s^j] = \delta_{ij} \int_0^{t \wedge s} T_i(u)T_j(u)\,du.$

(d) Die Anfangszufallsvariable x_0 ist orthogonal zu $\mathscr{H}^v$ und $\mathscr{H}^w$.

(e) Die Koeffizientenmatrizen $A(t)$, $C(t)$, $H(t)$ und $G(t)$ sind bekannt und haben stückweise stetige Komponenten.
Ihre Dimensionen sind: $A : n \times n$, $C : n \times l$, $H : m \times n$, $G : m \times r$.

(f) Die $m \times m$-Matrix $G(t)T(t)T'(t)G'(t)$ ist positiv definit für alle t.

Typische Beispiele, bei welchen die Annahmen (a) und (c) zutreffen, sind die Brownsche Bewegung oder ein zentrierter Poisson-Prozess.

Das Ziel ist, die beste lineare Minimum-Quadrat-Schätzung $\widehat{x}_t$ des Zustandes x_t, gegeben $\{y_s, s \leq t\}$, zu berechnen. Nach Satz 1.1.1 bedeutet das, wir suchen

$$\widehat{x}_t = P_t^{y,1} x_t \,. \tag{3}$$

Unter den Annahmen 1.2.1 liefert uns das Theorem von *Kalman* den Schätzer $\widehat{x}_t$ als Lösung der *Filtergleichung*, einer linearen stochastischen Differentialgleichung:

1.2.2 Theorem

$\widehat{x}_t$ erfüllt die lineare stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d\widehat{x}_t &= (A - PH'(GTT'G')^{-1}H)\widehat{x}_t\,dt + PH'(GTT'G')^{-1}dy_t \\ \widehat{x}_0 &= \mathbb{E}x_0 = m_0, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei die Fehlerkovarianzmatrix $P(t) = \mathbb{E}[(x_t - \widehat{x}_t)(x_t - \widehat{x}_t)']$ die Matrix-Riccati-Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= CSS'C' - PH(GTT'G')^{-1}H'P + AP + PA' \\ P(0) &= \operatorname{cov}[x, x] =: P_0 \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Eine wichtige Eigenschaft des Schätzers $\widehat{x}_t$ ist seine Erwartungstreue:

$$\mathbb{E}\widehat{x}_t = \mathbb{E}x_t \qquad \forall t \geq 0.$$

2 Kredibilitätstheorie

2.1 *Allgemeines Kredibilitätsmodell*

Wir formulieren ein allgemeines Kredibilitätsmodell mit *stetigem* Zeitparameter. Dieses enthält alle im folgenden betrachteten Modelle als Spezialfälle. Ein ähnliches Vorgehen findet man bei [7], wo aber ein zeitdiskretes Modell zugrunde gelegt wird. Dort geht man aus von einem stochastischen Prozess $\{z_t, t \in \mathbb{N}\}$. Die Realisation von z_t wird als Beobachtung im Zeitpunkt t interpretiert. Man betrachtet den bedingten Erwartungswert $m_t(\theta) := \mathbb{E}[z_t|\theta]$ und definiert $\eta_t := z_t - m_t(\theta)$. Es wird gezeigt, dass dieser Prozess $\{\eta_t, t \in \mathbb{N}\}$ ein weisser Rauschprozess ist, das heisst, es gilt:

(a) $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$ für alle $t \in \mathbb{N}$,
(b) $\mathbb{E}[\eta_t \eta_s'] = \delta_{ts} \operatorname{cov}[\eta_t, \eta_t]$ für alle $t, s \in \mathbb{N}$.

Beim Übergang von diskretem Zeitparameter $t \in \mathbb{N}$ zu stetigem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}^+$ ergeben sich hier Probleme: ein Prozess $\{\eta_t, t \geq 0\}$ mit den Eigenschaften (a) und (b) lässt sich nämlich nur als verallgemeinerter stochastischer Prozess darstellen. Somit kann auch $z_t = \eta_t + m_t(\theta)$ nicht als reellwertiger stochastischer Prozess im üblichen Sinne betrachtet werden.
Um diese Schwierigkeit zu umgehen, schlagen wir im folgenden einen anderen Weg ein.

2.1.1 *Modellannahmen*

(a) $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ist ein fester Wahrscheinlichkeitsraum.
(b) θ ist eine auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definierte Zufallsvariable.
(c) $\{m_t(\theta), t \geq 0\}$ ist ein m-dimensionaler stochastischer Prozess in $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.
(d) $\{w_t, t \geq 0\}$ ist ein m-dimensionaler stochastischer Prozess in $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (i) $\mathbb{E}[w_t] = 0 \qquad \forall t \geq 0.$
   (ii) $\{w_t, t \geq 0\}$ hat orthogonale Zuwächse: für disjunkte Intervalle (s, t) und (s', t') gilt: $\mathbb{E}[(w_t - w_s)(w_{t'} - w_{s'})'] = 0.$
   (iii) $\operatorname{cov}[w_t, w_s] = \mathbb{E}[w_t w_s'] = \int_0^{t \wedge s} \sigma_r^2 \, dr$ und die Kovarianzmatrix σ_t^2 ist diagonal.
   (iv) $\{w_t, t \geq 0\}$ ist orthogonal zu $m_0(\theta)$: $\mathbb{E}[w_t m_0'(\theta)] = 0 \qquad \forall t \geq 0.$

(e) Es gibt eine Familie von p-dimensionalen Zufallsvariablen $\{b_t(\theta), t \geq 0\}$ in $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$, welche messbar sind bezüglich der von θ in $\mathscr{F}$ erzeugten

σ-Algebra $\mathfrak{A}$, und eine Familie von Matrizen $\{H(t), t \geq 0\} \subseteq M(m \times p, \mathbb{R})$ mit Rang$H(t) = p \leq m$ für alle t, so dass:

$$m_t(\theta) = H(t) b_t(\theta).$$

Diese Beziehung wird *Regressionsvoraussetzung der Ordnung* p genannt.

Die Bedingung (e) stellt keine Einschränkung dar: wird nämlich vom betrachteten Modell her nichts vorgegeben, so setze man $H(t) = I_m$ und $b_t(\theta) = m_t(\theta)$.

2.1.2 Bezeichnungen

In den folgenden Kapiteln werden wir die nachstehenden Bezeichnungen verwenden.

$$\begin{aligned} \lambda(t,s) &:= \operatorname{cov}[m_t(\theta), m_s(\theta)] && \text{mit Werten in } M(m, \mathbb{R}) \\ \mu_t &:= \mathbb{E}[m_t(\theta)] && \text{mit Werten in } \mathbb{R}^m \\ \beta_t &:= \mathbb{E}[b_t(\theta)] && \text{mit Werten in } \mathbb{R}^p \\ \Psi(t,s) &:= \operatorname{cov}[b_t(\theta), b_s(\theta)] && \text{mit Werten in } M(p, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

2.2 Kredibilitätsschätzung mit dem Kalman-Filter

Definiere:

$$y_t := y_t(\theta) := \int_0^t m_s(\theta)\, ds + w_t\,,$$

kurz:

$$dy_t := dy_t(\theta) := m_t(\theta)\, dt + dw_t\,. \tag{6}$$

Wenn wir die Ableitung dw_t/dt im Sinne der Distributionen auffassen und den verallgemeinerten stochastischen Prozess $z_t := dy_t/dt = m_t(\theta) + dw_t/dt$ betrachten, so haben wir eine formale Übereinstimmung mit dem diskreten Kredibilitätsmodell bei [7].

Mit der Definition (6) genügt der Prozess $\{y_t, t \geq 0\}$ den folgenden Beobachtungsgleichungen:

$$dy_t = m_t(\theta)\,dt + dw_t, \quad y_0 = 0, \tag{7}$$

bzw.

$$dy_t = H(t)b_t(\theta)\,dt + dw_t, \quad y_0 = 0. \tag{8}$$

Wir nehmen nun an, dass der Prozess $\{m_t(\theta), t \geq 0\}$ bzw. $\{b_t(\theta), t \geq 0\}$ die nachstehenden Systemgleichungen erfüllt:

$$dm_t(\theta) = A(t)m_t(\theta)\,dt + C(t)\,dv_t \tag{9}$$

bzw.

$$db_t(\theta) = \widetilde{A}(t)b_t(\theta)\,dt + \widetilde{C}(t)\,d\widetilde{v}_t\,. \tag{10}$$

Dabei treffen wir ausser den Modellannahmen (a) – (e) von 2.1.1 noch folgende Annahmen, die für die Anwendung des Kalman-Filters benötigt werden:

(f) $\{v_t, t \geq 0\}$ bzw. $\{\widetilde{v}_t, t \geq 0\}$ ist ein m-dimensionaler bzw. p-dimensionaler Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und Erwartungswert 0.

(g) $\mathscr{H}^{v} \perp \mathscr{H}^{w}$ bzw. $\mathscr{H}^{\widetilde{v}} \perp \mathscr{H}^{\widetilde{w}}$.

(h) Die Kovarianzmatrix

$$\operatorname{cov}[v_s, v_t] = \int_0^{t \wedge s} S(u)S'(u)\,du \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{cov}[\widetilde{v}_s, \widetilde{v}_t] = \int_0^{t \wedge s} \widetilde{S}(u)\widetilde{S}'(u)\,du$$

ist diagonal und $S(u)$ bzw. $\widetilde{S}(u)$ hat stückweise stetige Komponenten.

(i) $m_0 \perp \mathscr{H}^{v}$ bzw. $b_0 \perp \mathscr{H}^{\widetilde{v}}$.

Die restlichen Voraussetzungen des Theorems von *Kalman* sind nach Modellannahme (d) erfüllt, falls wir noch fordern:

(j) σ_t^2 ist positiv definit für alle t.

(k) Die Matrizen $A(\cdot)$, $C(\cdot)$, $\widetilde{A}(\cdot)$, $\widetilde{C}(\cdot)$ und $H(\cdot)$ haben stückweise stetige Komponenten.

Die Forderung (j) ist sicher gerechtfertigt, denn $\int_0^{t \wedge s} \sigma_r^2\,dr = \operatorname{cov}[w_t, w_s]$ ist als Kovarianzmatrix von w_t ohnehin schon positiv semidefinit.

Bei diesem dynamischen System, bestehend aus den Gleichungen (7) und (9) bzw. (8) und (10) setzen wir folgende Grössen, die *Strukturparameter*, als bekannt voraus:

$$\begin{array}{rlllll} & & \sigma_t^2, & & & \\ & & H(t), & & & \\ A(t) & \text{und} & C(t) & \text{bzw.} & \widetilde{A}(t) & \text{und } \widetilde{C}(t), \\ \mu_0 & \text{und} & \lambda(0,0) & \text{bzw.} & \beta_0 & \text{und } \Psi(0,0), \\ & & S(u) & \text{bzw.} & \widetilde{S}(u). & \end{array}$$

Das Theorem von *Kalman* liefert uns nun den besten linearen Kredibilitätsschätzer $\widehat{m}_t(\theta)$ bzw. $\widehat{b}_t(\theta)$ als eindeutige Lösung der linearen stochastischen Differentialgleichung (11) bzw. (13). Damit die Gleichungen übersichtlicher werden, lassen wir die Argumente bei den Matrizen weg.

$$\begin{aligned} d\widehat{m}_t(\theta) &= \left(A - P(\sigma_t^2)^{-1}\right)\widehat{m}_t(\theta)\,dt + P(\sigma_t^2)^{-1}\,dy_t \\ \widehat{m}_0(\theta) &= \mathbb{E}[m_0(\theta)] = \mu_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei ist $P(t) = \mathbb{E}[(m_t(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))(m_t(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))']$ Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= CSS'C' - P(\sigma_t^2)^{-1}P + AP + PA' \\ P(0) &= \operatorname{cov}[m_0(\theta), m_0(\theta)] = \lambda(0,0). \end{aligned} \tag{12}$$

bzw.

$$\begin{aligned} d\widehat{b}_t(\theta) &= \left(\widetilde{A} - \widetilde{P}H'(\sigma_t^2)^{-1}H\right)\widehat{b}_t(\theta)\,dt + \widetilde{P}H'(\sigma_t^2)^{-1}\,dy_t \\ \widehat{b}_0(\theta) &= \mathbb{E}[b_0(\theta)] = \beta_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Dabei ist $\widetilde{P} = \mathbb{E}[(b_t(\theta) - \widehat{b}_t(\theta))(b_t(\theta) - \widehat{b}_t(\theta))']$ Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{P}}(t) &= \widetilde{C}\widetilde{S}\widetilde{S}'\widetilde{C}' - \widetilde{P}H'(\sigma_t^2)^{-1}H\widetilde{P} + \widetilde{A}\widetilde{P} + \widetilde{P}\widetilde{A}' \\ P(0) &= \operatorname{cov}[b_0(\theta), b_0(\theta)] = \Psi(0,0). \end{aligned} \tag{14}$$

In Spezialfällen, insbesondere für $m = p = 1$ und konstante Koeffizienten, lassen sich diese linearen stochastischen Differentialgleichungen einfach lösen. Im allgemeinen erhält man die Lösungen mit numerischen Methoden.

Bei den folgenden Modellen werden wir meist die Filtergleichung für $\widehat{m}_t(\theta)$ lösen. Lässt sich jedoch $m_t(\theta)$ in der Form

$$m_t(\theta) = H(t)b_t(\theta) = H(t)b(\theta)$$

mit zeitunabhängigem $b_t(\theta) = b(\theta)$ schreiben, so erfüllt $b_t(\theta)$ die triviale Systemgleichung

$$db_t(\theta) = 0.$$

In diesem Fall berechnen wir $\widehat{b}_t(\theta)$ aus der Filtergleichung (13), die hier eine einfachere Gestalt hat als (11). Auch die Matrix-Riccati-Gleichung (14) für $\widetilde{P}(t)$ ist einfacher zu lösen als diejenige für $P(t)$. Wir erhalten dann den gesuchten linearen Kredibilitätsschätzer $\widehat{m}_t(\theta)$ und die Fehlerkovarianz $P(t)$ aus den Beziehungen:

$$\widehat{m}_t(\theta) = H(t)\widehat{b}_t(\theta) \tag{15}$$

$$P(t) = H(t)\widetilde{P}(t)H'(t). \tag{16}$$

Unter gewissen zusätzlichen Annahmen (siehe [6]), die beispielsweise im eindimensionalen Fall stets erfüllt sind, lässt sich der lineare Kredibilitätsschätzer in der Form

$$\widehat{m}_t(\theta) = (I_m - K_t)\mu_t + K_t \int_0^t \Gamma(t,s)\, dy_s \tag{17}$$

darstellen. Dabei ist K_t eine reguläre $m \times m$-Matrix mit Eigenwerten im Intervall (0,1) und I_m die $m \times m$-Einheitsmatrix. Die Matrix K_t wird auch *Kredibilitätsmatrix* genannt; die $m \times m$-Matrix $\Gamma(t,s)$ hat die Bedeutung einer *Gewichtsmatrix*.

2.3 Vier bekannte Kredibilitätsmodelle

Die wohl bekanntesten Kredibilitätsmodelle sind das *Bühlmann*-Modell (1967), [1], das *Bühlmann/Straub*-Modell (1970), [2], und das lineare Regressionsmodell von *Hachemeister* (1975), [3]. Bei allen Modellen werden m Risiken während n Perioden betrachtet. Die Zufallsvariable z_s^j bedeutet dabei die Schadenhöhe des Risikos j in der Periode s. Die unbekannten Risikoparameter für die Risiken $1, \ldots, m$ werden durch die zeitunabhängige Zufallsvariable $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ beschrieben.
Wir übertragen nun diese Modelle auf den stetigen Fall: der Zeitparameter soll nicht nur natürliche Zahlen $s \in \mathbb{N}$ sondern beliebige nichtnegative reelle Werte $s \in \mathbb{R}^+$ annehmen. Mit dieser Verallgemeinerung stellen die drei Modelle Spezialfälle unseres allgemeinen Kredibilitätsmodells dar, und wir können die Resultate des Kalman-Filters für die Kredibilitätsschätzung anwenden.

2.3.1 Das Bühlmann-Modell

Neben den Voraussetzungen (a) – (k) des allgemeinen Modells wird zusätzlich angenommen:

$$\begin{aligned} m_t(\theta) &=: m(\theta) \quad \text{unabhängig von } t, \\ \sigma_t^2 &=: \sigma^2 \cdot I_m . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mathbb{E}[m_t(\theta)] =: \mu \quad \text{unabhängig von } t, \\ \lambda(r,s) &= \operatorname{cov}[m_r(\theta), m_s(\theta)] =: \lambda . \end{aligned}$$

Da $m_t(\theta) = m(\theta)$ unabhängig von t ist, haben wir folgende System- und Beobachtungsgleichungen:

$$d m_t(\theta) = 0 \tag{18}$$

$$d y_t = m(\theta)\, dt + d w_t . \tag{19}$$

Für den linearen Kredibilitätsschätzer erhalten wir die lineare stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} d\widehat{m}_t(\theta) &= -P(t)(\sigma^2 I_m)^{-1} \widehat{m}_t(\theta)\, dt + P(t)(\sigma^2 I_m)^{-1}\, d y_t \\ \widehat{m}_0(\theta) &= \mu, \end{aligned} \tag{20}$$

und für $P(t) = \mathbb{E}[(m(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))(m(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))']$ die Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)(\sigma^2 I_m)^{-1} P(t) \\ P(0) &= \lambda. \end{aligned} \tag{21}$$

Betrachten wir den Spezialfall $m = 1$, so erhält man als Lösung:

$$P(t) = \frac{\lambda \sigma^2}{\lambda t + \sigma^2} \tag{22}$$

$$\widehat{m}_t(\theta) = \underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{\lambda t + \sigma^2} \right)}_{1-K_t} \mu + \underbrace{\left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \sigma^2} \right)}_{=:K_t} \underbrace{\frac{y_t}{t}}_{=:\overline{Y}_t} . \tag{23}$$

Das Resultat entspricht genau der Formel, die man im diskreten Fall mit Normalgleichungen erhält (siehe [7], S. 40).

2.3.2 *Das Bühlmann/Straub-Modell*

Im Unterschied zum vorangehenden Modell wird in diesem Modell die Zeithomogenität abgeschwächt und die Risiken werden gewichtet.
Zu den Voraussetzungen (a) – (k) des allgemeinen Modells kommen nun folgende Annahmen hinzu:

$$
\begin{aligned}
m_t(\theta) &=: m(\theta) \quad \text{unabhängig von } t, \\
\sigma_t^2 &=: \sigma^2 \cdot Q_t^{-1} \quad \text{für eine Gewichtsmatrix} \\
Q_t := Q(t) &:= \begin{pmatrix} Q_1(t) & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & Q_m(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{mit } Q_i(t) > 0 \\ \text{und } Q_i(r) \in L_1[0,t] \text{ für alle } t. \end{array}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Daraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mu_t &= \mathbb{E}[m_t(\theta)] =: \mu \quad \text{unabhängig von } t, \\
\lambda(r,s) &= \operatorname{cov}[m_r(\theta), m_s(\theta)] =: \lambda.
\end{aligned}
$$

Auch bei diesem Modell ist $m_t(\theta) = m(\theta)$ zeitunabhängig, so dass wiederum die Systemgleichung (18) und Beobachtungsgleichung (19) vorliegen.
Die Filtergleichung für den Kredibilitätsschätzer lautet nun:

$$
\begin{aligned}
d\widehat{m}_t(\theta) &= -P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}\widehat{m}_t(\theta)\,dt + P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}\,dy_t \\
\widehat{m}_0(\theta) &= \mu,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

und für $P(t) = \mathbb{E}[(m(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))(m(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))']$ gilt die Matrix-Riccati-Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= -P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1} P(t) \\
P(0) &= \lambda.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Betrachten wir wiederum nur ein Risiko, also $m = 1$, so ergibt dies die Lösungen:

$$
P(t) = \frac{\lambda\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda \int_0^t Q_r\,dr}
\tag{27}
$$

$$
\widehat{m}_t(\theta) = \underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda \int_0^t Q_r\,dr}\right)}_{1-K_t}\mu + \underbrace{\left(\frac{\lambda \int_0^t Q_r\,dr}{\sigma^2 + \lambda \int_0^t Q_r\,dr}\right)}_{=:K_t} \cdot \underbrace{\frac{\int_0^t Q_r\,dy_r}{\int_0^t Q_r\,dr}}_{=:\overline{Y}_t}.
\tag{28}
$$

Vergleichen wir unser Resultat mit demjenigen bei diskreter Betrachtungsweise, so erkennt man sofort, dass unser Ergebnis für das stetige Modell exakt jenen Formeln entspricht, die mit Normalgleichungen ermittelt wurden (siehe [7], S. 40).

2.3.3 Das lineare Regressionsmodell von Hachemeister

Dieses Modell verallgemeinert das *Bühlmann/Straub*-Modell, indem es die zeitliche Stationarität von $m_t(\theta)$ abschwächt.
Folgende Annahmen werden zusätzlich neben (a) – (k) getroffen:

$$\begin{aligned} b_t(\theta) &= b(\theta) \quad \text{unabhängig von } t, \\ \sigma_t^2 & \quad \text{wie in (24).} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \beta_t &= \mathbb{E}[b_t(\theta)] =: \beta \quad \text{unabhängig von } t, \\ \Psi(r,s) &= \operatorname{cov}[b_r(\theta), b_s(\theta)] =: \Psi. \end{aligned}$$

Wir wenden nun das Theorem von *Kalman* auf folgendes dynamische System an:

$$d b_t(\theta) = 0 \tag{29}$$

$$d y_t = H(t) b(\theta)\, dt + d w_t. \tag{30}$$

Die Filtergleichung für die Schätzung $\widehat{b}_t(\theta)$ ist demnach:

$$\begin{aligned} d\widehat{b}_t(\theta) &= -\widetilde{P} H'(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1} H \widehat{b}_t(\theta)\, dt + \widetilde{P} H'(\sigma^2 Q_1^{-1})^{-1}\, d y_t \\ \widehat{b}_0(\theta) &= \beta\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Für die Fehlerkovarianz $\widetilde{P}(t) = \mathbb{E}[(b(\theta) - \widehat{b}_t(\theta))(b(\theta) - \widehat{b}_t(\theta))']$ haben wir die Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{P}} &= -\widetilde{P} H'(\sigma^2 Q_1^{-1})^{-1} H \widetilde{P} \\ \widetilde{P}(0) &= \Psi. \end{aligned} \tag{32}$$

Der gesuchte lineare Kredibilitätsschätzer $\widehat{m}_t(\theta)$ und seine Fehlerkovarianz $P(t)$ lassen sich aus den Grössen $\widehat{b}_t(\theta)$ und $\widetilde{P}(t)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \widehat{m}_t(\theta) &= H(t) \widehat{b}_t(\theta) \\ P(t) &= H(t) \widetilde{P}(t) H'(t)\,. \end{aligned}$$

Die Filter- und Riccati-Gleichung sind für den Spezialfall $m = p = 1$ leicht lösbar. Man erhält:

$$\widetilde{P}(t) = \frac{\sigma^2\Psi}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t H^2(r)Q_r\,dr} \tag{33}$$

$$\widehat{b}_t(\theta) = \underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t H^2(r)Q_r\,dr}\right)}_{1-K_t}\beta + \underbrace{\left(\frac{\Psi \int_0^t H^2(r)Q_r\,dr}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t H^2(r)Q_r\,dr}\right)}_{=:K_t} \cdot \underbrace{\frac{\int_0^t H(r)Q_r\,dy_r}{\int_0^t H^2(r)Q_r\,dr}}_{=:\overline{Y}_t}. \tag{34}$$

Auch hier führt unsere Berechnung im stetigen Fall mit der Methode des Kalman-Filters auf das dem diskreten Modell entsprechende Resultat, das wieder mit der Methode der Normalgleichungen berechnet wurde (siehe [8], S. 209).

2.3.4 Ein Spezialfall des exponentiellen Regressionsmodells

Bei diesem Modell wird ein exponentielles (ungestörtes) Wachstum von $m_t(\theta)$ angenommen. Das hier beschriebene Modell ist ein Spezialfall des exponentiellen Regressionsmodells von de Vylder in der stetigen Version (siehe [4], S. 61).
Zusätzlich zu den Annahmen (a) – (k) des allgemeinen Kredibilitätsmodells soll hier noch gelten:

$$dm_t(\theta) = A(t)m_t(\theta)\,dt \quad \text{mit einer } m \times m\text{-matrixwertigen Funktion } A(\cdot),$$
$$\sigma_t^2 \quad \text{wie in (24).}$$

Um eine explizite Formel zu erhalten, betrachten wir wieder den Spezialfall $m = 1$. In diesem Fall gilt:

$$m_t(\theta) = \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)m_0(\theta). \tag{35}$$

Wir werden nun den Kalman-Filter nicht auf das System

$$dm_t(\theta) = A(t)m_t(\theta)\,dt$$
$$dy_t = m_t(\theta)\,dt + dw_t$$

anwenden, sondern betrachten $b(\theta) := m_0(\theta)$ und die Gleichungen

$$db_t(\theta) = 0 \tag{36}$$

$$dy_t = \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) b(\theta)\,dt + dw_t. \tag{37}$$

Damit haben wir gerade die Voraussetzungen des Regressionsmodells von Hachemeister mit

$$H(t) := \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right).$$

Wir können also die Resultate und Bezeichnungen aus dem vorangehenden Modell unverändert übernehmen. Zur Vereinfachung setzen wir noch $A(t) = A \neq 0$ für alle t.
Mit den Bezeichnungen von 2.3.3 erhalten wir dann:

$$\widetilde{P}(t) = \frac{\sigma^2 \Psi}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t e^{2Ar} Q_r\,dr}$$

$$P(t) = e^{At} \widetilde{P}(t) e^{At} = \frac{\sigma^2 \Psi e^{2At}}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t e^{2Ar} Q_r\,dr} \tag{38}$$

$$\widehat{b}_t(\theta) = \underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t e^{2Ar} Q_r\,dr}\right)}_{1-K_t} \beta + \underbrace{\left(\frac{\Psi \int_0^t e^{2Ar} Q_r\,dr}{\sigma^2 + \Psi \int_0^t e^{2Ar} Q_r\,dr}\right)}_{=:K_t} \cdot \underbrace{\frac{\int_0^t e^{Ar} Q_r\,dy_r}{\int_0^t e^{2Ar} Q_r\,dr}}_{=:\overline{Y}_t} \tag{39}$$

$$\widehat{m}_t(\theta) = e^{At}\, \widehat{b}_t(\theta). \tag{40}$$

Das exponentielle Regressionsmodell von *de Vylder* betrachtet (im Fall $m = 1$) anstelle unserer Annahme (35) die Voraussetzung:

$$m_t(\theta) = f_t(b(\theta)) \quad \text{mit} \quad b(\theta) = (b^1(\theta), b^2(\theta)) \quad \text{und} \quad f_t((a,b)) := ab^t.$$

Unser Modell stellt also den Spezialfall

$$b(\theta) = (m_0(\theta), e^A)$$

dar.

Wie beim *Hachemeister*-Modell entspricht auch hier unser Resultat genau dem Ergebnis im diskreten Fall.

2.4 Zwei weitere Kredibilitätsmodelle

2.4.1 Neues Modell

Wie das *Hachemeister*-Modell lässt auch dieses Modell die Voraussetzung, dass $m_t(\theta)$ zeitlich konstant ist, fallen und verallgemeinert diesbezüglich das *Bühlmann/Straub*-Modell.
Zu den allgemeinen Voraussetzungen (a) – (k) nehmen wir hinzu:

$$\begin{aligned} m_t(\theta) &= m_0(\theta) + v_t, \text{ wobei } \operatorname{cov}[m_0(\theta), m_0(\theta)] = 0, \\ &\qquad \{v_t, t \geq 0\} \text{ ein Prozess mit den Eigenschaften (f) – (i) in 2.2,} \\ &\qquad \operatorname{cov}[v_t, v_s] = S^2 \cdot t \wedge s, \\ \sigma_t^2 & \text{ wie in (24).} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mu_t = \mathbb{E}[m_t(\theta)] = \mathbb{E}[m_0(\theta)] =: \mu \quad \text{unabhängig von } t.$$

Die System- und Beobachtungsgleichungen lauten in diesem Modell:

$$d m_t(\theta) = d v_t \tag{41}$$

$$d y_t = m_t(\theta)\, dt + d w_t\,. \tag{42}$$

Wir finden daraus die Filtergleichung für $\widehat{m}_t(\theta)$:

$$\begin{aligned} d\widehat{m}_t(\theta) &= -P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}\widehat{m}_t(\theta)\, dt + P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}\, d y_t \\ \widehat{m}_0(\theta) &= \mu. \end{aligned} \tag{43}$$

Hier ist $P(t) = \mathbb{E}[(m_t(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))(m_t(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))']$ Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= S^2 - P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1} P(t) \\ P(0) &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Diese Gleichungen kann man für den Spezialfall $m = n = 1$ und eine konstante Gewichtsfunktion $Q_t = Q$ lösen. Man erhält:

$$P(t) = \frac{e^{2\xi t} - 1}{e^{2\xi t} + 1} = \tanh(\xi t), \quad \text{mit } \xi := S\sqrt{\frac{Q}{\sigma^2}} > 0 \tag{45}$$

$$\widehat{m}_t(\theta) = \underbrace{\left(\frac{1}{\cosh(\xi t)}\right)}_{1-K_t} \mu + \underbrace{\left(\frac{\cos(\xi t) - 1}{\cosh(\xi t)}\right)}_{=:K_t} \cdot \underbrace{\frac{\int_0^t \sinh(\xi s)\, d y_s}{\int_0^t \sinh(\xi s)\, ds}}_{=:\overline{Y}_t}. \tag{46}$$

2.4.2 Allgemeines Modell

Wir verallgemeinern das vorangehende Modell, indem wir ein zeitliches Wachstum von $m_t(\theta)$ einbeziehen:
Ausser den allgemeinen Voraussetzungen (a) – (k) soll hier gelten:

$$\begin{aligned} dm_t(\theta) &= Am_t(\theta)dt + C\,dv_t, \text{ wobei } A, C \neq 0 \text{ konstante Matrizen,} \\ &\quad \{v_t, t \geq 0\} \text{ ein Prozess mit den Eigenschaften (f) – (i) in 2.2,} \\ &\quad \operatorname{cov}[v_t, v_s] = S^2 \cdot t \wedge s, \\ \sigma_t^2 &\text{ wie in (24),} \\ \lambda(0,0) &= \operatorname{cov}[m_0(\theta), m_0(\theta)] =: \lambda. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mu_t = \mathbb{E}[m_t(\theta)] = \exp(At)\mathbb{E}m_0(\theta) = \exp(At)\mu_0.$$

Wir haben damit folgendes dynamische System:

$$dm_t(\theta) = Am_t(\theta)\,dt + C\,dv_t \tag{47}$$

$$dy_t = m_t(\theta)\,dt + dw_t. \tag{48}$$

Wir stellen die Filtergleichung für dieses Modell auf:

$$\begin{aligned} d\widehat{m}_t(\theta) &= \left(A - P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}\right)\widehat{m}_t(\theta)\,dt + P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}\,dy_t \\ \widehat{m}_0(\theta) &= \mathbb{E}[m_0(\theta)] = \mu_0. \end{aligned} \tag{49}$$

Dabei ist $P(t) = \mathbb{E}[(m_t(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))(m_t(\theta) - \widehat{m}_t(\theta))']$ Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= CS^2C' - P(t)(\sigma^2 Q_t^{-1})^{-1}P(t) + AP(t) + P(t)A' \\ P(0) &= \lambda. \end{aligned} \tag{50}$$

Wir betrachten wieder der Einfachheit halber den Fall $m = n = 1$ und eine zeitunabhängige Gewichtsfunktion $Q_t = Q$. In diesem Spezialfall lauten die Lösungen:

$$P(t) = \frac{\alpha_1 - K\alpha_2 \exp\left(\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\delta^2}t\right)}{1 - K\exp\left(\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\delta^2}t\right)} \tag{51}$$

$$\text{wobei} \begin{cases} \delta^2 & := \frac{\sigma^2}{Q} \\ \alpha_1 & := A\delta^2 - \delta\sqrt{A^2\delta^2 + C^2S^2} \\ \alpha_2 & := A\delta^2 + \delta\sqrt{A^2\delta^2 + C^2S^2} \\ K & := \frac{\lambda - \alpha_1}{\lambda - \alpha_2} \end{cases}$$

Für

$$\left|\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\delta^2}\right| = 2 \underbrace{\frac{\sqrt{A^2\delta^2 + C^2S^2}}{|\delta|}}_{=:\xi} t =: 2\xi t \gg 1 \tag{52}$$

gilt:

$$P(t) \sim \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \delta < 0 \\ \alpha_2 & \delta > 0 \end{Bmatrix} = \alpha := A\delta^2 + |\delta|\sqrt{A^2\delta^2 + C^2S^2} = \delta^2(A + \xi). \tag{53}$$

Beachte, dass stets gilt $A+\xi > 0$, denn $A+\xi = A+\sqrt{A^2 + \frac{C^2S^2}{\delta^2}} > A+|A| > 0$. Unter der Voraussetzung (52), d.h. für $\xi t \gg 1$ erhalten wir dann:

$$\widehat{m}_t(\theta) \sim \underbrace{e^{-(\xi+A)t}}_{1-K_t} \underbrace{e^{At}\mu_0}_{\mu_t} + \underbrace{\left(1 - e^{-(\xi+A)t}\right)}_{=:K_t} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\xi t}\int_0^t e^{\xi s}\, dy_s}{\int_0^t e^{-(\xi+A)s}\, ds}}_{=:\overline{Y}_t}. \tag{54}$$

Karin Hiss
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
4051 Basel

Literatur

[1] *Bühlmann, H.:* Experience rating and credibility. ASTIN Bulletin, Bd. 4, Nr. 3, 1967, 199–207.

[2] *Bühlmann, H./Straub, E.:* Glaubwürdigkeit für Schadensätze. MVSVM, Bd. 70, Heft 1, 1970, 111–133.

[3] *Davis, M.H.A.:* Linear Estimation and Stochastic Control. Chapman and Hall, 1977.

[4] *Goovaerts, M.J./Hoogstad, W.J.:* Credibility Theory. Surveys of Actuarial Studies, 1987.

[5] *Hachemeister, C.A.:* Credibility for regression models with application to trend; Credibility, theory and applications. Proceedings of the Berkeley Actuarial Research Conference on Credibility. Academic Press, New York 1975.

[6] *Hiss, K.:* Lineare Filtration and Kredibilitätstheorie. Diplomarbeit an der Universität Basel, 1990.

[7] *Mangold, K.P.:* Rekursive Schätzverfahren in der Kredibilitätstheorie. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, 1987.

[8] *Norberg, R.:* The credibility approach to experience rating. Scandinavial Actuarial Journal, 1979.

[9] *Øksendal, B.:* Stochastic Differential Equations. Springer, 1989.

Zusammenfassung

Der Artikel ist in zwei Teile gegliedert. Zuerst wird die in Betracht gezogene Klasse von stochastischen Prozessen vorgestellt. Es wird gezeigt, wie die Schätzung von Zufallsvariablen im Hilbertraum $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ als Projektion auf einen geeigneten Unterraum aufgefasst werden kann. Es folgt eine kurze Darstellung der linearen Filtrationstheorie mit dem Hauptresultat, dem Theorem von *Kalman*.
Im zweiten Teil werden die Filtrationsresultate für die Kredibilitätsschätzung in versicherungsmathematischen Modellen verwendet. Nach der Aufstellung eines allgemeinen Kredibilitätsmodells und der Überprüfung der erforderlichen Voraussetzungen werden die klassischen Modelle von *Bühlmann* (1967) und von *Bühlmann/Straub* (1970), das lineare Regressionsmodell von Hachemeister (1975) sowie ein Spezialfall des exponentiellen Regressionsmodells von *de Vylder* (1986) auf den stetigen Fall übertragen und der Kredibilitätsschätzer $\widehat{X}$ mit der Methode des Kalman-Filters berechnet. In allen vier Modellen erhält man ein Resultat der Gestalt $\widehat{X} = (1-K)\mu + K\overline{Y}$, mit dem a priori Erwartungswert μ, einem gewichteten Mittel $\overline{Y}$ der Beobachtungen und einem Faktor K mit Norm zwischen 0 und 1. Die mit dem Kalman-Filter ermittelten Ergebnisse im stetigen Fall entsprechen exakt den Resultaten bei diskreter Betrachtungsweise. Weiter folgen noch zwei neue Kredibilitätsmodelle.

Résumé

L'article comporte deux parties. La première présente la classe des processus aléatoires considérée. On y montre que l'estimation de variables aléatoires de l'espace de *Hilbert* $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ peut être considérée comme une projection sur un sous-espace convenablement choisi. Suit une présentation succincte de la théorie des filtres linéaires comprenant comme résultat principal le théorème de *Kalman*.
En seconde partie l'auteur applique lesdits résultats aux opérations d'estimation par crédibilité dans le cadre de modèles actuariels. L'auteur présente tout d'abord un modèle général de crédibilité satisfaisant aux hypothèses nécessaires. Sur cette base il transpose dans le cas continu plusieurs modèles connus, puis détermine par la méthode du filtre de *Kalman* l'estimateur de crédibilité $\widehat{X}$ desdits modèles, qui sont: les modèles classiques de *Bühlmann* (1967) et *Bühlmann/Straub* (1970), le modèle de régression linéaire de *Hachemeister* (1975), ainsi qu'un cas particulier du modèle de régression exponentiel de *de Vylder* (1986). Dans le cas de ces quatre modèles, l'auteur obtient un résultat de la forme $\widehat{X} = (1-K)\mu + K\overline{Y}$, construit sur l'espérance mathématique a priori μ, une moyenne pondérée $\overline{Y}$ des observations et un facteur K de norm comprise entre les valeurs 0 et 1. Les résultats obtenus par le filtre de Kalman dans le cas continu correspondent exactement aux résultats obtenus dans le cas discret. Enfin l'auteur propose deux nouveaux modèles de crédibilité.

Summary

The paper is divided into two parts. First a class of stochastic processes is presented which is considered in more detail later. It is shown that the estimation of random variables in the *Hilbert* space $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ can be looked upon as a projection onto a suitable subspace. There follows a short presentation of the linear filtration theory and its main result, the theorem of *Kalman*.

In the second part the results from filtration theory are applied to obtain credibility estimators in actuarial models. Following the presentation of a general credibility model, the classical models of *Bühlmann* (1967) and *Bühlmann/Straub* (1970), the linear regression model of *Hachemeister* (1975) and a special case of the exponential regression model of *de Vylder* (1986) are carried over to the continuous case, and the credibility estimator $\widehat{X}$ is calculated by means of the Kalman filter method. In all four models a result of the form $\widehat{X} = (1-K)\mu + K\overline{Y}$ is obtained with the a priori mean μ, a weighted average $\overline{Y}$ of the observations and a factor K of norm between 0 and 1. The results determined in the continuous case by means of the Kalman filter correspond exactly to those obtained by the discrete approach. Finally, two new credibility models are presented.