Solvabilité et réassurance

Autor(en): **Hürlimann, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (1993)**

Heft 2

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551244

WERNER HÜRLIMANN, Winterthour

Solvabilité et Réassurance

1. Introduction

Le phénomène de la solvabilité est difficile à définir étant donné la complexité du sujet et l'abondance de la littérature traitant de cette matière. Par *solvabilité* nous entendons l'ensemble des méthodes destinées à assurer le bon fonctionnement des institutions d'assurance et qui permettent d'éviter les instabilités financières, voir les faillites de ces institutions. La question de solvabilité est de grande importance dans les marchés à libéralisme accru. Un *système de solvabilité* a pour *but* de garantir les engagements des contrats envers l'ensemble des assurés et de protéger le droit des assurés. Comme les contrats d'assurance peuvent s'étendre sur de nombreuses années, par exemple en assurance-vie, il s'agit souvent de garantir des engagements à long-terme.

Quelle peut être la *contribution de la science actuarielle* au problème fondamental de la solvabilité? En pratique un système de solvabilité peut être très complexe. Il se base nécessairement sur un *système d'informations*, qui regroupe les données de tous les contrats d'assurance de l'institution concernée. La science actuarielle s'occupe principalement de la *modélisation d'un système de solvabilité*. Un modèle est une représentation mathématique de la réalité, une manière d'appréhender quelques aspects essentiels à l'aide d'outils mathématiques appropriés. Il fournit un moyen d'explorer les propriétés de cette réalité reflétées dans le modèle. Le *critère ultime* d'un «bon» modèle est sa capacité de pronostiquer la réalité modelée. Dans notre cas un *modèle de solvabilité* sera utile s'il permet de vérifier si le but d'un système de solvabilité est atteint, c'est-à-dire si les engagements de l'institution d'assurance envers les assurés peuvent être quasiment garantis.

Une étude pratique de la solvabilité a été entreprise par *Hertel* (1984). Cette publication contient également une liste considérable de références relatives à ce sujet. Parmi les études plus récentes, une bonne discussion de la problématique est donnée par *Pesonen* (1986).

2. Un modèle de solvabilité en temps discret

De façon générale un *modèle mathématique* se construit comme suit. On se base sur une sélection judicieuse de *variables (réelles) à observer*, disons $x_1, \ldots, x_n$, qui prennent leurs valeurs dans un *espace d'états* possibles, noté E. Puis il s'agit de formuler un système mathématique liant les variables à observer. Ce système est défini par des *conditions sur les états*, décrites à l'aide d'inégalités sur un ensemble de fonctions, disons $f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$. De façon formelle, un modèle mathématique est spécifié si les éléments suivants sont définis:

observables	$x_i : E \longrightarrow R,\ i = 1, \ldots, n$
conditions sur les états	$f_j(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,\ j = 1, \ldots, m$

On notera qu'une égalité est équivalente à deux inégalités de sens opposé. Dans ce cas on parle plutôt d'*équation d'états* que de conditions sur les états.
Un *modèle de solvabilité* comprend au moins deux conditions d'états, à savoir une équation d'états, qui décrit l'*évolution d'un portefeuille d'assurance* au cours du temps, un *critère de solvabilité*, ou de *stabililé*, qui permet de décider de la solvabilité, c'est-à-dire du niveau de stabilité financière d'un portefeuille.
De façon tout à fait dassique, considérons l'*équation d'évolution* d'un portefeuille d'assurance en temps discret. On dispose des observables suivantes:

u	un capital initial au temps 0, ou provision de fluctuations
P_t	les primes encaissées durant la période de temps $[t-1, t]$
S_t	le montant aléatoire des prestations d'assurance durant la période $[t-1, t]$

On s'intéresse à la valeur financière suivante:

$U_t =$ le montant du capital au temps t

L'équation d'évolution liant deux valeurs consécutives du capital est décrite par le *système dynamique discret* suivant:

$$\begin{aligned} &U_0 = u, \\ &U_t = U_{t-1} + P_t - S_t, \quad t = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Par addition successive de ces équations on remarque que

$$U_t = u + \sum_{n=1}^{t} P_n - \sum_{n=1}^{t} S_n\,, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

La question de la solvabilité est fondamentale et essentielle pour les compagnies d'assurance. La variabilité des risques encourus est souvent importante. C'est pourquoi il s'avère indispensable de considérer de bonnes mesures de stabilité. D'habitude on se base sur les critères de ruine et le critère de stabilité pour définir des primes d'assurance stables permettant de couvrir le risque à plus ou moins long terme. Pour un contrôle efficace du processus de l'évolution du risque, ces deux critères peuvent être combinés. Ainsi le critère de stabilité s'utilise pour fixer le niveau des primes d'assurance alors que le critère de ruine permet d'estimer le capital initial (voir par exemple *Feilmeier* et *Bertram* (1987), paragraphe 1.4). De nombreuses applications basées sur le critère de stabilité sont présentées par *Beard, Pentikäinen* et *Pesonen* (1984). Le critère de stabilité est étroitement lié à la théorie de l'estimation, branche particulière de la statistique. L'intégration des progrès dans ce domaine est une tâche permanente pour l'actuaire. D'autre part la question «combien est assez?», un des trois thèmes principaux du Congrès International des Actuaires à Montréal (1992), suggère l'étude de nouveaux modèles permettant une estimation sûre des primes d'assurance. Dans ce travail quelques nouveaux aspects concernant le critère de stabilité sont étudiés. Une approche rigoureuse semblable par le critère de ruine nécessitera, en ce qui concerne les mathématiques, des techniques plus élaborées.

On dit qu'un portefeuille d'assurance satisfait le *critère de stabilité* si la probabilité que la compagnie d'assurance soit non-solvable à la fin de la période $[0, t]$ est plus petite ou égale à $\varepsilon(t, u) > 0$ suffisamment petit:

$$Pr(U_t < 0) \leq \varepsilon(t, u)\,, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Noter que a priori $\varepsilon(t, u)$ peut dépendre du temps et du capital initial. La question fondamentale et le point critique de ce genre de critère résident dans un choix «acceptable» des *niveaux de solvabilité* $\varepsilon(t, u)$. Ce problème crucial sera quelque peu abordé dans ce travail. La dépendance de $\varepsilon(t, u)$ par rapport au temps pour un portefeuille d'assurance est étudiée au paragraphe 3. Au paragraphe 5 le critère de stabilité est transformé en un critère stop-loss, qui permet d'exprimer le niveau de solvabilité à l'aide d'un équivalent économique quantifiable. Cela permet de définir des primes d'assurance stables ayant des propriétés attractives du point de vue statistique classique.

Bien que le temps est variable dans notre analyse, notre étude se restreint en fait à une période d'assurance fixée d'avance. A notre avis le calcul des primes de solvabilité dans un modèle multipériodique devrait tenir compte des sinistres observés dans le passé. A ce sujet un développement ultérieur tenant compte de la théorie de la Crédibilité, comme suggéré déjà dans *Hürlimann* (1988), s'avère indispensable.

3. Prime de solvabilité – Approximation de Tchebychev

Etant donné le caractère essentiellement *statique* du critère de stabilité, il suffit de se restreindre à l'analyse du modèle de solvabilité pour une période de temps fixée. Pour cela considérons

$$P(t) := \sum_{n=1}^{t} P_n \quad \text{les primes accumulées au temps } t$$

$$S(t) := \sum_{n=1}^{t} S_n \quad \text{les sinistres accumulés au temps } t$$

Avec ces notations le modèle de solvabilité devient:

$$\begin{aligned} &U_t = u + P(t) - S(t) \\ &\Pr(U_t < 0) \le \varepsilon(t,u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si $F_t(x) = \Pr(S(t) \le x)$ dénote la fonction de répartition des prestations d'assurance accumulées au temps t, alors on a $\Pr(U_t < 0) = 1 - F_t(u + P(t))$. Il suit que le critère de stabilité est équivalent à la condition suivante:

$$\Pr(U_t < 0) \le \varepsilon(t,u) \Leftrightarrow F_t(u + P(t)) \ge 1 - \varepsilon(t,u) \tag{3.2}$$

Si $\check{F}_t(q) = \min\{x : F_t(x) \ge q\}$ dénote le *q-quantile* de la variable aléatoire $S(t)$, alors le critère de stabilité est encore équivalent à la condition

$$\Pr(U_t < 0) \le \varepsilon(t,u) \Leftrightarrow u + P(t) \ge \check{F}_t(1 - \varepsilon(t,u)) \tag{3.3}$$

Définition. La *prime de solvabilité*, de *niveau de solvabilité* $\varepsilon(t,u)$, dénotée par $H_{\varepsilon(t,u)}[S(t)]$, est la prime minimale qui satisfait le critère de solvabilité. Par définition on a

$$H_{\varepsilon(t,u)}[S(t)] = \check{F}_t(1 - \varepsilon(t,u)) - u \tag{3.4}$$

L'évaluation d'une prime de solvabilité nécessite d'envisager deux cas distincts:

(i) On dispose d'une *information complète* sur $F_t(x)$. La forme de la fonction de répartition est connue, par exemple loi de Poisson composée, approximation lognormale, Gamma, etc, jusqu'à un nombre fini de paramètres, qui sont à estimer par des méthodes statistiques. Dans ce cas une évaluation analytique, le plus souvent même numérique, s'impose.
(ii) L'*information* sur $F_t(x)$ est *incomplète*. On connaît seulement quelques caractéristiques de la fonction de répartition, par exemple la moyenne et l'écart-type. Dans ce cas on cherche une estimation appropriée de la prime de solvabilité, qui se base sur ces caractéristiques, et qui donne une information valable quelle que soit la forme de $F_t(x)$.
En guise d'illustration du deuxième cas, montrons comment la méthode de Tchebychev permet d'obtenir une approximation de la prime de solvabilité. Supposons donné

$$\mu(t) = E[S(t)] \quad \text{la moyenne des prestations d'assurance au temps } t,$$
$$\sigma^2(t) = \mathrm{Var}[S(t)] \quad \text{la variance des prestations d'assurance au temps } t,$$

et cherchons une (plus petite) borne supérieure de la prime de solvabilité basée sur $\mu(t)$ et $\sigma(t)$, valable quelle que soit $F_t(x)$. L'*inégalité de Tchebychev* (*Gnedenko* 1991, paragraphe 6.2, p. 193) implique que, pour tout $\delta > 0$,

$$F_t(\mu(t) + \delta\sigma(t)) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}\,. \tag{3.5}$$

En particulier, pour $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon(t,u)}}$, on obtient, par définition de la prime de solvabilité l'inégalité

$$u + H_{\varepsilon(t,u)}[S(t)] = \check{F}_t(1 - \varepsilon(t,u)) \leq \mu(t) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t,u)}}\sigma(t) \tag{3.6}$$

Définition. La *prime de solvabilité de Tchebychev*, dénotée par $H^T_{\varepsilon(t,u)}[S(t)]$, est la borne supérieure de la prime de solvabilité donnée par l'expression

$$H^T_{\varepsilon(t,u)}[S(t)] = \mu(t) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t,u)}}\sigma(t) - u \tag{3.7}$$

Remarques. La borne supérieure dans (3.7) n'est pas la meilleure possible. En fait il est possible de remplacer $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t,u)}}$ par $\sqrt{\frac{1-\varepsilon(t,u)}{\varepsilon(t,u)}}$ (voir *Goovaerts* et al.

[1984], théorème 1, p. 34). Mentionnons que cette dernière prime de solvabilité a été déjà considérée dans *Hürlimann* (1988), paragraphe 3. Lorsque $\varepsilon(t, u)$ est très petit, l'amélioration apportée par la meilleure borne est minime.
Il est intéressant d'analyser la *dépendance par rapport au temps du niveau de solvabilité* pour un portefeuille d'assurance dont les primes annuelles moyennes sont déterminées par le critère de Tchebychev.
Nous supposons que $S_1, \ldots, S_t$ sont des variables indépendantes, de moyennes $\mu_i = E[S_i]$ et de variances $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}[S_i]$, $i = 1, \ldots, t$. Notons $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}^2$ la moyenne et la variance des prestations d'assurance par une unité de temps. Alors on a

$$\begin{cases} \mu(t) = \sum_{i=1}^{t} \mu_i = t\bar{\mu} \\ \sigma^2 \ \ = \sum_{i=1}^{t} \sigma_i^2 = t\bar{\sigma}^2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Dans ce travail nous postulons une prime de solvabilité moyenne $\bar{P}$ par unité de temps telle que $\bar{P} = P_1 = \cdots = P_t > \bar{\mu}$. Le financement d'un contrat d'assurance par primes périodiques constantes peut être justifié comme suit (voir p. ex. *Gerber* [1986], chapitre 5). En pratique de l'assurance-vie, les primes de marché sont souvent proportionnelles au capital assuré. Ceci implique qu'elles dépendent directement d'une prime nette moyenne dérivée de façon unique du principe d'équivalence. Ce caractère d'unicité n'est plus vérifié pour des primes périodiques de montants variables. De plus nous supposons que pour tout $n = 1, \ldots, t$, $P(n)$ est égal à la prime de solvabilité de Tchebychev. Par conséquent on a

$$\bar{P} = P_1 = P(1) = \bar{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1, u)}} \bar{\sigma} - u \,. \tag{3.9}$$

$$P(t) = \mu(t) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t, u)}} \sigma(t) - u = t\left\{\bar{\mu} + \frac{1}{\sqrt{t \cdot \varepsilon(t, u)}} \bar{\sigma}\right\} - u \tag{3.10}$$

Nous distinguons deux cas
1er cas: $u = 0$ (pas de capital initial)
Comme $P(t) = t\bar{P}$, une comparaison immédiate donne la relation

$$\varepsilon(t, 0) = \frac{\varepsilon(1, 0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{P} - \bar{\mu}}\right)^2 \tag{3.11}$$

On remarque que le niveau de solvabilité est une fonction monotone décroissante par rapport au temps, et ne dépend que du niveau de solvabilité de la première unité de temps d'assurance.

2^e *cas*: $u > 0$ (capital initial positif)
A l'aide des formules (3.9) et (3.10) on déduit par calcul l'équivalence

$$P(t) = t\bar{P} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{t \cdot \varepsilon(t,u)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t,u)}} - \left(\frac{t-1}{t}\right)\frac{u}{\bar{\sigma}} \tag{3.12}$$

Supposons encore que $t \cdot \varepsilon(t,u)$ est une *fonction continue* en t et u. Comme $\bar{P} > \bar{\mu}$, on obtient la relation limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t \cdot \varepsilon(t,u)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1,u)}} - \frac{u}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{P} - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} > 0 \tag{3.13}$$

Par continuité on en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot \varepsilon(t,u) = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{P} - \bar{\mu}}\right)^2 \tag{3.14}$$

Une *solution particulière* de cette condition limite est évidemment

$$\varepsilon(t,u) = \frac{1}{t}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{P} - \bar{\mu}}\right)^2 = \frac{1}{t} \cdot \frac{\varepsilon(1,u)}{(1 - \frac{u}{\bar{\sigma}}\sqrt{\varepsilon(1,u)})^2} \tag{3.15}$$

Comme dans le 1er cas, le niveau de solvabilité est une fonction monotone décroissante par rapport au temps, et dépend explicitement du niveau de solvabilité de la première unité de temps d'assurance.

4. Prime de marché, prime de solvabilité et réassurance

Sur le marché des assurances la prime réelle encaissée par les assureurs va rarement coincider avec la prime de solvabilité. C'est pourquoi il s'avère nécessaire de considérer des méthodes qui permettent de mesurer les différences possibles. Les résultats obtenus servent alors de base pour les décisions à prendre au niveau des responsables des institutions d'assurance. Nous montrons qu'il existe un lien général entre la prime de marché, la prime de solvabilité et le phénomène de la réassurance. Comme illustration nous montrons de quelle manière le risque d'instabilité financière peut être couvert à l'aide d'une réassurance stop-loss avec limitation des prestations d'assurance.

Dans ce paragraphe soit

$P(t) = \sum_{n=1}^{t} P_n$	les primes de marché accumulées au temps t
$H_{\varepsilon(t,u)}[S(t)]$	la prime de solvabilité au temps t

Lorsque la prime de marché est strictement inférieure à la prime de solvabilité, c'est-à-dire si

$$P(t) < H_{\varepsilon(t,u)}[S(t)] \tag{4.1}$$

on dit qu'il y a *risque de non-solvabilité* ou *risque d'instabilité financière*. Comme la fonction essentielle de la réassurance consiste à couvrir de tels risques, on en conclut qu'il y a *besoin en réassurance* (voir *Gerber* [1979], p. 80). Pour décrire le mécanisme de la réassurance, notons

$Z(t)$	les prestations de réassurance accumulées au temps t
$P^R(t) = H^R[Z(t)]$	les primes de réassurance accumulées au temps t
$H^R[\cdot]$	un principe de calculation des primes pour la réassurance
$P^N(t)$	les primes nettes, ou les primes accumulées après réassurance
$S^N(t) = S(t) - Z(t)$	les prestations aléatoires nettes après réassurance

Dans un contexte solvabilité/réassurance, le *problème principal* de la réassurance consiste à trouver des formes de réassurance adéquates telles que, après réassurance, les primes nettes de l'assureur ne soient pas inférieures à la prime de solvabilité correspondante:

$$P^N(t) = P(t) - P^R(t) \geq H_{\varepsilon(t,u)}[S^N(t)] \tag{4.2}$$

Souvent il est désirable d'avoir aussi peu de réassurance que possible. C'est pourquoi on essaie de satisfaire l'égalité dans (4.2). Dans ce cas, les primes de marché, de solvabilité et de réassurance sont liés mutuellement et implicitement par le système d'équations suivantes:

$$P^N(t) = H_{\varepsilon(t,u)}[S^N(t)] \tag{4.3}$$

$$P(t) = P^N(t) + H^R[Z(t)] \tag{4.4}$$

On remarque que les pleins de conservation $P^N(t)$ «optimaux» sont points fixes de l'équation de solvabilité (4.3). Par le biais de l'égalité (4.4), la prime de marché, la prime nette et la prime de réassurance sont directement liées.
Nous allons montrer que sous certaines conditions le système de solvabilité (4.3), (4.4) possède toujours une solution. Pour plus de clarté nous supposons le temps t fixé et omettons cet indice dans les notations. De plus $\varepsilon(t,u)$ est simplement noté ε. Les primes stop-loss nettes de priorité d sont notées $SL(d) = E[(X-d)_+]$.
D'un point de vue pratique on peut restreindre la discussion à des primes de marché définies comme suit:

$$\begin{cases} P & = (1+\Theta)E[S] \\ P^N & \geq (1+\Theta)E[S^N] \\ H^R[Z] & = (1+\Theta_R)E[Z] \end{cases} \tag{4.5}$$

où Θ, Θ_R sont les marges de sécurité de l'assureur et du réassureur respectivement. Dans cette situation, on voit immédiatement que l'équation (4.4) peut être résolue seulement si

$$\Theta_R \leq \Theta \tag{4.6}$$

Cela signifie que le réassureur couvre le risque à un prix moindre ou égal au prix de marché de l'assureur. Le résultat ci-dessous montre que le système de solvabilité (4.3), (4.4), (4.5) est résolu pour une réassurance stop-loss avec limitation des prestations au montant $L_\varepsilon - u - P^N$ avec $L_\varepsilon = \check{F}(1-\varepsilon)$. Une solution pour les ressources financières $u + P^N$ existe toujours lorsque $\Theta_R \leq \Theta$. Une condition supplémentaire sur Θ_R identifie le plein de conservation P^N de façon unique.

Théorème 1. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$S \geq 0 \tag{C1}$$

$$u + P < L_\varepsilon = \check{F}(1-\varepsilon) \tag{C2}$$

$$\Theta_R \leq \Theta \tag{C3}$$

Alors le système de solvabilité

$$P^N = H_\varepsilon[S^N] \tag{4.7}$$

$$P = P^N + H^R[Z] \tag{4.8}$$

possède la solution

$$Z = (S - x^N)_+ - (S - L_\varepsilon)_+ \tag{4.9}$$

où $x^N = u + P^N$ est zéro de la fonction

$$g(x^N) = u + P + (1+\Theta_R)SL(L_\varepsilon) - x^N - (1+\Theta_R)SL(x^N) \qquad (4.10)$$

De plus, si la marge de sécurité du réassureur satisfait la condition

$$\Theta_R < \min\{\Theta\,,\ 2(\Theta/k) - 1\,,\ F(\mu)/(1-F(\mu))\} \qquad (4.11)$$

où $k = \sigma/\mu$ est le coefficient de variation du risque S, alors $x^N \varepsilon [\mu, L_\varepsilon]$ existe de façon unique.

Démonstration. La preuve comprend trois parties, notées (A), (B), (C).
(A) Montrons d'abord que $Z = (S - x^N)_+ - (S - L_\varepsilon)_+$ est solution de l'équation (4.7).
La fonction de répartition de la variable aléatoire $S^N = S - Z = \min\{S, x^N\} + (S - L_\varepsilon)_+$ est donnée par

$$F^N(X) = \begin{cases} F(x)\,, & x < x^N \\ F(x - x^N + L_\varepsilon)\,, & x \geq x^N \end{cases}$$

Par définition de la limite L_ε on a $F^N(x^N) = F(L_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$. On en déduit que

$$P^N = x^N - u = \check{F}^N(1-\varepsilon) - u = H_\varepsilon[S^N]$$

Ainsi (4.7) est satisfait.
(B) L'équation (4.8), équivalente à la condition $g(x^N) = 0$, possède toujours une solution x^N dans l'intervalle $[0, L_\varepsilon]$.
Comme $SL(0) = \mu$ (condition (C1)) et $\Theta_R \leq \Theta$ (condition (C3)), on a

$$g(0) = u + (1+\Theta_R)SL(L_\varepsilon) + P - (1+\Theta_R)\mu \geq u + (1+\Theta_R)SL(L_\varepsilon) \geq 0$$

D'autre part on a d'après (C2)

$$g(L_\varepsilon) = u + P - L_\varepsilon < 0$$

Puisque $g(x^N)$ est continue, l'affirmation suit immédiatement.
(C) Sous la condition (4.11) l'équation $g(x^N) = 0$ possède une solution unique dans l'intervalle $[\mu, L_\varepsilon]$.

D'après l'inégalité de *Bowers* (1969), on a $SL(\mu) \leq \sigma/2$. On obtient

$$\begin{aligned} g(\mu) &= u + (1+\Theta)\mu + (1+\Theta_R)SL(L_\varepsilon) - \mu - (1+\Theta_R)SL(\mu) \\ &\geq u + (1+\Theta_R)SL(L_\varepsilon) + \mu[\Theta - (1/2)(1+\Theta_R)k] > 0 \end{aligned}$$

D'autre part, pour $x^N \varepsilon [\mu, L_\varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned} g'(x^N) &= -1 - (1+\Theta_R)SL'(x^N) = -1 + (1+\Theta_R)(1-F(x^N)) \\ &\leq -1 + (1+\Theta_R)(1-F(\mu)) < 0 \end{aligned}$$

Etant donné que $g(\mu) > 0$, $g(L_\varepsilon) < 0$, et $g(x^N)$ est monotone décroissante sur l'intervalle $[\mu, L_\varepsilon]$, l'affirmation (C) est vérifiée.

Remarque. En général une *réassurance stop-loss «pure»* $Z = (S - x^N)$ n'est pas solution du systeme de solvabilité (4.3), (4.4). Ce fait se vérifie comme suit. Soit $x^N = u + P^N$ point fixe de l'équation $x^N = u + P - H^R[(S - x^N)_+]$ et supposons que $\varepsilon < 1 - F(x^N-)$. La variable aléatoire $S^N = S - Z = min\{S, x^N\}$ possède la fonction de répartition

$$F^N(x) := \Pr(S^N \leq x) = \begin{cases} F(x)\,, & x < x^N \\ 1\,, & x \geq x^N \end{cases} \tag{4.12}$$

Par conséquent on a

$$x^N = \breve{F}^N(1) = \min\{x : F^N(x) \geq 1\} > \breve{F}^N(1-\varepsilon) \quad \text{d'où} \tag{4.13}$$

$$P^N = x^N - u > \breve{F}^N(1-\varepsilon) - u = H_\varepsilon[S^N] \tag{4.14}$$

Dans ce cas l'équation (4.7) n'est satisfaite qu'à la limite où le niveau de solvabilité ε tend vers zéro.

5. Méthode basée sur l'inégalité de Bowers

Dans un contexte statistique moyenne-variance, il est possible de définir d'autres primes de solvabilité, libres d'hypothèse sur la fonction de répartition des prestations d'assurance. Dans un sens bien précis, et comparativement à la méthode de Tchebychev, cette méthode produit une alternative digne d'être retenue.
Dans ce paragraphe nous supposons à nouveau le temps t fixé et omettons cet indice dans les notations. Sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ considérons la fonction réelle de la variable x

$$SL^B(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\sigma^2 + (x-\mu)^2} - (x-\mu)) \tag{5.1}$$

Rappelons que l'*inégalité de Bowers* (1969) fournit le maximum de la prime stop-loss nette, prise sur toutes les variables aléatoires S de moyenne μ et d'écart-type σ, soit

$$\max E[(S - x)_+)] \le SL^B(x) \tag{5.2}$$

où l'égalité est atteinte pour une variable diatomique. Pour une démonstration de l'inégalité (5.2), on peut consulter *Heilmann* (1987), (6.10), p. 177, la preuve étant valable sans la restriction $x \ge \mu$.
Considérons la fonction de répartition continue sur $(-\infty, \infty)$

$$F^B(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x - \mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}}\right) \tag{5.3}$$

Comme on a

$$\frac{dSL^B(x)}{dx} = -(1 - F^B(x)) \tag{5.4}$$

la prime stop-loss nette associée à $F^B(x)$ est également égale au maximum $SL^B(x)$. Il suit que $F^B(x)$ *domine* quant à la *relation d'ordre stop-loss* toutes les fonctions de répartition de moyenne μ et d'écart-type σ (voir *Goovaerts* et al. [1990], p. 22, pour une définition de cette relation d'ordre).

Remarque. La densité de probabilité associée à $F^B(x)$ est donnée par

$$f^B(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + (x-\mu)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{5.5}$$

Si X est une variable aléatoire de densité $f^B(x)$, alors la variable standardisée $Z = (X - \mu)/\sigma$ possède la densité de probabilité

$$f_Z^B(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z \in (-\infty, \infty) \tag{5.6}$$

fonction étroitement liée à un cas spécial de la densité de Fisher-Snedecor (voir p. ex. *Müller* [1991], p. 127).
Si l'on considère seulement l'espérance mathématique d'une réassurance stop-loss, et si l'on se place dans un contexte moyenne-variance, alors $F^B(x)$ constitue la

fonction de répartition la plus «dangereuse» du point de vue d'une réassurance stop-loss. Dans cette situation, il s'avère judicieux de considérer une *prime de solvabilité de Bowers*, de niveau de solvabilité ε, définie et notée par

$$H_\varepsilon^B[S] = \check{F}^B(1-\varepsilon) - u = \mu + \frac{1}{2}\frac{1-2\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\sigma - u\,. \tag{5.7}$$

Comparé à la prime de solvabilité de Tchebychev, pour un même niveau de solvabilité ε, le facteur proportionnel à σ est réduit approximativement de moité. Pour être utile, il est nécessaire de s'assurer que la prime de Bowers est plus grande ou égale à la prime de solvabilité définie par (3.4). Si $F^B(x)$ *domine stochastiquement* $F(x)$, c'est-à-dire $F(x) \geq F^B(x)$ pour tout x, cela est vrai de façon évidente. Si $F^B(x)$ est *plus dangereuse* que $F(x)$, c'est-à-dire s'il existe x_0 tel que

$$\begin{cases} F(x) \leq F^B(x)\,, & \text{pour} \quad x < x_0 \\ F(x) \geq F^B(x)\,, & \text{pour} \quad x \geq x_0 \end{cases} \tag{5.8}$$

cela est encore vrai pour autant que le niveau de solvabilité est suffisamment petit, soit

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{z_0}{2+z_0}}\right), \quad z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma\,. \tag{5.9}$$

On notera que (5.9) est la résolution de la condition $\check{F}^B(1-\varepsilon) \geq x_0$. Les deux conditions ci-dessus ne sont que trop rarement satisfaites. Comme condition suffisante plus faible, il suffit de trouver x_0 tel que

$$F(x) \geq F^B(x) \quad \text{pour} \quad x \geq x_0 \tag{5.10}$$

Cela signifie que la queue de la fonction de répartition $F(x)$ décroît plus rapidement que celle de $F^B(x)$. Dans ce cas $H_\varepsilon^B[S] \geq H_\varepsilon[S]$ pour autant que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ comme dans (5.9). Pour des fonctions de répartition données, il est possible de vérifier (5.10) en appliquant des méthodes analytiques ou numériques. Un critère probabiliste plus général s'obtient à l'aide de l'inégalité de *Nagaëv* (1965) (p. ex. *Müller* [1991], p. 509). Cette inégalité est un des nombreux résultats sur la convergence concernant le «théorème central limite». Elle nous dit que l'erreur d'approximation, lorsque l'argument croît, dépend de la variance et du troisième moment de la fonction de répartition. Dans la suite nous supposons que ces caractéristiques existent pour la fonction $F(x)$.

Lemme. Supposons que la condition suivante soit satisfaite:

$$N(z) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) + K\frac{E|S|^3}{\sigma^3(1+|z|^3)}\,, \text{ où } z = (x-\mu)/\sigma\,, \quad (5.11)$$

$K < 30.52$,

$N(\cdot)$ la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite,

Alors on a $F(\mu + \sigma z) \geq F^B(\mu + \sigma z)$.

Démonstration. Posons $C = K \cdot E|S|^3/\sigma^3$. L'inégalité (5.11) s'écrit aussi

$$F^B(\mu + \sigma z) \leq N(z) - \frac{C}{1+|z|^3}$$

Or, d'après l'inégalité de Nagaëv, on a, quel que soit z,

$$N(z) - \frac{C}{1+|z|^3} \leq F(\mu+\sigma z) \leq N(z) + \frac{C}{1+|z|^3}$$

Il suit que (5.11) implique $F^B(\mu + \sigma z) \leq F(\mu + \sigma z)$.
Nous montrons que l'inégalité (5.11) est toujours satisfaite pour z suffisamment grand, a fortiori (5.10) l'est aussi. De plus il est possible d'obtenir une borne effective $z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma$ en termes du coefficient de variation, de l'asymétrie et de la constante K.

Proposition. Soit $k = \sigma/\mu$ le coefficient de variation et $\gamma = E[(S-\mu)^3]/\sigma^3$ l'asymétrie d'un risque non-négatif $S \geq 0$. Soit encore la fonction

$$h(z) = z^3\left(1 - \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) - \frac{2z^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (5.12)$$

et supposons que $z_0 \geq \sqrt{2}$ soit tel que

$$(61.04) \cdot \left\{\frac{1}{k^3} + \frac{3}{k} + \gamma\right\} \leq h(z_0) \quad (5.13)$$

Alors on a

$$F(\mu + \sigma z) \geq F^B(\mu + \sigma z) \quad \text{pour} \quad z \geq z_0 \quad (5.14)$$

Démonstration. Soit z positif. La substitution $t = (1/2)x^2$ fournit l'égalité

$$N(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2}z^2}^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{2t}} dt$$

Comme $\sqrt{2}t \geq z$, on a l'inégalité

$$\int_{\frac{1}{2}z^2}^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{2t}} dt \leq \frac{1}{z} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

d'où

$$N(z) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Ainsi, au lieu de (5.11), il suffit de satisfaire l'inégalité plus forte

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-\frac{1}{2}z^2} \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) + K\frac{E[S^3]}{\sigma^3(1+z^3)}$$

ou encore

$$2K \cdot E[S^3]/\sigma^3 \leq h(z) \tag{5.15}$$

Or, on a

$$h'(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{3(1+z^2)^{\frac{3}{2}} - z(4+3z^2)\} + \frac{2z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}(z^2-2)$$

Lorsque z est positif, le premier terme entre parenthèse est toujours positif Le second terme est non-négatif sous l'hypothèse $z \geq \sqrt{2}$. Par conséquent $h(z)$ est monotone croissante. Le résultat suit tenant compte de la relation $E[S^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 + \gamma\sigma^3$ et du fait que $K < 30.52$.
Dans la suite posons

$$L_\varepsilon^B = \mu + \frac{1}{2}\frac{1-2\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\sigma \tag{5.16}$$

Un calcul immédiat montre que

$$SL^B(L_\varepsilon^B) = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tag{5.17}$$

Par S^B on dénote une variable aléatoire de moyenne $\mu = E[S]$, de variance $\sigma^2 = \text{Var}[S]$, et de fonction de répartition $F^B(x)$ définie par (5.3). Par définition de la prime de solvabilité de Bowers dans (5.7), on a les relations

$$H_\varepsilon[S^B] = H_\varepsilon^B[S] = \breve{F}^B(1-\varepsilon) - u = L_\varepsilon^B - u \tag{5.18}$$

En vertu de la propriété de monotonicité d'une prime stop-loss, le critère de stabilité pour la prime de marché P, soit

$$u + P \geq u + H_\varepsilon^B[S] = L_\varepsilon^B \tag{5.19}$$

est équivalent au critère stop-loss

$$SL^B(u+P) \leq SL^B(L_\varepsilon^B) = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tag{5.20}$$

Une décision basée sur (5.20) a l'avantage d'être exprimée à l'aide d'une mesure financière quantifiable. Par exemple, on a $SL^B(L_{0.01}^B) \approx 0.05\sigma$, $SL^B(L_{0.001}^B) \approx 0.016\sigma$.
Il est possible maintenant de considérer un système de solvabilité du type (4.3), (4.4) modifié tel que l'assureur et le réassureur évaluent le risque selon la fonction de répartition $F^B(x)$, et tel que la prime nette après réassurance est stable quel que soit la fonction de répartition $F(x)$ du risque de moyenne μ et d'écart-type σ. La solution explicite de ce système de solvabilité dépend en plus de μ et σ du niveau de solvabilité et de la marge de sécurité du réassureur.
Pour une formulation précise, notons Z^B les prestations de réassurance et $S^{N,B} = S^B - Z^B$ les prestations nettes après réassurance, où les deux quantités aléatoires sont évaluées à l'aide de $F^B(x)$. Les primes nettes après réassurance sont définies et notées par $P^{N,B} = H_\varepsilon[S^{N,B}] = H_\varepsilon^B[S^N]$ et dépendent de $F^B(x)$.

Théorème 2. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites:
(C1) La prime de marché de l'assureur ne satisfait pas le critère stop-loss, c'est-à-dire

$$SL^B(u+P) > \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

(C2) $\Theta_R \leq \Theta$

(C3) La prime de marché du réassureur est donnée par $H^R[Z] = (1+\Theta_R)E^B[Z] = (1+\Theta_R)E[Z^B]$, où $E^B[\cdot]$ dénote l'espérance mathématique évaluée par rapport à $F^B(x)$.

(C4) La distribution de Bowers domine de façon stochastique partielle la distribution du risque à couvrir, c'est-à-dire il existe x_0 tel que $F(x) \geq F^B(x)$ pour $x \geq x_0$.

(C5) Le niveau de solvabilité est suffisamment petit, c'est-à-dire on a

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{z_0}{2+z_0}}\right), \quad z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma$$

Alors le système de solvabilité

$$p^{N,B} = H_\varepsilon[S^{N,B}] \geq H_\varepsilon[S^N] \tag{5.21}$$
$$P = P^{N,B} + H^R[Z] \tag{5.22}$$

possède la solution de réassurance $Z = (S - x^{N,B})_+ - (S - L_\varepsilon^B)_+$, où $x^{N,B} = u + P^{N,B}$ est défini de façon unique comme suit:
1^er^ cas: $\Theta_R = 0$

$$x^{N,B} = x^* - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma^2}{x^* - \mu}\right), \quad x^* = u + P + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tag{5.23}$$

2^e^ cas: $\Theta_R > 0$

$$X^{N,B} = \mu + \frac{1}{2}\left\{ -\left(\frac{1-\Theta_R}{\Theta_R}\right)x^* + (1+\Theta_R)\sqrt{x^{*2} - \Theta_R\sigma^2}\right\} \tag{5.24}$$
$$x^* = u + P - \mu + \frac{1}{2}(1+\Theta_R)\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

Démonstration. La preuve comprend trois parties notées (A), (B), (C).
(A) Montrons d'abord que $P^{N,B} = H_\varepsilon^B[S^N]$ se laisse satisfaire. Par définition de Z^B on a $Z^B = (S^B - x^{N,B})_+ - (S^B - L_\varepsilon^B)_+$. La fonction de répartition de la variable aléatoire $S^{N,B} = S^B - Z^B = \min\{S^B, x^{N,B}\} + (S^B - L_\varepsilon^B)_+$ est donnée par

$$F^{N,B}(x) = \begin{cases} F^B(x), & x < x^{N,B} \\ F^B(x - x^{N,B} + L_\varepsilon^B), & x \geq x^{N,B} \end{cases}$$

Par définition de la limite L_ε^B, on a $F^{N,B}(x^{N,B}) = F^B(L_\varepsilon^B) = 1 - \varepsilon$. Par conséquent on obtient

$$P^{N,B} = x^{N,B} - u = \check{F}^{N,B}(1-\varepsilon) - u = H_\varepsilon[S^{N,B}]$$

(B) Montrons que les primes nettes sont stables, c'est-à-dire $P^{N,B} \geq H_\varepsilon[S^N]$. On sait que la variable aléatoire $S^N = S - Z = \min\{S, x^{N,B}\} + (S - L_\varepsilon^B)_+$ possède la fonction de répartition

$$F^N(x) = \begin{cases} F(x)\,, & x < x^{N,B} \\ F(x - x^{N,B} + L_\varepsilon^B)\,, & x \geq x^{N,B} \end{cases}$$

d'où $F^N(x^{N,B}) = F(L_\varepsilon^B)$. Comme remarqué après (5.9), la condition (C5) implique que $\check{F}^B(1-\varepsilon) = L_\varepsilon^B \geq x_0$. Il suit que

$$F^N(X^{N,B}) = F(L_\varepsilon^B) \geq F^B(L_\varepsilon^B) = 1 - \varepsilon$$

ce qui implique $x^{N,B} \geq \check{F}^N(1-\varepsilon)$. Par conséquent on a

$$P^{N,B} = x^{N,B} - u \geq \check{F}^N(1-\varepsilon) - u = H_\varepsilon[S^N]$$

(C) Il reste à résoudre (5.22) par rapport à $P^{N,B}$ sous la condition (C3). Posons $x = u + P$. Alors (5.21) est équivalent à

$$x + (1+\Theta_R)SL^B(L_\varepsilon^B) = x^{N,B} + (1+\Theta_R)SL^B(x^{N,B}) \tag{5.25}$$

Un calcul montre qu'il faut résoudre l'équation quadratique

$$\begin{aligned} &4\Theta_R(x^{N,B} - \mu)^2 + 4z(1-\Theta_R)(x^{N,B} - \mu) + (1+\Theta_R)^2\sigma^2 - 4z^2 = 0\,, \\ &\text{avec} \quad z = x - \mu + \frac{1}{2}(1+\Theta_R)\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Les solutions (5.23) et (5.24) sont immédiates.

Remarques

(i) Il est intéressant de noter que la solution (5.23) possède également une inteprétation dans le cadre des *modèles d'analyse financière du risque* considérés dans *Hürlimann* (1991a/91b).

Ainsi lorsque $\Theta_R = 0$, $\varepsilon = 0$, la prime stop-loss $SL^B(x^{N,B}) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma^2}{u+P-\mu}\right)$ correspond à la formule (4.12) dans *Hürlimann* [1991a]).

(ii) Lorsque $\sigma = 0$, c'est-à-dire S est sans risque, on obtient de (5.23) et (5.24) que $P^{N,B} = P$, comme il se doit.

(iii) Les primes nettes après réassurance satisfont la condition de marché suivante

$$P^{N,B} \geq (1+\Theta)E[S^{N,B}] = (1+\Theta)E^B[S^N] \tag{5.27}$$

En effet, puisque $E[S^B] = E[S]$ (utiliser la forme centrée réduite (5.6) de la densité de Bowers), on voit que

$$\begin{aligned} P^{N,B} &= P - H^R[Z] = (1+\Theta)E[S^B] - (1+\Theta_R)E[Z^B] \\ &= (1+\Theta)E[S^{N,B}] + (\Theta - \Theta_R)E[Z^B] \end{aligned}$$

d'où (5.27) par la condition (C2). Cela signifie que les primes nettes après réassurance sont compatibles avec un principe de calculation des primes de l'assureur, où celui-ci évalue le risque relativement à la mesure de Bowers et opère avec la marge de sécurité initiale.

(iv) Il est important de noter que les solutions de réassurance analysées dans ce travail ne résolvent en aucun cas de façon unique le problème de la couverture du risque de nonsolvabilité. A ce sujet mentionnons qu'il est possible d'imaginer d'autres contrats de réassurance capables de couvrir ce risque, comme suggéré récemment par *Amsler* (1991). Outre la probabilité de l'événement et l'effet du temps, il s'avère judicieux de considérer aussi le montant de la ruine pour définir une mesure adéquate du risque de ruine comme dans *Amsler* (1992). L'inclusion de cet élément dans la modélisation et son effet méritent d'être examinés.

Remerciements

Je remercie sincèrement le rapporteur pour quelques corrections et des suggestions valables, qui ont contribuées à améliorer les résultats obtenus.

Bibliographie

Amsler M.-H. (1991): Réassurance du risque de ruine. Bulletin de l'Association suisse des Actuaires, no. 1, 33–49.

Amsler M.-H. (1992): Risque de décès et risque de ruine. Réflexions sur la mesure du risque de ruine. ASTIN-Bulletin 22, no. 1, 107–119.

Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. (1984): Risk Theory – The Stochastic Basis of Insurance (3è édition). Chapman and Hall.

Bowers N.L. (1969): An upper bound for the net stop-loss premium: Transactions of the Society of Actuaries XIX, 211–216.

Feilmeier M., Bertram J. (1987): Anwendung numerischer Methoden in der Risikotheorie. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 16. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

Gerber H.U. (1979): An Introduction to Mathematical Risk Theory. Huebner Foundation, Irwin.

Gerber H.U. (1986): Lebensversicherungsmathematik. Springer-Verlag, Berlin

Gnedenko B.W. (1991): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Akademie Verlag, Berlin.

Goovaerts M.J., De Vylder F., Haezendonck J. (1984): Insurance Premiums. North-Holland, Amsterdam.

Goovaerts M.J., Kaas R., Van Heerwaarden A.E., Bauwelinckx T. (1990): Effective Actuarial Methods, Insurance Series, vol. 3, North-Holland, Amsterdam.

Heilmann W.-R. (1987): Grundbegriffe der Risikotheorie. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

Hertel A. (1984): Die Solvabilität deutscher Lebensversicherungsunternehmen. Europäische Hochschulschriften, vol. 514. Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main.

Hürlimann W. (1988): Simple risk forecasts using credibility. Insurance: Mathematics and Economics 7, 251–259.

Hürlimann W. (1991a): A stochastic dynamic valuation model for investment risks. Proceedings 2nd AFIR Colloquium, Brighton, vol. 3, 131–143.

Hürlimann W. (1991b): Absicherung des Anlagerisikos, Diskontierung der Passiven und Portfoliotheorie. Bulletin de l'Association suisse des Actuaires, no. 2, 217–250.

Müller P.H. (1991): Lexikon der Stochastik (5e édition), Akademie Verlag, Berlin.

Pesonen E. (1986): Zum Begriff der Solvenz. Bulletin de l'Association suisse des Actuaires, no. 1, 43–53.

Werner Hürlimann
Allgemeine Mathematik
Winterthur-Leben
Paulstrasse 9
8401 Winterthur

Résumé

Nous analysons le modèle de solvabilité en temps discret qui se base sur le critère de stabilité. A l'aide de l'approximation de Tchebychev, on montre qu'un choix «acceptable» du niveau de solvabilité dépend du temps. La notion de prime de solvabilité, déduit du principe percentile de calculation des primes, fournit un critère de décision pour une réassurance éventuelle du risque de non-solvabilité et un système d'équations à résoudre en cas de réassurance. On montre qu'en général la réassurance stop-loss n'est une solution faisable qu'à la limite où le niveau de solvabilité tend vers zéro. Pour un niveau de solvabilité donné, on montre qu'une réassurance stop-loss avec limitation des prestations de réassurance est solution faisable sous des conditions bien déterminées. Par application de l'inégalité de Bowers et de la relation d'ordre stop-loss, le niveau de solvabilité est exprimé en terme d'équivalent économique, ce qui peut être utile pour les décisions pratiques. Dans un contexte moyenne-variance, cette dernière méthode permet d'évaluer les pleins de conservation de l'assureur en ayant recour à des hypothèses restreintes sur la fonction de répartition des prestations.

Zusammenfassung

Wir untersuchen das Solvabilitätsmodell, das auf dem Stabilitätskriterium basiert. Anhand der Approximation von Tchebycheff wird gezeigt, dass eine „annehmbare" Wahl des Solvabilitätsniveaus von der Zeit abhängt. Der Begriff der Solvabilitätsprämie, der von einem Quantilprämienprinzip abgeleitet wird, liefert ein Entscheidungskriterium für eine mögliche Rückversicherung des Solvabilitätsrisikos und ein Gleichungssystem, das im Fall einer Rückversicherung zu lösen ist. Im allgemeinen ist die Stop-Loss-Rückversicherung nur dann eine mögliche Lösung, falls das Solvabilitätsniveau gegen Null strebt. Für ein gegebenes Solvabilitätsniveau, und unter wohlbestimmten Bedingungen, ist eine Stop-Loss-Rückversicherung mit begrenzten Leistungen eine Lösung des Solvabilitätsmodells. Durch Anwendung der Ungleichung von Bowers und der Stop-Loss-Ordnungsrelation wird das Solvabilitätsniveau mit Hilfe eines ökonomischen Äquivalents ausgedrückt, was für praktische Entscheidungen nützlich sein kann. In einer Erwartungswert/Varianz-Umgebung kann anhand dieser Methode und, falls gewisse technische Bedingungen erfüllt sind, der Selbstbehalt des Erstversicherers verteilungsfrei bestimmt werden.

Summary

We analyze the solvability model in discrete time, which is based on the stability criterion. Using Tchebychev's approximation it is shown that an "acceptable" choice of the solvability level depends upon time. The notion of solvability premium, which is derived from the percentile premium calculation principle, yields a decision criterion for an eventual reinsurance of the risk of non-solvability and a system of equations to be solved in case of reinsurance. In general a stop-loss reinsurance is a feasible solution only as limiting case when the solvability level goes to zero. For a given solvability level, and under certain conditions, a stop-loss reinsurance with a limited payment liability is a solution to the solvability equations. Through application of the inequality of Bowers and the stop-loss order relation one expresses the solvability level in terms of an economic equivalent, which can be useful for practical decisions. In a mean-variance framework, and provided some technical conditions are fulfilled, this last method allows to evaluate in a distribution-free manner the retention of the first insurer.