

# Recherche de l'état stationnaire d'une population

Autor(en): **Hort, Michel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): - **(1992)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967260>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MICHEL HORT, Lausanne

## Recherche de l'état stationnaire d'une population

Considérons une population au sujet de laquelle nous formulons les trois hypothèses suivantes:

1. Elle ne connaît pas de mouvements migratoires avec l'extérieur. L'évolution de la population est donc une évolution naturelle, fondée sur les naissances et les décès seulement.
2. Elle est soumise à des conditions de natalité et de mortalité qui demeurent invariables dans le temps.
3. La natalité équilibre exactement la mortalité.

Sous de telles hypothèses, la population tend vers un état stationnaire ou conserve cet état si elle s'y trouve déjà au début des observations.

Nous nous proposons d'exposer une méthode permettant de calculer directement l'état stationnaire-limite, sans qu'il soit nécessaire de procéder à une suite d'itérations.

### Variables et fonctions

Soit  $L(t)$  la taille, c'est-à-dire l'effectif, de la population à l'instant  $t$ . Les instants  $t$  auxquels la taille de la population est connue prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers.  $t = 0$  marque le début des observations. La durée qui sépare deux instants d'observation consécutifs est toujours la même; elle est notée  $u$ . Les considérations présentées restent valables quelle que soit cette durée qui peut être une année, un mois, une décennie, etc. Comme on le verra dans un paragraphe spécial, on peut aussi vouloir observer la population en tout instant;  $t$  varie alors de façon continue (modèle à temps continu).

Posons  $L(t) = X(t) + Y(t)$ .  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont respectivement l'effectif des hommes et des femmes composant la population à l'instant  $t$ .

Posons encore:

$$X(t) = X(0, t) + X(1, t) + \cdots + X(x, t) + \cdots$$

$$Y(t) = Y(0, t) + Y(1, t) + \cdots + Y(y, t) + \cdots$$

$X(x, t)$  est l'effectif des hommes d'âge  $x$  à l'instant  $t$  et  $Y(y, t)$  est celui des femmes d'âge  $y$  au même instant  $t$ .

Les âges  $x$  et  $y$  sont exprimés en nombre de durées  $u$  avec arrondi à l'entier inférieur. Soit, par exemple,  $a$  l'âge réel d'un homme à l'instant  $t$ ; on lui attribuera l'âge  $x$  si  $a \in [xu, (x+1)u[$ .

Les têtes composant la population n'étant pas éternelles, il existe des âges maxima à partir desquels  $X(x, t)$  et  $Y(y, t)$  sont nuls. Les sommes indiquées ci-dessus ne comptent donc qu'un nombre fini de termes.

Ceci posé, on peut noter:

$$X(x+k, t+k) = X(x, t)p(x, x+k)$$

$$Y(y+k, t+k) = Y(y, t)p(y, y+k)$$

$p(x, x+k)$  est la probabilité qu'un homme d'âge  $x$  soit encore en vie  $k$  intervalles de temps  $u$  plus tard.  $p(y, y+k)$  est la même probabilité pour une femme d'âge  $y$ . On a de façon évidente:

$$p(x, x) = p(y, y) = 1$$

$$p(x, x+k+n) = p(x, x+k)p(x+k, x+k+n)$$

$$p(y, y+k+n) = p(y, y+k)p(y+k, y+k+n)$$

En raison de l'hypothèse de l'invariance dans le temps des conditions de mortalité,  $p(x, x+k)$  et  $p(y, y+k)$  ne sont pas des fonction de  $t$ .

On peut noter encore:

$$X(0, t+1) = Y(0, t)g(0) + Y(1, t)g(1) + \dots + Y(y, t)g(y) + \dots$$

$$Y(0, t+1) = Y(0, t)f(0) + Y(1, t)f(1) + \dots + Y(y, t)f(y) + \dots$$

$g(y)$  et  $f(y)$  sont respectivement le nombre moyen de garçons et de filles auxquels une femme d'âge  $y$  donne naissance dans l'intervalle de temps  $u$ . En fait, on ne considère que les nouveaux-nés en vie à la fin de la durée  $u$  au cours de laquelle ils sont nés.  $g(y)$  et  $f(y)$  sont aussi influencés par la mortalité infantile et ce d'autant plus fortement que  $u$  est plus long.  $g(y)$  et  $f(y)$  tiennent également compte de la mortalité de la mère de l'âge  $y$  à l'âge  $y+1$ . En outre, les conditions de natalité étant invariables dans les temps,  $g(y)$  et  $f(y)$  ne sont pas fonction de  $t$ . Enfin, pour la raison déjà indiquée, les deux sommes ci-dessus ne comptent qu'un nombre fini de termes.

Remarquons que  $g(y)$  et  $f(y)$  sont nuls pour les petites valeurs de  $y$  (âges avant le début de la fécondité) et pour les grandes (âges après la fin de la fécondité).

De plus, si  $g(y)$  et  $f(y)$  sont toujours nuls pour les âges  $y$  non multiples d'un nombre  $N$  donné ou s'il n'existe qu'une seule valeur de  $y$  rendant  $g(y)$  et  $f(y)$  non nuls, des cas irréguliers peuvent se présenter. Nous les écartons d'emblée comme découlant d'hypothèses irréalistes.

Une autre remarque doit être faite: le rapport  $g(y)/f(y)$  est quasiment une constante, nommée rapport de masculinité à l'âge  $y$ . Il est généralement un peu supérieur à 1 (par exemple 1.05).

### Conditions de stationnarité

Dans une population stationnaire,  $X(x, t)$  et  $Y(y, t)$  ne varient plus en fonction de  $t$ .

On a alors d'une part:

$$\begin{aligned} X(x+1, t) &= X(x+1, t+1) = X(x, t)p(x, x+1) \\ Y(y+1, t) &= Y(y+1, t+1) = Y(y, t)p(y, y+1) \end{aligned}$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned} X(0, t) &= Y(0, t)g(0) + Y(1, t)g(1) + \dots + Y(y, t)g(y) + \dots \\ Y(0, t) &= Y(0, t)f(0) + Y(1, t)f(1) + \dots + Y(y, t)f(y) + \dots \end{aligned}$$

Quant à la troisième hypothèse qui veut que la natalité compense exactement la mortalité, elle entraîne la relation suivante:

$$p(0, 0)f(0) + p(0, 1)f(1) + \dots + p(0, y)f(y) + \dots = 1$$

Cette formule exprime le fait que chaque femme donne, au cours de sa vie, naissance en moyenne à exactement une autre femme.

Compte tenu du sexe masculin, le nombre de naissances par femme est donc légèrement supérieur à 2.

### Recherche de l'état stationnaire

Considérons le nombre de femmes présentes dans la population au début des observations, donc en  $t = 0$ , et soit  $F(1)$  le nombre de filles auxquelles elles

donneront naissance. Il vient:

$$\begin{aligned}
 F(1) = & Y(0, 0)[p(0, 0)f(0) + p(0, 1)f(1) + \dots + p(0, y)f(y) + \dots] \\
 & + Y(1, 0)[p(1, 1)f(1) + p(1, 2)f(2) + \dots + p(1, y)f(y) + \dots] \\
 & + \dots \\
 & + Y(y, 0)[p(y, y)f(y) + p(y, y + 1)f(y + 1) + \dots] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant  $F(2)$  le nombre de filles auxquelles les  $F(1)$  femmes qui viennent d'être considérées donneront naissance.

En vertu de la troisième hypothèse, on a  $F(2) = F(1)$ .

De même, par récurrence, il vient:

$$F(2) = F(3) = \dots = F(t) = \dots = F$$

*Remarque:* On peut se demander si  $F(1)$  n'est pas simplement égal au nombre des femmes présentes au début des observations, en  $t = 0$ . En fait, il n'en est rien. Les femmes présentes en  $t = 0$  ont déjà vécu une partie de leur vie avant le début des observations. De ce fait, certaines d'entre elles n'ont plus, à ce moment-là, devant elles qu'une durée de vie féconde écourtée ou nulle. Tel n'est pas le cas, des femmes des générations suivantes qui forment les effectifs  $F(2), F(3), \dots$ . Celles-ci sont sous observation dès leur naissance.

Il suffit donc de calculer le coefficient  $c$  suivant:

$$\begin{aligned}
 c = & p(0, 0)[p(0, 0)f(0) + p(0, 1)f(1) + \dots + p(0, y)f(y) + \dots] \\
 & + p(0, 1)[p(1, 1)f(1) + p(1, 2)f(2) + \dots + p(1, y)f(y) + \dots] \\
 & + \dots \\
 & + p(0, y)[p(y, y)f(y) + p(y, y + 1)f(y + 1) + \dots] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

En résolvant l'équation

$$Y(0)c = F$$

où  $Y(0)$  est l'inconnue, on trouve  $Y(0)$  qui est l'effectif des femmes d'âge 0 dans la population ayant atteint son état stationnaire.

### Exemple numérique

Considérons les données suivantes:

$$u = 13 \text{ années}$$

Age en années	$x$ ou $y$	$p(x, x + 1)$	$p(y, y + 1)$	$g(y)$	$f(y)$	$X(x, 0)$	$Y(y, 0)$
[ 0, 13[	0	0.78	0.80	–	–	1 966	1 872
[13, 26[	1	0.88	0.90	0.84	0.80	795	764
[26, 39[	2	0.78	0.80	0.53	0.50	2 523	2 508
[39, 52[	3	0.69	0.70	–	–	978	1 004
[52, 65[	4	0.59	0.60	–	–	798	827
[65, 78[	5	0.49	0.50	–	–	1 174	1 280
[78, 91[	6	0.27	0.30	–	–	782	1 110
[91,104[	7	0.00	0.00	–	–	984	635
						10 000	10 000

On trouve:

$$F = 4081 \quad c = 2.36 \quad Y(0) = 1729.24$$

L'état stationnaire-limite de la population est dès lors:

$x$ ou $y$	$X(x)$	$Y(y)$
0	1 821.92	1 729.24
1	1 421.10	1 383.39
2	1 250.57	1 245.05
3	975.44	996.04
4	673.06	697.23
5	397.10	418.34
6	194.58	209.17
7	52.54	62.75
		6 786.31
		6 741.21

$X(x)$  et  $Y(y)$  sont respectivement l'effectif des hommes et des femmes aux âges  $x$  et  $y$  dans la population à l'état stationnaire.

### Modèle à temps continu

Si l'on veut considérer un écoulement continu du temps, les durées et les âges ne sont plus des multiples de la durée de base  $u$ . Ces grandeurs prennent leurs valeurs dans l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

Les probabilités de survie s'expriment à partir du taux instantané de mortalité  $\mu(x)$  pour les hommes et  $\mu(y)$  pour les femmes. On a les formules suivantes:

$$p(x, x+k) = e^{-\int_0^k \mu(x+v) dv} \quad p(y, y+k) = e^{-\int_0^k \mu(y+v) dv}$$

Quand à la natalité, on peut dire que  $g(y) dy$  et  $f(y) dy$  sont respectivement le nombre des naissances dans un intervalle de temps infiniment court allant de l'âge  $y$  à l'âge  $y + dy$ . Dans ce cas, les grandeurs  $g(y)$  et  $f(y)$  ne sont plus influencés par la mortalité, ni celle de la mère, ni celle de l'enfant.

Les formules de  $F$  et de  $c$  deviennent les suivantes:

$$F = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} Y(y,0) p(y, y+v) f(y+v) dv dy$$

$$c = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(0, y) p(y, y+v) f(y+v) dv dy$$

### Modèle stochastique

Les grandeurs  $g(y)$  et  $f(y)$  sont en fait des espérances mathématiques, conditionnées par l'âge  $y$  de la mère, du nombre des naissances (respectivement masculines et féminines) pendant la durée  $u$ . Il en résulte que, pour chaque femme, l'espérance mathématique du nombre de filles auxquelles elle donnera naissance dans le courant de sa vie entière est 1 comme l'indique la formule déjà considérée:

$$p(0,0)f(0) + p(0,1)f(1) + \dots + p(0,y)f(y) + \dots = 1$$

En travaillant à partir des espérances mathématiques, nous nous sommes référé jusqu'ici à un point de vue déterministe.

Si l'on veut adopter un point de vue stochastique, on doit considérer que chaque femme donne naissance, dans le courant de sa vie, à un nombre  $K$  de filles, inconnu ex ante, de telle sorte que l'on a  $K = k$  avec la probabilité  $m(k)$ . Les

conditions dans lesquelles nous nous sommes placés entraînent que l'espérance mathématique de  $K$  (qui est une variable aléatoire) est 1, soit  $E(K) = 1$ .

Mais la probabilité  $m(0)$  qu'une femme ne donne naissance à aucune autre femme ne peut être tenue pour nulle. En effet, une femme peut ne donner naissance qu'à des garçons ou n'avoir aucun enfant.

La probabilité  $m(0)$  n'étant pas nulle, il peut se faire que l'extinction des générations successives se produise, éventualité qui est absente dans le modèle déterministe.

Notons  $g_n(k)$  la probabilité que la  $n^e$  génération de femmes compte  $k$  têtes.  $g_n(0)$  représente la probabilité que l'extinction se produise avant la  $(n+1)^e$  génération.

On peut poser:

$$g_{n+1}(0) = g_n(0) + g_n(1)m(0) + g_n(2)m(0)^2 + \dots + g_n(k)m(0)^k + \dots$$

et

$$g_n(0) = g_1(0) + [g_2(0) - g_1(0)] + \dots + [g_n(0) - g_{n-1}(0)]$$

Comme  $g_n(0)$  – qui est une probabilité – est bornée supérieurement, les différences  $g_t(0) - g_{t-1}(0)$  forment une suite tendant vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

En outre, on remarque que l'on a:

$$g_{n+1}(0) - g_n(0) = g_n(1)m(0) + \dots + g_n(k)m(0)^k + \dots$$

Donnons-nous maintenant un nombre positif  $q$  aussi voisin de 0 que l'on voudra et un entier positif  $Q$  aussi grand que l'on voudra. Pour  $n$  suffisamment grand, les deux inégalités ci-dessous sont vérifiées:

$$\begin{aligned} g_n(1)m(0) + \dots + g_n(Q)m(0)^Q &< q/2 \\ g_n(Q+1)m(0)^{Q+1} + g_n(Q+2)m(0)^{Q+2} + \dots &< q/2 \end{aligned}$$

La première inégalité implique que la probabilité que la  $n^e$  génération de femmes compte un nombre de têtes  $\geq 1$  et  $\leq Q$  tend vers 0.

Quant à la probabilité que le nombre de têtes de la  $n^e$  génération soit supérieur à  $Q$ , elle peut ne pas devenir nulle, la seconde inégalité étant satisfaite en raison des coefficients

$$m(0)^{Q+1}, m(0)^{Q+2}, \dots$$



Toutefois, cette situation implique que la  $n^{\text{e}}$  génération devient infiniment grande quand  $n$  tend vers l'infini; elle est donc incompatible avec notre hypothèse que les espérances mathématiques du nombre de têtes de toutes les générations sont égales. Donc, dans notre modèle,  $g_n(k)$  tend vers 0 pour tout  $k$  supérieur ou égal à 1.

Il en résulte que  $g_n(0)$  tend vers 1 pour  $n \rightarrow +\infty$ . En d'autres termes, l'extinction est certaine à la limite.

On retrouve ici une situation qui n'est pas sans rappeler celle du joueur qui, ayant au départ une fortune finie, engage une suite illimitée de parties d'un jeu équitable et finit nécessairement par se ruiner.

Il n'en reste pas moins qu'il y a une certaine contradiction entre les conclusions délivrées par le modèle déterministe (qui ignore l'éventualité de l'extinction) et celles du modèle stochastique (qui prévoit une extinction certaine à la longue). Ces contradictions sont moins gênantes que cela pourrait le sembler à première vue. En effet le passage à la limite 1 de la probabilité d'extinction est très lent si  $F$  est notable. Pour être pris en considération, ce passage à la limite exige que les conditions de mortalité et de natalité se maintiennent invariables sur une très longue période. Or ces conditions n'offrent pas, dans les faits, une telle stabilité si bien que l'on peut ignorer, dans le court et le moyen terme, l'éventualité de l'extinction.

### Exemple numérique

Prenons les données suivantes:

$$m(0) = 0.4 \quad m(1) = 0.2 \quad m(2) = 0.4 \quad F = 1$$

et calculons quelques  $g_n(k)$ . Il vient:

---

$k$	$g_1(k)$	$g_2(k)$	$g_3(k)$	$g_4(k)$
0	0	0.4	0.544	0.627 174 4
1	1	0.2	0.104	0.066 060 8
2		0.4	0.224	0.146 611 2
3			0.064	0.059 289 6
4			0.064	0.066 048 0
5				0.016 793 6
6				0.013 107 2
7				0.003 276 8
8				0.001 638 4
$E(k)$	1	1	1	1

---

La croissance de  $g_n(0)$  est relativement rapide dans cet exemple en raison du fait que l'on a donné à  $F$  la plus petite valeur possible, soit  $F = 1$ .

Michel Hort  
 Ecole de H.E.C.  
 Université de Lausanne  
 1015 Lausanne

## Bibliographie

- Léon Buquet*: Démographie. Masson et Cie., 1974.  
*Paul Deheuvels*: La probabilité, le hasard et la certitude. "Que sais-je?" N° 3, PUF, 1982.  
*Alain Hillion*: Les théories mathématiques des populations. "Que sais-je?" N° 2258, PUF, 1986.  
*Louis Roussel/Léon Gani*: Analyse démographique (Exercices et problèmes). Armand Colin, 1973.  
*E. A. Wrigley*: Société et population. L'Univers des connaissances, Hachette, 1969.

**Résumé**

L'auteur étudie les différents aspects du passage à l'état stationnaire d'une population sans mouvements migratoires soumise à des conditions invariables de natalité et de mortalité.

**Zusammenfassung**

Der Autor untersucht verschiedene Aspekte der Konvergenz einer Bevölkerung zum Beharrungszustand. Dabei wird Ab- und Einwanderung ausgeschlossen, und Geburten- und Sterblichkeitsraten werden als konstant vorausgesetzt.

**Summary**

The author examines various aspects of the convergence of a population to the stationary or stable state. Migration is neglected, and the birth and mortality rates are assumed to be constant.