Loi des grands nombres : tyrannie des petits nombres

Autor(en): **Amsler, Marc-Henri**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (1993)**

Heft 2

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551091

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

MARC-HENRI AMSLER, Lausanne

Loi des grands nombres – Tyrannie des petits nombres*

Mesdames et Messieurs,
Il est dans les usages universitaires qu'un professeur en début de carrière présente en public le domaine de ses recherches et de son futur enseignement. Les années passant, le temps arrive pour lui de céder la place, de présenter ... sa révérence à ce même public. Ces usages me semblent bons et c'est ce soir que j'ai le privilège, après 29 ans d'activité, de fermer ma fenêtre, avec un regard tourné vers le passé évidemment, mais aussi avec la satisfaction de savoir que d'autres viennent après moi, continuer, corriger, voire contester ce qu'il m'a été très largement donné de faire ici à l'Université de Lausanne.
Aujourd'hui sont rassemblés dans cet auditoire, outre nos étudiants, les participants au Colloque organisé par l'Institut de sciences actuarielles de notre Université et l'Association suisse des actuaires, Colloque qui regroupe des collègues et amis actuaires de Suisse, également de bon nombre de pays, proches et plus lointains. De plus, j'ai le plaisir de saluer d'autres collègues, des parents, des amis aussi, non actuaires, eux probablement curieux de savoir ce qu'est un actuaire, ce qu'il fait, ce qu'il est. Public divers ce soir, mon propos tentera de tenir compte de la diversité des attentes, m'excusant d'emblée auprès des uns du peu de nouveauté de mon exposé, et auprès d'autres de l'usage de notions peu compréhensibles. Mais un peu de patience, les sciences actuarielles n'ont rien d'une tour de Babel.

1 Thème de l'exposé

Le sujet dont j'aimerais vous entretenir aujourd'hui traite d'un phénomène qu'il n'est pas aisé de cerner, un phénomène lié à l'assurance, mon domaine, bien sûr: je veux dire la survenance des accrocs que nous subissons tous sur notre chemin. J'aimerais vous parler de ce «hasard» qui semble régir les événements qui nous menacent ... et qui parfois nous touchent.

* Leçon d'adieu présentée à l'Université de Lausanne le 4 juin 1993.

Le hasard, qu'est-ce que le hasard? A notre niveau d'individu, assurément, le mot «hasard» est un concept pratique pour occulter notre impuissance à prévoir ce qui nous attend (entre nous: une impuissance d'ailleurs fort utile!). Pour une institution comme l'assurance qui enregistre à journée faite les coups du sort qui nous touchent, le hasard est-il, comme pour nous, aveugle, impénétrable? La réponse est autre. L'imprévisibilité des événements isolés existe, mais à observer la masse de ces événements isolés, est-il pensable que l'on puisse en quelque sorte dégager des lignes générales sur le comportement du hasard? Dans le domaine des événements néfastes qui nous touchent, des observations statistiques sont réalisables, et ont été réalisées. Les actuaires des institutions d'assurance, très tôt, ont été sur le pont à cet effet, observateurs des «malchances» d'autrui, pourrait-on dire! Effectivement ces observateurs du hasard ont acquis, dans bien des domaines, une vue assez claire du profil que peut prendre le hasard, l'acquisition de cette connaissance se justifiant, non par un malin plaisir à détecter les ennuis d'autrui, mais par le désir de faciliter la compensation des conséquences matérielles des coups du sort touchant une fois l'un, une fois l'autre, au hasard.
Je désire tout d'abord esquisser l'histoire de la conquête des lois du hasard par les actuaires. L'histoire commence au moment où l'on a été persuadé que le hasard n'était pas cette hydre que l'on s'efforçait de maintenir dans le tréfonds des abysses marins. Mon propos évoquera la perspicacité remarquable des observateurs «neutres» des coups du sort qui nous touchent, évoquera également les efforts d'imagination déployés par les théoriciens. Cette double approche, observation du monde réel et spéculation théorique, éclairera d'ailleurs la problématique de l'action que les actuaires ont entreprise et qu'ils appellent, dans leur jargon, la modélisation mathématique du risque.
Le hasard une fois décrit par des modèles mathématiques, j'évoquerai les effets que le hasard exerce sur les finances des institutions d'assurance et les moyens dont disposent les actuaires pour stabiliser l'assise financière desdites institutions.

2 Signification du titre

Dans la conquête des lois du hasard, la loi des grands nombres a joué un rôle central. La loi des grands nombres est intuitive. Elle a opéré ses effets depuis la plus haute antiquité: les cités se sont formées en vue de réaliser, par la conjonction de forces diverses, une existence commune. Notre société occidentale, créatrice de risques toujours plus nombreux dans un environnement toujours plus diversifié, a dû, à son tour, regrouper ses risques pour pouvoir les assumer. Ce fut là l'origine des institutions d'assurance.

La loi des grands nombres est née de l'observation. Elle décrit le phénomène que voici: si, dans une foule, vous mesurez la stature de quelques personnes, 3 ou 4, prises au hasard, si vous en déterminez la moyenne, cette stature moyenne dépendra de l'échantillon des personnes comprises dans l'observation, c'est l'évidence même. Si vous recommencez l'expérience avec d'autres personnes, la nouvelle valeur de la stature moyenne sera ordinairement différente. Si vous étendez maintenant votre expérience à des groupes de personnes en nombre toujours plus grand (100, 1000 personnes), l'observation dit que la moyenne dépendra toujours moins des personnes prises en considération. Une constatation conforme à notre intuition! Les mathématiciens ont démontré que si l'on procédait à une telle expérience avec des groupes comprenant un nombre infini de personnes (une abstraction!), la moyenne ne varierait plus. C'est la loi des grands nombres.

Si les événements pris en charge par les institutions d'assurance devaient être soumis en tout point à la loi des grands nombres, cette loi fournirait assurément la base théorique de l'équilibre des finances desdites institutions: la loi des grands nombres assurerait la compensation pratiquement complète entre petits et gros sinistres. Elle éliminerait les effets du hasard.

Alors question: les institutions d'assurance peuvent-elles réellement tabler sur cette loi pour équilibrer leurs finances?

Si nous sommes nombreux sur cette terre – impression que nous ressentons facilement sur les routes le dimanche soir – la réalité que nous vivons tous les jours ne satisfait pas aux conditions dans lesquelles joue la loi des grands nombres! Cet infini des mathématiciens? Il s'agit d'une abstraction; l'infini ne fait pas partie de notre monde réel. Dans la réalité, les événements qui nous touchent ne se réalisent pas en nombre infini. Dans le domaine des risques que nous courons, il serait d'ailleurs éminemment regrettable s'il fallait que les événements qui nous guettent, nous tous, se réalisent en grand nombre ... simplement pour le plaisir de pouvoir appliquer cette loi simplificatrice! La réalité pour l'assurance, et pour les actuaires qui cherchent à formaliser mathématiquement la réalité, la réalité est que les phénomènes à décrire sont en nombre limité, en petits nombres! Et avec le petit nombre resurgit le hasard, le hasard des événements qui interviennent, irrégulièrement. Pendant longtemps on a reconnu à la loi des grands nombres la faculté de stabiliser les assises financières des institutions d'assurance. Les petits nombres ont progressivement

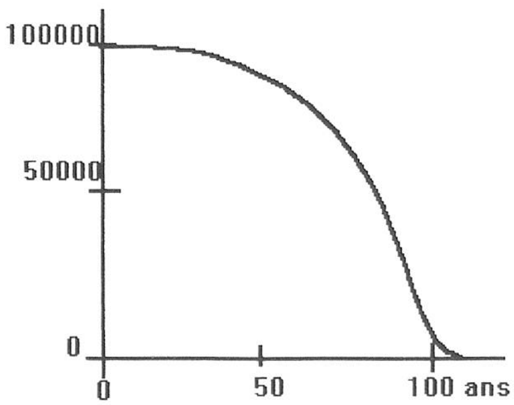
contesté cette prééminence. Peu à peu ils gagnèrent du terrain, vu que le hasard qu'ils portent en eux devait d'une manière ou d'une autre trouver une place dans l'explication des phénomènes. Mais pour que les petits nombres gagnent définitivement la partie, il fallait que les actuaires puissent en découvrir les lois. Ce fut parfois une tyrannie!
Voyons un peu comment cette conquête s'est réalisée.
Le premier défi que l'actuaire à la recherche d'un modèle théorique a rencontré a été celui du phénomène du décès.

3 Le phénomène «vie-décès»

Le phénomène «vie-décès» de l'espèce humaine est vieux comme le monde. Il fut perçu et accepté de façon fort diverse selon les temps et selon les lieux. Voici ce que peut en dire un actuaire: les humains étant en très grand nombre sur cette terre, il est aisé de déterminer, par l'observation, la décroissance de grands groupes de personnes due au phénomène du décès. Voici un exemple:

Figure 1

Ordre des vivants



$$d\ell_x = -\mu_x \ell_x \quad \text{ou} \quad \ell_{x+1} = (1-q_x)\ell_x$$

$$D_x = v^x \ell_x \qquad C_x = v^{x+1} d_x$$

$$N_x = \sum_t D_{x+t} \qquad M_x = \sum_t C_{x+t}$$

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad {}_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$P_{x:n} = \frac{{}_nA_x}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Considérez cent mille nouveaux-nés, et, par la pensée, suivez ce groupe au fil des années. La décroissance du nombre de personnes encore en vie peut être représentée par une courbe, courbe qui permet d'estimer le futur des gens «en moyenne», p. ex., d'estimer la durée moyenne du paiement de cotisations ou de rentes en assurance sociale. La compensation entre vies courtes et vies longues se réalise par le fait que les affiliés sont en grand nombre. Cette approche a donné naissance au premier modèle utilisé en assurance sur la vie. Ce modèle est dit «déterministe» vu que le caractère aléatoire de la durée de vie d'une personne n'est pas pris en considération. Les finances de notre AVS sont construites sur un tel modèle. Ce n'est pas le phénomène du décès des affiliés qui pourrait, pour l'instant, déséquilibrer les finances de l'AVS. La loi des grands nombres joue pleinement!

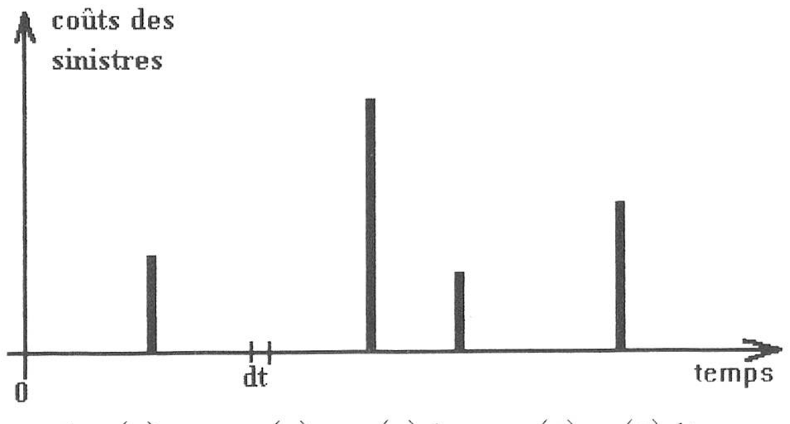
Vous trouvez sur la droite de la figure quelques exemples de formules mathématiques concrétisant ce type d'approche, des formules qui nous ont été léguées par le XIX[e] siècle:

- μ_x et q_x mesurent l'intensité de la mortalité à l'âge x,
- ℓ_x est la fonction décrivant la décroissance du nombre des vivants,
- le facteur v permet de tenir compte du phénomène de l'intérêt et du déphasage des opérations d'assurance dans le temps,
- la mathématique est élémentaire: des additions, des multiplications et des divisions.

Si l'on veut saisir la réalité, c.-à-d. prendre en compte également l'aspect aléatoire des décès – imaginez par exemple ce qui se passe dans une caisse de pensions, 0–1–2 décès par année, en tout cas un petit nombre! – le phénomène peut être décrit mathématiquement comme suit:

Figure 2

Modèle aléatoire vie-décès - Processus de Poisson composé



$$dp_k(t) = \mu_{k-1}(t)p_{k-1}(t)dt - \mu_k(t)p_k(t)dt$$

$$p_k(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$$

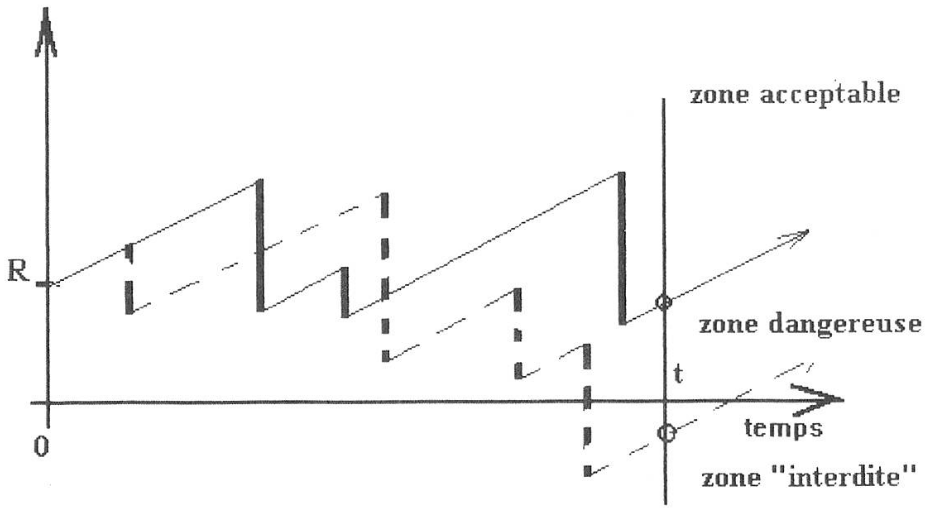
$$F_S(x) = \sum_k p_k(t) F_Y^{*k}(x)$$

Considérez la ligne du temps. Nous sommes au temps zéro. Les événements assurés peuvent intervenir dans le futur à chaque instant. J'appelerai «aléa» tout événement dont la survenance dépend du hasard. On a affaire là à ce qu'on appelle un processus évoluant dans le futur de façon aléatoire, ou tout simplement un processus aléatoire. La *figure 2* concrétise une évolution présentant quatre décès successifs.
Si l'on considère un très court intervalle de temps dt, ou il se passera quelque chose (un décès), ou il ne se passera rien. Cette alternative due au hasard s'exprime mathématiquement par la première équation, équation qui régit les probabilités des différents cas de figure possibles (0, 1, 2, 3, ... décès jusqu'au moment t). Les lettres $p_k(t)$ sont les symboles de ces diverses probabilités. En ce qui concerne le décès, l'observation dit que les événements interviennent sans s'influencer les uns les autres – on parle d'indépendance statistique des événements. De plus l'observation dit que la pression exercée sur le groupe par la mortalité, soit le facteur μ, peut être considérée comme constante à court et moyen terme. Dans ce cas particulier, l'équation possède une solution mathématique simple: la solution, pour les probabilités $p_k(t)$, se trouve sur la seconde ligne.
Si dans ce modèle on tient compte encore des prestations d'assurance (les segments verticaux dans le graphique), qui ordinairement sont différentes d'un assuré à l'autre, on obtient la troisième formule, caractérisant un processus aléatoire bien connu de l'actuaire: le processus de Poisson composé, «Poisson» du nom du célèbre mathématicien-probabiliste du début du XIX^e siècle. Ce processus modélise deux hasards: le hasard de la survenance des événements au cours du temps et le hasard d'une prestation d'assurance plus ou moins élevée en cas de décès. Pour dominer ces formules l'actuaire doit avoir recours à l'ordinateur.
Le modèle, construit sur cette approche «aléatoire» des événements, est appelé «modèle aléatoire de l'assurance-vie» par opposition au modèle déterministe de tout à l'heure. Ce modèle est encore d'un usage assez rare dans la pratique. Par contre, pour les actuaires-théoriciens la tyrannie que leur imposait l'existence des petits nombres dans le domaine du risque de décès a pris fin il y a environ 50 ans.
Mais à quoi un tel modèle sert-il?

La réponse se trouve sur la *figure 3* que voici:

Figure 3

Portefeuille d'assurances au décès
Evolution de l'assise financière



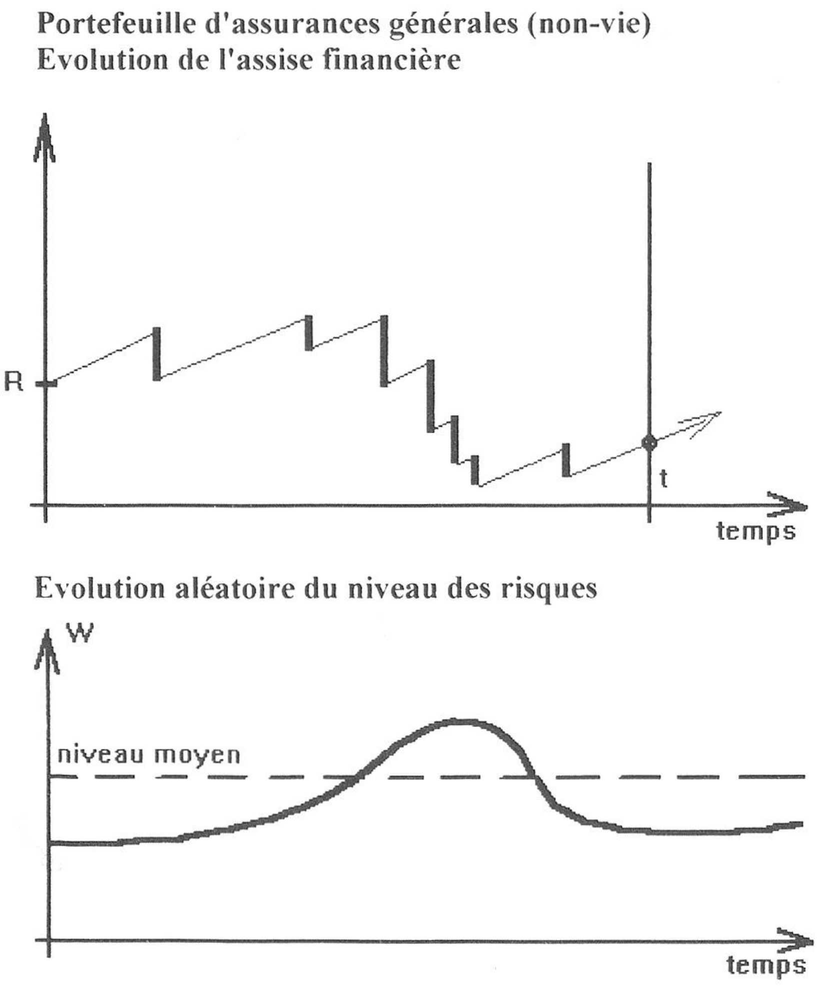
Partons de l'époque 0, avec un capital-risque R destiné à supporter les conséquences financières des coups du sort. Par suite du financement progressif du système au moyen des contributions des assurés, l'assise financière de l'institution évolue en dents de scie, la croissance se réalisant durant les périodes sans sinistre, les chutes représentant les prestations d'assurance. La figure présente deux évolutions possibles, l'une en trait plein, l'autre en traitillé.
Une question fondamentale se pose naturellement aux responsables de l'institution: quelle est la probabilité que le système «déraille» c.-à-d. aboutisse dans la «zone interdite», correspondant à un déficit dans le financement. Dans une telle situation, l'institution ne serait plus en état de faire face à ses obligations, temporairement ou définitivement. Le modèle que nous avons décrit permet de donner une réponse à de telles questions.
Nous traiterons de ce genre de problèmes dans un instant.

4 Les risques non-vie

Et des processus aléatoires créés par des événements d'une autre nature que le décès, tels les accidents, les maladies, les incendies ou les tremblements de terre, tous risques que les assureurs nomment «risques non-vie», que peut-on

en dire? Il n'y a pas de doute que les tremblements de terre sont des événements qui se produisent en petit nombre!
L'histoire de la modélisation mathématique des risques non-vie ne commence qu'au début de notre siècle. L'impulsion est venue des pays scandinaves. Des difficultés majeures attendaient les chercheurs: le rythme de survenance des événements assurés et la variabilité des effets économiques de ce type de risques étaient délicats à appréhender mathématiquement: il ne s'agissait plus, comme dans l'alternative «vie-décès», du «être ou ne pas être», du «to be or not to be». A l'époque, vue par les statisticiens et les mathématiciens, cette catégorie de risques avait plus l'aspect d'une forêt vierge que d'un jardin à la française. Découvrons ensemble cette situation.
Voici un graphe type de l'évolution de l'assise financière d'une institution d'assurance en général.

Figure 4



Modèle mathématique

$$p_k = \int g(w)\frac{(\lambda w)^k}{k!}e^{-\lambda w}dw$$

$$F_S(x) = \sum_k p_k \cdot F_Y^{*k}(x)$$

Processus de Poisson pondéré composé

Nous retrouvons le même type de graphique que tout à l'heure: une évolution des finances en dents de scie, avec des périodes de croissance dues aux primes encaissées et des chutes dues aux sinistres payés (segments verticaux).
Malheureusement l'observation révèle qu'une cause nouvelle accentue le caractère aléatoire de l'évolution: les événements craints ne surviennent plus indépendamment les uns des autres, comme c'était le cas pour les décès. Pensez à une épidémie de grippe, ou à la présence dans un quartier d'un incendiaire. Pensez à ce qui se passe sur nos routes si un beau matin d'hiver la pluie givrante sème la pagaille. Il y a des années de sécheresse et des années de pluie, des années de grêle. Il y a des années de surchauffe économique et des années de récession. Les sinistres touchant les individus, et leurs retombées sur les finances des institutions d'assurance, ne se répartissent pas de manière régulière au cours des ans. Les sinistres se concentrent sur certaines périodes et se font plus rares à d'autres. Et surtout, il est impossible de prévoir à l'avance cette alternance des périodes lourdes et des périodes plus légères pour l'assurance. Tout ce que l'on sait, par l'observation, c'est que l'intensité du risque fluctue au cours du temps.
Le second graphique de la *figure 4* concrétise la variabilité de l'intensité du risque. Une époque de risque aggravé, une époque «chaude», est intervenue, par hasard, au milieu de la période (remarquer la bosse). Une certaine «incertitude des temps» nous atteint «au hasard» dirons-nous à nouveau pour cacher notre ignorance. Qui peut prévoir en effet l'évolution des conditions atmosphériques, l'évolution du comportement des gens, le retour de tensions politiques ou économiques, toutes évolutions pouvant conditionner temporairement les risques? Le hasard pur n'est plus seul à l'œuvre comme dans le cas du risque de décès.
Une caractéristique tout de même de certains événements «non-vie» pourrait simplifier la mise au point des modèles: les accidents, les maladies sont des

événements fréquents. Dans un portefeuille d'assurances ces événements sont donc nombreux. Est-on alors habilité à utiliser la loi des grands nombres? Malheureusement la réponse est négative. Si les événements eux sont bien en grands nombres, les conditions dans lesquelles ils se réalisent, variables vu l'«incertitude des temps», ne se reproduisent de même manière que rarement, très rarement même. Pour utiliser la loi des grands nombres il faudrait étendre la description à de longues périodes, niveler en quelque sorte l'irrégularité, ce qui est la négation de ce que l'on cherche: une représentation fidèle de la réalité du moment. Dans le domaine des risques «non-vie», il faut abandonner l'idée de trouver des modèles basés sur la loi des grands nombres.

L'aléa supplémentaire de «l'incertitude des temps» jette ainsi un nouveau défi aux actuaires: comment transposer cet aléa en mathématique? Nouvelle tyrannie! Il fallut amender le modèle, ajouter aux deux aléas de la survenance et des coûts des sinistres, un troisième larron: l'aléa de l'incertitude des temps. Et l'opération réussit: au bas de la *figure 4* est indiquée la transcription en mathématique du phénomène, description rendue plus complexe que dans le cas du décès par la présence de l'incertitude des temps. L'actuaire parle ici d'un processus de Poisson pondéré composé.

Le maniement de ces équations, et l'application pratique de ces formules ne sont évidemment pas des opérations élémentaires. Mais actuellement un outil de grande valeur est à disposition; l'ordinateur vient à l'aide des modélistes. Il leur fournit en cas de besoin et des solutions, et, chose fort utile, dans notre forêt vierge, la possibilité de rendre intuitive, par simulation, le cheminement aléatoire des processus.

Quant à l'usage que l'on peut faire de ce modèle, nous l'avons esquissé il y a un instant dans le cas du risque de décès:

- que peut-on dire des évolutions possibles, des évolutions acceptables du processus, des probabilités de «déraillement» du système, de la probabilité de ruine, comme disent les actuaires?

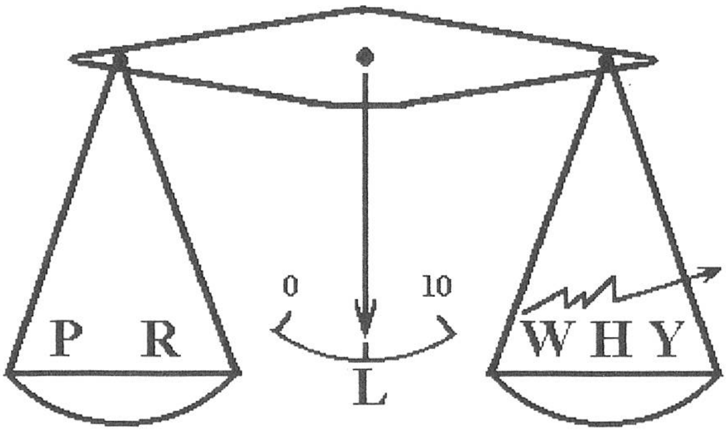
mais aussi

- comment contenir de telles évolutions de façon à ce qu'elles restent dans une zone de stabilité acceptable, comment modeler le risque, notamment par les mécanismes de la réassurance?

De nombreuses études ont été publiées à ce sujet. L'idée à laquelle je me suis personnellement attaché et qui a été à la base de mes travaux ces dernières années est la suivante:

Figure 5

Equation d'équilibre aléatoire



$$\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{R}} = \ell \mathbf{nM}_{W} \left\{ \ell \mathbf{nM}_{H} \left[\ell \mathbf{nM}_{Y} \left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{R}} \right) \right] \right\}$$

Un portefeuille d'assurances comporte des éléments stabilisateurs (le financement, soit les primes P et le capital-risque R disponible, sur le plateau de gauche) et des éléments perturbateurs (les prestations d'assurance, sur le plateau de droite, soumises aux trois aléas dont nous venons de parler). Si le portefeuille est viable, c.-à-d. si les chances de l'institution de rester solvable dans le futur sont suffisantes, c'est qu'il y a équilibre entre éléments stabilisateurs et éléments perturbateurs. Au dessous de la balance, vous trouvez cette condition d'équilibre transposée en mathématique.
Dans cette équation on retrouve à gauche les éléments stabilisateurs et à droite les éléments perturbateurs. Cette équation, dite équation d'équilibre aléatoire, comporte une seule inconnue: la grandeur L, appelée «niveau de stabilité». L'intérêt de cette équation réside dans le fait que la valeur de la solution L permet de trancher la question de la viabilité des portefeuilles d'assurances: un niveau L insuffisant exigera un renforcement du financement ou une réduction des risques assurés, et inversément un niveau de sécurité jugé trop important permettra des économies dans le financement.
La recherche de critères de stabilité pour les finances des institutions d'assurance s'est développée essentiellement ces cinquante dernières années. Les études ne sont pas encore terminées, mais la tyrannie exercée sur les actuaires par la présence de ce que j'ai appelé la «forêt vierge des risques non-vie» s'estompe progressivement.

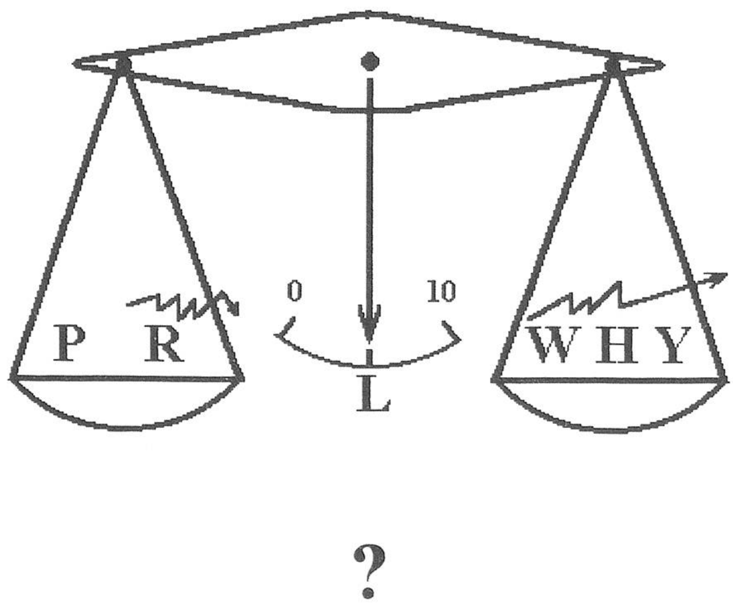
Hasards des risques vie, hasards des risques non-vie, saint Georges vous a-t-il maintenant terrassés? Les actuaires modélistes des aléas peuvent-ils penser prendre leur retraite? Grave erreur! car s'est présenté au portillon, il y a maintenant une bonne dizaine d'années, celui que l'on n'attendait pas!
Voici ce qu'il est advenu:

5 Le risque financier

Du fait de leur rôle de régulateurs des coups du sort qui nous atteignent, les institutions d'assurance se doivent de disposer de moyens financiers importants, et notamment les institutions d'assurance sur la vie. Depuis bien des années maintenant, des marchés financiers nouveaux ont vu le jour, toujours plus actifs et attractifs, toujours plus vastes, toujours plus divers et diversifiés. Avec et par ces nouveaux marchés se sont créés des types de titres aux profils insoupçonnés il n'y a pas si longtemps encore. Mais, nous le savons, qui dit marché dit offre et demande, fluctuations des prix, fluctuations des investissements en valeur. Les assureurs ont dû s'adapter et participer à cette nouvelle donne.

Figure 6

Equation d'équilibre aléatoire



C'est ainsi que, dans la balance des assureurs devant équilibrer engagements envers les assurés et moyens financiers disponibles, non seulement les prestations d'assurance portées par le plateau de droite de la balance fluctuaient – phénomène inhérent à l'activité de l'assureur, comme nous venons de le voir – mais les moyens financiers disponibles portés par l'autre plateau se mirent à se «trémousser». Les hasards de l'évolution des marchés financiers créaient ainsi dans l'assise financière des assureurs des fluctuations d'un type nouveau. Le dragon du hasard ouvrait un nouveau front. Un nouveau défi était lancé, la tyrannie exercée par le hasard sur l'actuaire reprenait de la vigueur. Je dirais: le dragon du hasard, bien que pourfendu par deux fois déjà par un saint Georges actuaire victorieux, le dragon du hasard redonnait de la queue!
Associés aux économistes-financiers, les actuaires se mirent au travail. Des modèles mathématiques furent proposés. Un premier modèle fut emprunté à la physique: le modèle du mouvement brownien, modèle qui décrit l'agitation des molécules dans un liquide, fut proposé pour décrire les mouvements erratiques des marchés financiers.
Voici quelques formules mathématiques empruntées audit modèle:

Figure 7

Processus de Wiener

$$\mathbf{W}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{t}}\right)$$

$$\mathbf{dS}_t = \mu\,\mathbf{S}_t\,\mathbf{dt} + \sigma\,\mathbf{S}_t\,\mathbf{dW}_t$$

avec la solution

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_0\,\mathbf{e}^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

Formule de Black et Scholes

$$\mathbf{P}_t = e^{-r(T-t)} E^*\left[\left(S_T - X\right)^+ / S_t\right]$$

Décrire la signification des divers éléments de ces relations demanderait du temps. L'actuaire reconnaîtra en particulier la très célèbre formule de Black et

Scholes. Les prolongements de ces formules commencent à être utilisés dans le cadre des marchés d'options, p. ex. auprès de la SOFFEX. La dernière formule est utilisée pour déterminer le prix d'une option.
On peut évidemment se poser la question de savoir si ce premier modèle est susceptible de décrire convenablement la marche aléatoire des marchés financiers. Plusieurs réserves doivent en effet être émises à son endroit. Le mouvement brownien est un phénomène relevant de la matière inerte de notre environnement physique. L'aléatoire qu'il comporte est essentiellement dû au hasard aveugle, à un hasard sans intentions et sans mémoire, celui du mouvement des molécules. Les agents actifs dans les marchés financiers œuvrent-ils au hasard, sans intentions et sans possibilité de valoriser les enseignements du passé? Certainement pas! De plus, dans les marchés financiers les corrélations sont importantes, elles ne relèvent pas du hasard pur comme en physique: en particulier on n'a encore jamais vu des sautes du marché à la hausse de même fréquence et de même amplitude que les sautes à la baisse! Mais présentement les modélistes du hasard en sont là!
Trouver des modèles plus simples mais tout de même efficaces, construits par exemple sur la loi des grands nombres? Il ne faut pas y compter, pas plus que dans le domaine des risques non-vie. Pour réussir de telles opérations, il faudrait considérer de longues, même de très longues périodes, ce qui enlèverait évidemment tout intérêt à une quelconque recherche sur cette base.
Les théoriciens de la recherche de modèles ne sont pas encore au bout de leurs peines. Des surprises les attendent! Pour percer l'avenir, il y a lieu d'extrapoler un brin l'évolution de notre monde technique. Par le développement prodigieux des télécommunications, par la mise en œuvre d'ordinateurs puissants et programmés de manière optimale, donc probablement de manière identique, il faut s'attendre, dans les marchés, à des vagues d'amplitude considérable. Imaginez si, sur toute la Terre, au même instant, les ordinateurs, qui auront remplacé les hommes, décident d'options identiques! Cette fois-là l'ordinateur aura joué un mauvais tour à l'actuaire, sans parler des conséquences économiques désastreuses que de tels événements auront dans notre société, disons, légèrement écervelée. Le mythe de l'apprenti sorcier deviendrait-il réalité!
Pour les actuaires, la recherche de modèles aptes à décrire mathématiquement le hasard et la marche aléatoire des marchés financiers exigera une imagination fertile, capable de sortir des chemins battus. En effet: par le passé, les défis du hasard que l'actuaire a dû relever ont été imposés par «Dame Nature», une nature dans laquelle l'homme ne dispose pas des leviers de commande: l'homme doit subir les lois du hasard qui lui sont imposées (décès, épidémies,

inondations). Qu'en est-il des défis lancés par les mécanismes des marchés financiers? Ces marchés, c'est l'homme qui les a créés; il les a lui-même imaginés. Et l'homme dans cette affaire n'est pas une particule élémentaire, inerte dans le cosmos. Il dispose du libre arbitre, il peut même être irrationnel à ses jours. Par son propre comportement il est donc capable d'altérer les règles du jeu qu'il a lui-même créé. Comment pourrait-il alors dans ces conditions espérer découvrir des lois de portée générale? Il ne peut guère espérer mieux que de découvrir les règles de son propre libre arbitre.
Mon approche se veut simplificatrice. Bien des collègues sont là ces jours pour que nous débattions ensemble de questions de cette nature.
Mon propos se veut aussi provocateur: vieux loup en passe de se retirer dans sa tanière, je désirais par ces quelques réflexions susciter une réaction de la part de nos jeunes loups, qui, les dents bien aiguisées par un passage profitable dans cette Maison, ne vont assurément pas se contenter par la suite de ronger un os sec, décharné par leurs prédécesseurs. La recherche des lois du hasard, dans leurs formes du futur proche et plus lointain, et insoupçonnées, leur réserve, bien sûr sueurs et doutes, mais assurément des satisfactions, peut-être même la satisfaction de pouvoir enfourcher une fois la monture fougueuse de saint Georges victorieux.

6 Conclusion

Mesdames et Messieurs,
Les aléas dont nous avons demandé aux institutions d'assurance de réduire les conséquences matérielles, ces aléas ont été, restent et resteront un sujet de recherche à ne pas négliger: si l'étude des lois du hasard permet aux actuaires de satisfaire un peu égoïstement leur penchant à manier mathématiques et abstraction, l'étude du hasard et de son comportement sur les événements qui nous touchent est pour eux une chance de première grandeur, la chance de pouvoir prendre une part active à la recherche de solutions à des questions vitales de notre société. Des réussites ont pu être engrangées, une émulation heureuse a permis l'acquisition de connaissances dont nous pouvons actuellement déjà tous, dans notre monde occidental, bénéficier d'une manière ou d'une autre.
Loi des grands nombres – tyrannie des petits nombres, tel est le titre de mon propos ce soir. Lois du hasard et modélisation du hasard ont été des concepts qui, comme vous avez pu le constater ce soir, m'ont captivé ... sans me tyranni-

ser! J'aimerais pour cette raison vous laisser une seconde formule pour clore ma leçon d'adieu, formule plus personnelle et qui concrétise mieux ce à quoi il m'a été donné de participer. La voici:

servitudes, doutes et joies
du modéliste du hasard

Marc-Henri Amsler
Avenue de Rochettaz 20
1009 Pully

Résumé

La conférence présente un survol des efforts faits par les actuaires pour décrire mathématiquement les lois du hasard. La loi des grands nombres ne permet que des estimations «en moyenne». La réalité, faite de petits nombres d'événements, exige la prise en compte des modèles probabilistes, notamment pour estimer la stabilité des institutions d'assurance. Le risque dû aux investissements financiers attend toujours un modèle réaliste!

Zusammenfassung

Diese Vorlesung gibt einen Überblick über gelöste und ungelöste Fragen zum versicherungsmathematischen Verständnis des Zufalls. Das Gesetz der Grossen Zahlen erlaubt lediglich Schätzungen «im Mittel». In der Wirklichkeit, und insbesondere bei Versicherungseinrichtungen, spielen oft Ereignisse eine wichtige Rolle, welche in kleiner Zahl auftreten; die Stabilität kann also nur in einem stochastischen Modell erfasst werden. Schliesslich wird darauf hingewiesen, dass für das Investitionsrisiko bis heute kein vollauf befriedigendes Modell gefunden worden ist.

Summary

The lecture gives a survey of the progress that has been achieved by actuaries to understand the mathematical laws underlying the hazard. The law of large numbers can only be used to estimate certain values "in the average". In reality, and in particular in the context of insurance, important events take place in small numbers; then the notion of stability can be understand only in a probabilistic model. Furthermore, it is pointed out, that a fully satisfactory model for the investment risk has yet to be found.