Eine allgemeine Versicherung auf mehrere Leben und ihre Deckungskapitalien

Autor(en): **Beinhauer, Renate**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (1992)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967251

RENATE BEINHAUER, Regensburg

Eine allgemeine Versicherung auf mehrere Leben und ihre Deckungskapitalien

1 Absterbeprozess und Stopsystem

Ein Versicherungsunternehmen (VU) schliesst mit einem Kollektiv von Versicherungsnehmern (VN) einen Lebensversicherungsvertrag ab, kurz "Vertrag" genannt. Das Kollektiv wird repräsentiert durch die Menge $M = \{1, \ldots, m\}$ der VN. Jeder Vertrag führt eine eigene Zeitskala $\mathbb{R}_+$ (etwa mit Einheit [Jahr]) mit sich, die mit dem Abschluss des Vertrages beginnt. Zu dieser Zeit ($t = 0$) seien die genauen Alter der VN durch die Altersstruktur $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$ angegeben. Ihre Todestermine $T_1, \ldots, T_m$ seien in der Vertragsskala gemessen.

$$X_t = \{i \in M : \ T_i > t\}$$

ist dann die Menge der zur Zeit t noch lebenden VN.
$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist ein absteigendes System von Mengen aus der Potenzmenge PM von M. X ist eine Funktion $X : \ \mathbb{R}_+ \to PM$, wenn die Todestermine $T_1, \ldots, T_m$ bekannt sind.
Wir werden natürlich ein stochastisches Modell benutzen, d.h. die Todestermine sind Zufallsvariable, und X ist ein stochastischer Prozess. Sie leben auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Der Prozess X werde Absterbeprozess genannt.
Wir setzen voraus, dass die restliche Lebenszeit eines VN jeweils nur von seinem Alter abhängt (vgl. *Gerber*). Ausserdem seien die restlichen Lebenszeiten der VN aus M zu jedem Zeitpunkt unabhängige Zufallsvariable. Dann ist der Absterbeprozess X trivialerweise Markoffsch.
Für einen Lebensversicherungsvertrag mit dem Kollektiv M muss der "Tod von M", d.h. der Eintritt des Versicherungsfalles, definiert werden. Für $M = \{1\}$ ist dies klar, ebenso für einen Vertrag auf den r-ten Tod. Dies wird mit der folgenden Definition verallgemeinert.

1.1 Definition

Das nichtleere Mengensystem $\mathfrak{U} \subset PM$ heisst ein *Stopsystem,* wenn:

(a) $M \notin \mathfrak{U}$.

(b) Aus $U \in \mathfrak{U}$ folgt $PU \subset \mathfrak{U}$, d.h. mit einer Menge U liegt auch jede ihrer Untermengen im System $\mathfrak{U}$.

Die Zufallsvariable

$$T = T(\mathfrak{U}) = \min\{t : X_t \in \mathfrak{U}\}$$

heisst *Sterbetermin* des Kollektivs M. Mit dem Sterbetermin tritt der Versicherungsfall ein. $K = [T]$ bezeichne die grösste ganze Zahl in T.
Es bezeichne $\mathcal{W} = PM \setminus \mathfrak{U}$. Ist $X_t \in \mathcal{W}$, so *lebt das Kollektiv zur Zeit t.*

Für das System $\mathfrak{U}$ bedeutet Bedingung (a), dass das Kollektiv bei Vertragsabschluss "lebt", denn $X_0 = M$. Bedingung (b) bedeutet: Ein totes Kollektiv bleibt tot.
Es bezeichne $|V|$ die Mächtigkeit einer endlichen Menge V. Dann ist für die Versicherung auf den r-ten Tod

$$\mathfrak{U} = \{V \subset M : |V| \leq m - r\}$$

das passende Stopsystem. Hierzu $\mathcal{W} = \{V \subset M : |V| > m - r\}$.
Ein Beispiel für ein Stopsystem zu $M = \{1, 2, 3\}$ ist

$$\mathfrak{U} = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \phi\}.$$

Mit dem Sterbetermin T kann man in offensichtlicher Weise alle für *einen* VN üblichen Renten und Versicherungsformen auf das Kollektiv übertragen. Das Stopsystem ist Bestandteil des Versicherungsvertrages, und damit ist T stets wohldefiniert. Wir werden jedoch wesentlich kompliziertere Versicherungsformen betrachten.

1.2 Bezeichnungen

a) Wir werden in dieser Arbeit mit der naiven Definition einer bedingten Wahrscheinlichkeit auskommen, d.h. für ein $B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$ sei

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{für alle} \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Bekanntlich wird hierdurch ein Wahrscheinlichkeitsmass $P(. \mid B)$ definiert, die *Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung B.*

b) Für eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichne $E(Z \mid B)$ den mit dem Mass $P(. \mid B)$ gebildeten Erwartungswert.

c) Ist E eine Eigenschaft, welche eine messbare Untermenge von Ω definiert, so schreiben wir kürzer $\{E\}$ statt $\{y \in \Omega : y \text{ hat die Eigenschaft } E\}$. Z.B. schreibt man $\{X_1 = V\}$ statt $\{y \in \Omega : X_1(y) = V\}$ für ein $V \in PM$. Bei der Bildung von $P(\{E\})$ oder $P(. \mid \{E\})$ wird die geschweifte Klammer wieder weggelassen z.B. $P(X_2 = V \mid X_1 = W)$ für $V, W \in PM$.

1.3 Lemma

Die Sterbetermine $T_1, \ldots, T_m$ der Mitglieder des Kollektivs M seien unabhängige Zufallsvariable mit stetigen Verteilungsfunktionen. $\mathfrak{U}$ sei ein Stopsystem zu M. Dann besitzt auch die Zufallsvariable $T = T(\mathfrak{U})$ eine stetige Verteilungsfunktion.

Beweis. Mit $T_1, \ldots, T_m$ ist auch T eine nichtnegative Zufallsvariable. Man hat also nur zu zeigen, dass $P(T = t) = 0$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Sei also $t \geq 0$ fest gewählt.

$$\{T = t\} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \{T = t,\, X_t = U\}.$$

$$\{T = t,\, X_t = U\} = \bigcup_{i \in M \setminus U} \{T_i = t,\ X_t = U\} \subset \bigcup_{i \in M \setminus U} \{T_i = t\}.$$

Also

$$P(T = t,\ X_t = U) \leq \sum_{i \in M \setminus U} P(T_i = t) = 0.$$

Die Voraussetzung dieses Lemmas sei im Folgenden stets erfüllt.

2 Übergangswahrscheinlichkeiten

2.1 Definition

Von $L(0) = 100\,000$ Neugeborenen überlebt eine zufällige Anzahl $L(z)$ bis zum Alter $z \in \mathbb{R}_+$. Durch $l(z) = E(L(z))$ ist eine monoton abnehmende Funktion $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiert, die *Sterbefunktion.* Die Folge der Werte $l_z = l(z)$ für

$z \in \mathbb{N}_0$ heisst *Sterbetafel.* Sei ω das höchste ganzzahlige Lebensalter, das erreicht werden kann. Dann wird die Folge $l_0, \ldots, l_\omega$ als Sterbetafel angegeben, da $l_z = 0$ für $z > \omega$ gilt. Für die Sterbefunktion gilt $l(z) = 0$ für $z \geq \omega + 1$. Für $t, z \in \mathbb{R}_+$ sei

$$ {}_tp_z = \begin{cases} \dfrac{l(z+t)}{l(z)} & \text{falls} \quad l(z) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} $$

Sei ${}_tq_z = 1 - {}_tp_z$. Für $l(z) > 0$ ist ${}_tp_z$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person des genauen Alters z um die Zeit t überlebt.

2.2 *Bemerkung*

Die Funktion l kann nur empirisch bestimmt werden. Wir denken uns die bekannte Sterbetafel durch ein geeignetes Interpolationsverfahren zu einer glatten (also mindestens stetigen) Funktion l mit $l(\omega + 1) = 0$ ergänzt.

2.3 *Bezeichnung*

Für $j \in \mathbb{R}_+, \quad y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m$ und $C,\ D \in PM$ sei

$$ {}_jp_y(C,\ D) = \begin{cases} \prod\limits_{i \in C \setminus D} {}_jq_{y_i} \prod\limits_{i \in D} {}_jp_{y_i} & \text{falls} \quad C \supset D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} $$

Produkte über eine leere Indexmenge sind gleich 1 zu setzen.
Wir haben hier vorausgesetzt, dass die m Personen des Kollektivs alle gemäss derselben Sterbefunktion, d.h. gemäss derselben Sterbetafel absterben. Es ist aber an dieser Stelle möglich, für jede Person eine eigene Sterbetafel zu benutzen, etwa Frauensterbetafeln für weibliche Personen.

2.4 *Satz*

Sei $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Der Markoffprozess X hat die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$ P\left(X_{t+j} = D \mid X_t = C\right) = {}_jp_{x+te}(C,\ D) \qquad \text{für} \quad C,\ D \in PM. $$

Insbesondere ist $P(X_t = D) = {}_tp_x(M,\ D)$.

Beweis. $x + te = (x_1 + t, \ldots, x_m + t)$ ist die Altersstruktur des Kollektivs M zur Zeit t, wenn zur Zeit 0 die Altersstruktur $x = (x_1, \ldots, x_m)$ vorlag. Wegen $\{X_0 = M\} = \Omega$ gilt $P(X_t = D) = P(X_t = D \mid X_0 = M)$.
Da die Lebenszeiten der VN nach oben beschränkt sind, ist auch die Lebenszeit T des Kollektivs nach oben beschränkt. Sei ω' (in der Vertragsskala) die grösste ganze Zahl, für die das Kollektiv leben kann. ω' hängt von x und $\mathcal{U}$ ab.

2.5 Definition

$\omega' \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\{X_{\omega'} \in \mathcal{W}\} \neq \phi \quad \text{und} \quad \{X_{\omega'+1} \in \mathcal{W}\} = \phi.$$

2.6 Bemerkung

Die Mitglieder des Kollektivs der VN seien so numeriert, dass $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$ gilt. Für $W \in \mathcal{W}$ sei $i(W) = \max W$. Es sei $\lambda = \min\{i(W) : W \in \mathcal{W}\}$. Dann ist $\omega' = \omega - [x_\lambda]$. Für $t = 0, 1, \ldots, \omega'$ gilt $P(T > t) > 0$.

Beweis. Die Person $i(W)$ ist Senior der Menge W, d.h. kein Mitglied von W ist älter als $i(W)$. Die Menge W kann also maximal ebenso lange überleben wie $i(W)$. Am längsten überleben die Mengen mit den jüngsten Senioren, d.h. die Mengen W mit $i(W) = \lambda$. $\omega - [x_\lambda]$ ist die grösste ganzzahlige Überlebenszeit von λ in der Vertragsskala.
Wegen $P(T > 0) \geq P(T > 1) \geq \cdots \geq P(T > \omega')$ ist nur $P(T > \omega') > 0$ zu zeigen. Nach Definition von ω' ist $\{x_{\omega'+1} \in \mathcal{U}\} = \Omega$ und daher $\{T > \omega'\} = \{X_{\omega'} \in \mathcal{W}\} \cap \{X_{\omega'+1} \in \mathcal{U}\} = \{X_{\omega'} \in \mathcal{W}\}$.
Es sei W eine Menge aus $\mathcal{W}$ mit $i(W) = \lambda$. Dann ist

$$P(T > \omega') \geq P(X_{\omega'} = W) = {}_{\omega'}p_x(M, W) > 0.$$

3 Der Versicherungsvertrag

3.1 Definition

(M, x) mit $M = \{1, \ldots, m\}$ und $x = (x_1, \ldots, x_m)$ charakterisiere ein Kollektiv mit Altersstruktur x zur Zeit 0. Es sei $x_1 \leq \cdots \leq x_m$. $\mathcal{U}$ sei ein Stopsystem zu M, und ω' sei zu $\mathcal{U}$ und x gemäss 2.6 bestimmt. Dazu sei $\tau = \{0, 1, \ldots, \omega' + 1\}$, PM

sei die Potenzmenge von M. h und s seien Funktionen $\tau \times PM \to \mathbb{R}_+$. Dann heisst das Tripel $(\mathfrak{U}, s, h)$ ein *Vertrag mit* (M, x).

Die Buchstaben s und h erinnern an "Soll und Haben", betrachtet vom Standpunkt des Versicherungsunternehmens aus. Die Werte von s sind Zahlungen des VU an die VN, die Werte von h bedeuten Zahlungen in umgekehrter Richtung. Wir schreiben die Funktionswerte an der Stelle (t, V) als $s_t(V)$ bzw. $h_t(V)$.

3.2 *Ausführungsbestimmungen des Vertrags*

Es war $K = [T]$. Vor Eintritt des Versicherungsfalles ist also notwendig $X_t \in \mathcal{W}$ für $t = 0, \ldots, K$. Das VU leistet zu den Zeiten $0, \ldots, K$ die Zahlungen $s_0(X_0)$, $s_1(X_1)$, $\ldots$, $s_K(X_K)$ an die VN. Sie heissen *Antiprämien.*

Mit einer geeigneten, aus dem Vertrag zu bestimmenden positiven Konstanten β leisten die VN zu denselben Zeiten die Zahlungen $\beta h_0(X_0), \ldots, \beta h_K(X_K)$ an das VU. Sie heissen *Prämien.* Die Werte $h_0(X_0), \ldots, h_K(X_K)$ heissen *Relativprämien.*

Zur Zeit $K + 1$ ist der Versicherungsfall bereits eingetreten, d.h. es ist notwendig $X_{K+1} \in \mathfrak{U}$. Es werden zur Zeit $K + 1$ die einmaligen Zahlungen $s_{K+1}(X_{K+1})$ bzw. $h_{K+1}(X_{K+1})$ geleistet. $s_{K+1}(X_{K+1})$ heisst *Versicherungssumme.*

Die Antiprämien bzw. die Relativprämien sind durch die Einschränkung der Funktionen s und h auf den Definitionsbereich $\tau \times \mathcal{W}$ gegeben, die einmaligen Zahlungen durch ihre Einschränkung auf den restlichen Definitionsbereich $\tau \times \mathfrak{U}$.

Da Prämienzahlungen vorschüssig und die Auszahlung der Versicherungssumme nachschüssig erfolgen, werden die Werte $s_0(U)$ und $h_0(U)$ für $U \in \mathfrak{U}$ und die Werte $s_{\omega'+1}(W)$, $h_{\omega'+1}(W)$ für $W \in \mathcal{W}$ nie gebraucht und können beliebig angesetzt werden.

Da die Mengen τ und PM endlich sind, können die Funktionen h und s in Form von Matrizen oder Listen angegeben werden. Wir schreiben ein Listenformular für den Fall $M = \{1, 2, 3\}$ an:

t	M	$1,2$	$1,3$	$2,3$	1	2	3	ϕ
0								
1								
$\vdots$								
$\omega' + 1$								

Die mit ¨ markierten Spalten entsprechen dem Stopsystem $\mathcal{U} = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \phi\}$. In ihnen stehen die Einmalzahlungen. Die unmarkierten Spalten enthalten die Antiprämien bzw. Relativprämien. Zwei solche mit "Soll" und "Haben" gekennzeichnete Listen genügen also zur Fixierung des Vertrages $(\mathcal{U}, s, h)$.

3.3 *Beispiel:* Gemischte Lebensversicherung für eine Person

Zur Zeit $\min(n, K + 1)$ wird die Versicherungssumme 1 ausbezahlt, Prämienzahlungen erfolgen zu den Zeiten $0, 1, \ldots, n - 1$, falls $K \geq n - 1$. Es ist $M = \{1\}$ und $\mathcal{U} = \{\phi\}$. Es ist

$$s_t(M) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad s_t(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t < n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$h_t(M) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t < n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad h_t(\phi) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t.$$

3.4 *Beispiel:* Rentenversicherung mit Sterbegeld

$M = \{1, 2\}$ sei ein Ehepaar mit Altern x_1, x_2. 2 sei der Mann. Er zahlt bis zu seiner Pensionierung an seinem 65. Geburtstag jährlich vorschüssig die Prämie β. Danach erhält das Ehepaar eine jährliche Rente der Höhe γ. Nach dem Tod eines Ehepartners hört die Rente auf, es wird aber ein Sterbegeld der Höhe δ bezahlt (dieses kann so hoch bemessen werden, dass es als Bruttoeinmalprämie für eine Witwen- oder Witwerpension ausreicht). $n = 65 - [x_1]$ ist (in der Vertragsskala!) der grösste ganzzahlige Zeitpunkt vor dem 65. Geburtstag des Mannes, zu dieser Zeit wird die Prämie zum letztenmal gezahlt. Das Stopsystem ist $\mathcal{U} = \{\{1\}, \{2\}, \phi\}$. Die Funktionen s und h verschwinden bis auf die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} s_t(M) &= \gamma & &\text{für} \quad t > n. \\ h_t(M) &= 1 & &\text{für} \quad t \leq n. \\ s_t(\{1\}) = s_t(\{2\}) &= \delta & &\text{für} \quad t = 0, \ldots, \omega' + 1 \end{aligned}$$

3.5 *Beispiel:* Die Versicherung auf den r-ten Tod

Da eine gleichbleibende Prämienrate mit dem Tod von Versicherungsnehmern die Überlebenden immer stärker belasten würde, wird die Prämienrate proportional zur Anzahl der lebenden VN angesetzt, d.h. wir setzen $h_t(W) = |W|$ für $W \in \mathcal{W}$ und alle $t \in \tau$.

4 Die Deckungskapitalien

Wir betrachten einen allgemeinen Vertrag $(\mathcal{U},\, s,\, h)$ mit $(M,\, x)$. Ist zum Zeitpunkt $t \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, \omega'\}$ der Versicherungsfall noch nicht eingetreten, so ist dies durch die Ω-Untermenge $\{T(\mathcal{U}) > t\} = \{T > t\} = \{X_t \in \mathcal{W}\}$ zu charakterisieren. Im Fall $t = 0$ ist $\{T > 0\} = \Omega$, weil $X_0 = M \in \mathcal{W}$ stets erfüllt ist. Nach 2.6 gilt stets $P(T > 0) > 0$.
Wir betrachten die zukünftigen Soll- und Habenposten des Vertrags zum Zeitpunkt t. Sie werden mit einem festen *Rückzinsungsfaktor* v auf den Zeitpunkt t diskontiert.

4.1 *Definition*

Sei $t \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, \omega'\}$. Die Zufallsvariablen S_t, H_t seien auf $\{T \leq t\}$ definiert durch $S_t = H_t = 0$. Auf $\{T > t\}$ sei

$$S_t = \sum_{i=0}^{K+1-t} s_{t+i}(X_{t+i})v^i.$$

H_t sei durch die analoge Formel mit h statt s definiert. S_t und H_t heissen *Soll* und *relatives Haben* zur Zeit t. Wir bilden ihre Erwartungswerte unter der Bedingung $\{T > t\}$. Die Differenz

$${}_tV = E(S_t \mid T > t) - \beta E(H_t \mid T > t)$$

heisst *Deckungskapital zur Zeit t*.

Bei allen bekannten Anwendungen gibt es keine einmalige Zahlung der VN an das VU nach Eintritt des Versicherungsfalls, d.h. die Einschränkung von h auf $\tau \times \mathcal{U}$ ist Null. Das Mitführen von $h \mid \tau \times \mathcal{U}$ hat jedoch den Vorteil, dass S_t und H_t und

damit auch ihre Erwartungswerte unter $\{T > t\}$ nach analogen Formeln berechnet werden können.
Für $t = 0$ ist $E(S_0 \mid T > 0) = E(S_0)$ wegen $\{T > 0\} = \Omega$. $E(S_0)$ ist der *Barwert* oder die *Nettoeinmalprämie* des Vertrags. Man wählt $\beta = \beta_0$ so, dass ${}_0V = 0$ gilt, d.h. $0 = E(S_0) - \beta_0 E(H_0)$. Die mit

$$\beta_0 = \frac{E(S_0)}{E(H_0)}$$

gebildeten Prämien $\beta_0 H \ : \ \tau \times \mathcal{W} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}_+$ heissen *Nettoprämien.* Bestimmt man Bruttoprämien nach dem Erwartungswertprinzip mit $\alpha\,\%$ Aufschlag auf die Nettoprämie, so heissen die mit

$$\beta_1 = \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)\beta_0$$

gebildeten Prämien $\beta_1 h : \tau \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *Bruttoprämien.*

4.2 Lemma

Sei $C \in \mathcal{A}$ mit $P(C) > 0$. J sei eine höchstens abzählbare Indexmenge, und C sei disjunkt zerlegt in messbare Mengen:

$$C = \bigcup_{j \in J} A_j$$

Sei $\overline{C} = \Omega \setminus C$, und Z sei eine Zufallsvariable, die für alle $j \in J$ auf A_j konstant gleich z_j ist.

$$Z = \sum_{j \in J} X_{A_j} z_j + X_{\overline{C}} Z_1,$$

wobei Z_1 eine beliebige Zufallsvariable ist. (X_A sei die charakteristische Funktion einer Menge A). Dann gilt für den Erwartungswert von Z bezüglich des Masses $P(. \mid C)$:

$$E(Z \mid C) = \frac{1}{P(C)} \sum_{j \in J} z_j P(A_j).$$

Beweis: Wegen $P(\bar{C} \mid C) = 0$ verschwindet der Beitrag von Z_1.

$$E(Z \mid C) = \sum_{j \in J} z_j P(A_j \mid C) = \sum_{j \in J} z_j \frac{P(A_j \cap C)}{P(C)}.$$

Hieraus folgt die Behauptung, weil $A_j \cap C = A_j$ gilt wegen $A_j \subset C$.

4.3 Bemerkung

Zwei Mengen B, $C \in \mathcal{A}$ heissen P-fast gleich, kurz $B \overset{(P)}{=} C$, wenn $P(B\bar{C} \cup \bar{B}C) = 0$ gilt.

Gilt $P(C) > 0$ und $B \overset{(P)}{=} C$, so sind die Wahrscheinlichkeitsmasse $P(. \mid B)$ und $P(. \mid C)$ identisch.

Beweis: Für alle messbaren A gilt $P(AB) = P(AC)$ wegen $AB = ABC \cup AB\bar{C} \overset{(P)}{=} ABC \cup A\bar{B}C = AC$. Wegen $P(B) = P(C)$ folgt damit die Behauptung.

Wir wollen nun Formeln für $E(S_t \mid T > t)$ und $E(H_t \mid T > t)$ entwickeln. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den wichtigen Spezialfall, dass für alle $n \in \tau$ die Anti- und Relativprämien auf ganz $\mathcal{W}$ konstant sind.

4.4 Spezialfall des Hauptsatzes

Sei $O(U) = \{C \in PM : \quad C \supset U\}$ das System der Obermengen von $U \in \mathfrak{U}$. Für alle $n \in \tau$ seien $s_n(W) = s_n$ und $h_n(W) = h_n$ konstant auf $\mathcal{W}$.
Für $U \in \mathfrak{U}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq \omega'$ sei

$$A_n(U) = \{X_n \in \mathcal{W}, \quad X_{n+1} = U\}$$

und

$$g_{t,j}(s, U) = \sum_{i=0}^{j} s_{t+1} v^i + s_{t+j+1}(U) v^{j+1}.$$

Dann gilt

$$P(A_n(U)) = \sum_{W \in \mathcal{W} \cap O(U)} {}_n p_x(M, W) {}_1 p_{x+ne}(W, U),$$

$$E(S_t \mid T > t) = \frac{1}{P(T > t)} \sum_{j=0}^{\omega' - t} \sum_{U \in \mathfrak{U}} g_{t,j}(s, U) P(A_{t+j}(U)).$$

Für $(H_t \mid T > t)$ gilt die analoge Formel mit h statt s. Es ist

$$P(T > t) = \sum_{j=0}^{\omega'-t} \sum_{U \in \mathfrak{U}} P\left(A_{t+j}(U)\right).$$

Beweis

$$A_n(U) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \{X_n = W, \ X_{n+1} = U\}$$

Ist W nicht Obermenge von U, so ist der rechts stehende Ausdruck die leere Menge. Daher genügt es, die Vereinigung über $W \in 0(U) \cap \mathcal{W}$ zu bilden. Die Vereinigung ist disjunkt, daher

$$P\left(A_n(U)\right) = \sum_{W \in 0(U) \cap \mathcal{W}} P(X_n = W)\, P(X_{n+1} = U \mid X_n = W).$$

Setzt man hier die Ausdrücke aus 2.4 ein, so folgt die behauptete Formel.
$\{T > t\} \overset{(P)}{=} \{T \geq t\} = \bigcup_{j=0}^{\omega'-t} \{K = t + j\}$ wegen Lemma 1.3. Wir zerlegen weiter

$$\begin{aligned} \{K = t + j\} &= \{t + j \leq T < t + j + 1\} \overset{(P)}{=} \{t + j < T < t + j + 1\} \\ &= \{X_{t+j} \in \mathcal{W}, \ X_{t+j+1} \in \mathfrak{U}\} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A_{t+j}(U). \end{aligned}$$

Damit haben wir disjunkt zerlegt

$$\{T > t\} \overset{(P)}{=} \bigcup_{j=0}^{\omega'-t} \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A_{t+j}(U).$$

Hieraus folgt die Formel für $P(T > t)$. $g_{t,j}(s, U)$ ist der Wert von S_t auf $A_{t+j}(U)$. Die Formel für $E(S_t \mid T > t)$ folgt damit aus dem Lemma.
Die Formel für $P(T > t)$ ist natürlich unabhängig von den Antiprämien und Relativprämien und gilt damit allgemein.

4.5 Hauptsatz

Sei $(\mathcal{U}, s, h)$ ein allgemeiner Vertrag mit (M, x). Sei $\mathcal{M}_j = \{(W_0, \ldots, W_j, U) \in \mathcal{W}^{j+1} \times \mathcal{U} \text{ mit } W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_j \supset U\}$. Für $(W_0, \ldots, W_j, U) \in \mathcal{M}_j$ sei definiert:

$$A_{t,j}(W_0, \ldots, W_j, U) = \{X_t = W_0,\ X_{t+1} = W_1, \ldots, X_{t+j} = W_j,\ X_{t+j+1} = U\}.$$

Auf dieser Menge nimmt S_t den folgenden Wert an:

$$g_{t,j}(s, W_0, \ldots, W_j, U) = \sum_{i=0}^{j} s_{t+i}(W_i)v^i + s_{t+j+1}(U)v^{j+1}.$$

Damit gilt

$$E(S_t \mid T > t) = \frac{1}{P(T > t)} \sum_{j=0}^{\omega'-t} \sum_{\mathcal{M}_j} g_{t,j}(s, W_0, \ldots, W_j, U) \times P(A_{t,j}(W_0, \ldots, W_j, U)).$$

Für $E(H_t \mid T > t)$ gilt die analoge Formel mit h statt s. Es ist

$$P(A_{t,j}(W_0, \ldots, W_j, U)) = {}_tp_x(M, W_0)\,{}_1p_{x+te}(W_0, W_1)\,{}_1p_{x+(t+1)e}(W_1, W_2) \ldots {}_1p_{x+(t+j)e}(W_j, U).$$

Die Formel für $P(T > t)$ kann dem Spezialfall des Hauptsatzes entnommen werden.

Beweis: Wir gehen wieder aus von der disjunkten Zerlegung

$$\{T > t\} \overset{(P)}{=} \bigcup_{j=0}^{\omega'-t} \{K = t + j\}.$$

$\{K = t + j\}$ wird diesmal feiner zerlegt. Da $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein absteigendes Mengensystem ist, gilt

$$\{K = t + j\} = \bigcup_{\mathcal{M}_j} \{X_t = W_o,\ X_{t+1} = W_1, \ldots, X_{t+j} = W_j,\ X_{t+j+1} = U\} = \bigcup_{\mathcal{M}_j} A_{t,j}(W_0, \ldots, W_j, U).$$

Auf $A_{t,j}(\ldots)$ ist S_t konstant und nimmt den Wert $g_{t,j}(\ldots)$ an. Das Lemma 4.2 liefert damit die angegebene Formel für $E(S_t \mid T > t)$. Die Formel für $P(A_{t,j}(\ldots))$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} &P(A_{t,j}(W_0, \ldots, W_j, U) \\ &\quad = P(X_t = W_0)P(X_{t+1} = W_1 \mid X_t = W_0) \ldots \\ &\qquad P(X_{t+j+1} = U \mid X_{t+j} = W_j). \end{aligned}$$

Hier sind nur noch die Werte aus Satz 2.4 einzusetzen.

Renate Beinhauer
Ostpreussenstrasse 27
D-8400 Regensburg

Literatur

Gerber, U: Lebensversicherungsmathematik. Springer 1988.

Zusammenfassung

Wir definieren einen allgemeinen Versicherungsvertrag mit einem Kollektiv M von Versicherten. $X_t \subset M$ sei die Menge der zur Zeit t noch lebenden Versicherten. Für $t \in \mathbb{R}_+$ bilden die $X_t's$ einen Markoffprozess X. Der "Tod des Kollektivs" wird definiert als eine Stopzeit dieses Prozesses. Die durch den Vertrag vereinbarten Leistungen und Prämien hängen von ihrer Auszahlungszeit t, aber auch von X_t ab. Durch eine doppelte Buchführung wird das Vertragsmodell übersichtlich und reichhaltig. Wir entwickeln eine Formel für die Deckungskapitalien des Vertrags mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten des Prozesses X.

Résumé

L' auteur considère un contrat vie basé sur un collectif M de têtes assurées. Soit X_t le sous-ensemble de M comprenant les survivants au temps t. Le processus évolutif est un processus de Markov. Le collectif $\ll$décadè $\gg$ à un temps d'arrêt. Le contrat comporte des primes et prestations dépendant de t et de X_t. Une comptabilité à deux entrées rend transparent le mécanisme du contrat. Il est possible d'obtenir une expression pour les provisions mathématiques en fonction des probabilités de transition du processus sous-jacent.

Summary

We consider an insurance contract that is based on a collective M of insured lives. Let X_t be the subset of M consisting of the survivors at time t. The resulting process is a Markov process. The collective "dies" at a stopping time. The contract provides premiums and benefits that depend on t and X_t. Double-entry bookkeeping makes the mechanism of the contract transparent. We derive an expression for the mathematical reserves in terms of the transition probabilities of the underlying process.