

Note sur la restitution de prime d'une rente viagère

Autor(en): **Chuard, Philippe**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): - **(1995)**

Heft 1

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967265>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PHILIPPE CHUARD, Pully

Note sur la restitution de prime d'une rente viagère

1 Préambule

Un problème actuariel résolu depuis longtemps peut-il encore susciter des remarques nouvelles? Les développements qui suivent voudraient l'affirmer. Ils se rapportent à la restitution de prime au décès pour les rentes viagères dont les termes sont payés par fractions. Pour nous en tenir à l'essentiel, mais sans empêcher une extension, nous n'examinons que la rente viagère immédiate payable postnumerando.

Dans le cas envisagé la valeur actuelle de la restitution est celle d'une assurance temporaire décroissant linéairement chaque fraction d'année. Cette valeur actuelle est comprise dans la prime de la rente. Pour en simplifier le calcul on remplace la décroissance exacte par une décroissance annuelle fictive. Le procédé adopté a pour effet que chaque année la restitution fictive est égale à la moyenne des restitutions exactes. Or il n'en va pas de même à la fin de la durée de restitution et c'est à cette question qu'est destinée la présente étude.

2 Restitution exacte

2.1 Durée

Soit E la prime unique brute d'une rente viagère immédiate dont les termes sont payables par fractions de $\frac{1}{m}$ d'année et pour laquelle est prévue, lors du décès, la restitution de la prime sous déduction des arrérages versés. Désignons par j la durée pendant laquelle une restitution peut avoir lieu. Cette durée est un multiple de $\frac{1}{m}$. On peut donc écrire

$$mE \leq mj < mE + 1 \quad \text{avec } E \in \mathbb{R}^+ \text{ et } mj \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

2.2 Montant

Soit $R(t; p)$ le montant de la restitution qui est versé si le décès a lieu pendant la fraction de rang p de l'année de rang t . A ce moment le nombre de fractions

de rente payées s'élève à $(t - 1)m + p - 1$ et l'on peut écrire

$$R(t; p) = E - t + \frac{m - p + 1}{m}. \quad (2)$$

Il sera utile dans la suite de connaître le montant annuel moyen de la restitution pour l'année de rang t durant laquelle le décès survient lors de l'une des p premières fractions. C'est

$$\bar{R}(t; p) = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^p R(t; q)$$

qui devient, après développement,

$$\bar{R}(t; p) = \frac{p}{m} \left(E - t + \frac{2m - p + 1}{2m} \right). \quad (3)$$

Le montant annuel moyen de la restitution pour l'année de rang t durant laquelle survient le décès s'obtient en donnant à p la valeur m dans (3). On a ainsi

$$\bar{R}(t) = E - t + \frac{m + 1}{2m}. \quad (4)$$

3 Restitution fictive

La valeur actuelle de la restitution doit être comprise dans la prime. Mais le calcul de cette valeur est compliqué quand, les termes de rente étant payés par fractions, il faut tenir compte de la durée j définie par (1) et du montant $R(t; p)$ défini par (2). C'est pourquoi, lorsque des tarifs de rentes viagères avec restitution de prime au décès ont été introduits, on a eu l'idée de remplacer, pour les calculs, la restitution exacte, décroissant chaque fraction d'année, par une restitution fictive à décroissance annuelle.

Désignant par k la durée de la restitution fictive, on la met en relation avec la prime E et le fractionnement m au moyen de

$$k \leq E + \frac{m + 1}{2m} < k + 1 \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

en se référant au schéma de la figure 1. La relation (5) peut être écrite

$$E - \frac{m - 1}{2m} < k \leq E + \frac{m + 1}{2m} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

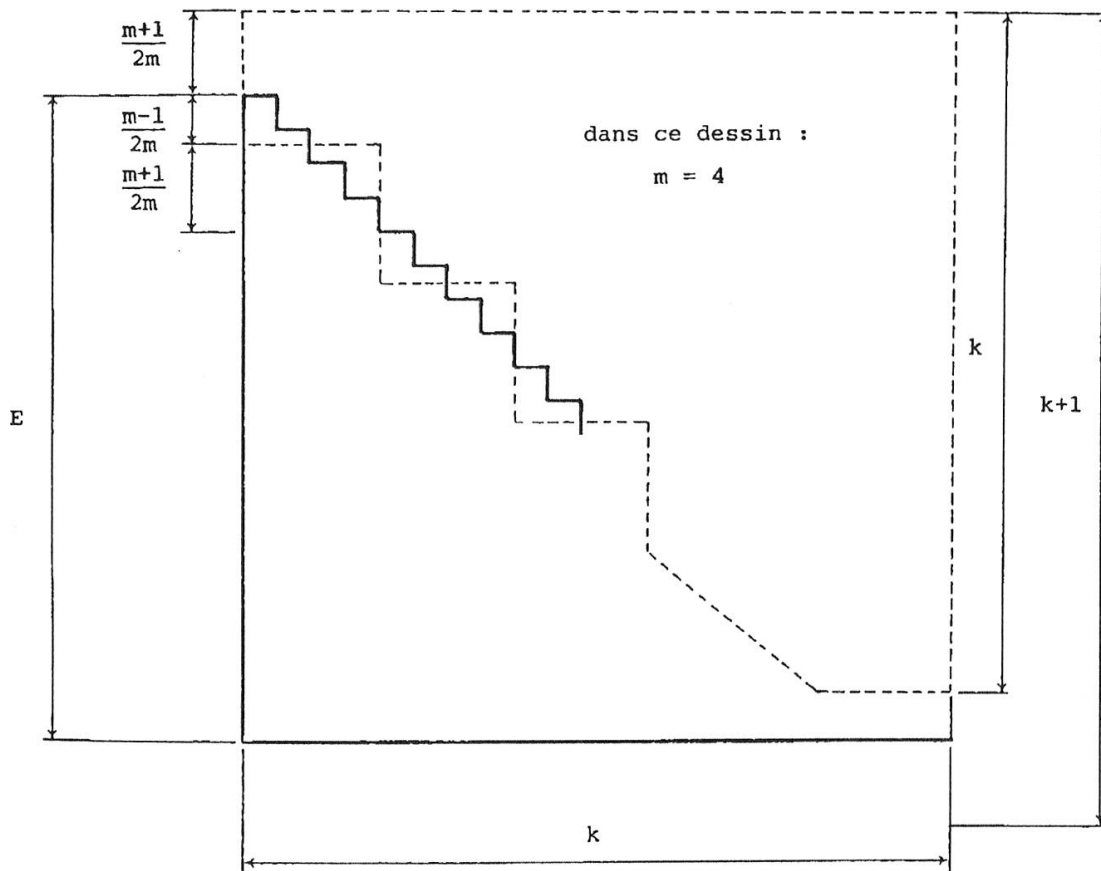


Figure 1

Le montant $R(t)$ de la restitution fictive pendant l'année de rang t est

$$R(t) = E - t + \frac{m+1}{2m}. \quad (7)$$

Ce montant est le même que $\bar{R}(t)$ défini par (4), ce qui justifie le remplacement, pour les calculs, de la restitution exacte par une restitution fictive.

4 Situation à la fin de la restitution

4.1 Primes avec même durée de restitution k

L'égalité des deux montants définis l'un par (4) et l'autre par (7) vaut pour toute la durée de la restitution, mais à l'exception de la dernière année. C'est ce point particulier que nous allons examiner.

Pour un fractionnement m fixé, toutes les rentes dont la prime E est telle que

$$k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \leq E < k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}, \quad (8)$$

relation qui découle de (5), ont la même durée de restitution fictive k . Déterminons les durées exactes de restitution j de ces primes.

La plus petite valeur, selon (8), correspond à $E = k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$; elle est donnée, à partir de (1), par

$$m \left(k - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \leq mj < m \left(k - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Si m est pair, c'est-à-dire que $m = 2g$ avec $g \in \mathbb{N}$,

la relation (9) conduit à $j = k - \frac{1}{2}$.

Si m est impair, c'est-à-dire que $m = 2g - 1$ avec $g \in \mathbb{N}$,

la relation (9) conduit à $j = k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.

Compte tenu de ce que la valeur maximale de j est d'une unité supérieure à la valeur minimale, on a, lorsque la durée de restitution fictive est k ,

$$\text{si } m \text{ est pair,} \quad k - \frac{1}{2} \leq j \leq k + \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$\text{si } m \text{ est impair,} \quad k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \leq j \leq k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}. \quad (11)$$

4.2 Dernière fraction d'année de la durée j

Pour les primes E considérées, qui remplissent les conditions (8), l'année de rang k est celle à la fin de laquelle cesse la restitution fictive. Désignons par z

le rang, pour l'année de rang k , de la fraction d'année à la fin de laquelle cesse la restitution exacte. C'est

$$z = (j + 1 - k)m. \quad (12)$$

Compte tenu de (10) et (11) on obtient

$$\left. \begin{array}{ll} z \text{ minimal} & z \text{ maximal} \\ m \text{ pair} & \frac{m}{2} \quad \frac{3m}{2} \\ m \text{ impair} & \frac{m-1}{2} \quad \frac{3m-1}{2} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Observons que, la durée j de la restitution exacte pouvant être plus grande que la durée k de la restitution fictive, le rang z peut être supérieur à m .

4.3 Reliquat de restitution

L'égalité $\bar{R}(t) = R(t)$ entre les restitutions définies par (3) et (7) n'est pas valable, sauf exception, à partir de l'année de rang k . Il faut alors prendre en compte un reliquat

$$U = \bar{R}(k; z) - R(k). \quad (14)$$

Les relations (3) et (7) permettent d'écrire

$$\bar{R}(k; z) = \left(E - k + 1 - \frac{z-1}{2m} \right) \frac{z}{m} \quad (15)$$

$$R(k) = E - k + \frac{m+1}{2m}. \quad (16)$$

En introduisant (16) dans (15) on obtient

$$\bar{R}(k; z) = \left[R(k) + \frac{m-z}{2m} \right] \frac{z}{m} \quad (17)$$

et le reliquat peut s'écrire

$$U = \left[\frac{z}{2m} - R(k) \right] \left(1 - \frac{z}{m} \right) \quad (18)$$

Pour obtenir cette valeur il faut donc, à partir de E et m , calculer k avec (6), j avec (9), z avec (12) et $R(k)$ avec (16). On arrive au résultat directement par un petit programme de calcul, tel par exemple que le suivant, où $IP(X)$ est la partie entière de X et $FP(X)$, la partie non entière:

$$\begin{aligned}
 U = & (((IP(M \times E) + 1 - IP(1 - FP(M \times E))) \\
 & \div M + 1 - IP(E + (M + 1) \div 2 \div M)) \\
 & \div 2 - E + IP(E + (M + 1) \div 2 \div M) - (M + 1) \\
 & \div 2 \div M) \times (1 - IP(M \times E) + 1 - IP(1 - FP(M \times E))) \\
 & \div M - 1 + IP(E + (M + 1) \div 2 \div M))
 \end{aligned}$$

4.4 Variation de U

Si, dans la définition (6) de k , on augmente E d'un entier N , k est aussi augmenté de N ; la différence $E - k$ n'est alors pas modifiée, de même que $R(k)$ défini par (16). Une observation identique peut être faite au sujet de $E - j$ et de z , j étant défini par (1) et z , par (12). Il en résulte que U ne change pas de valeur si l'on augmente E d'un entier N . Il suffit donc, compte tenu de (5), d'étudier la variation de U dans le domaine

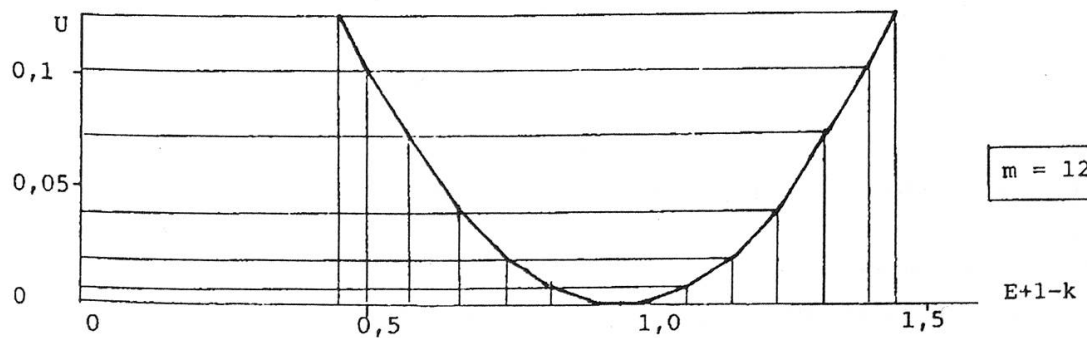
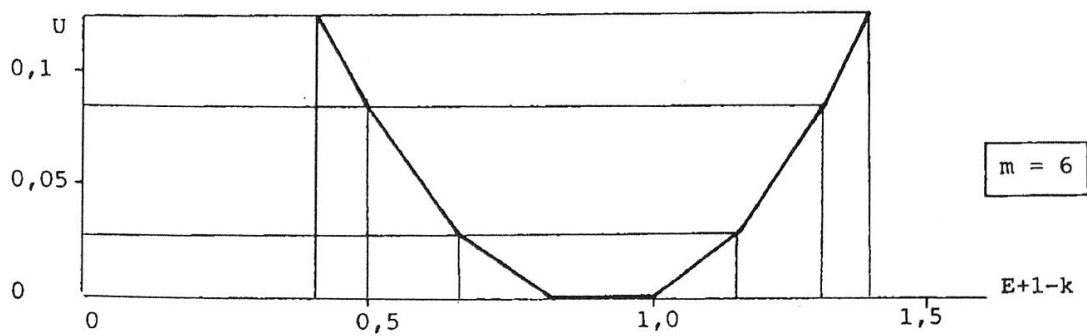
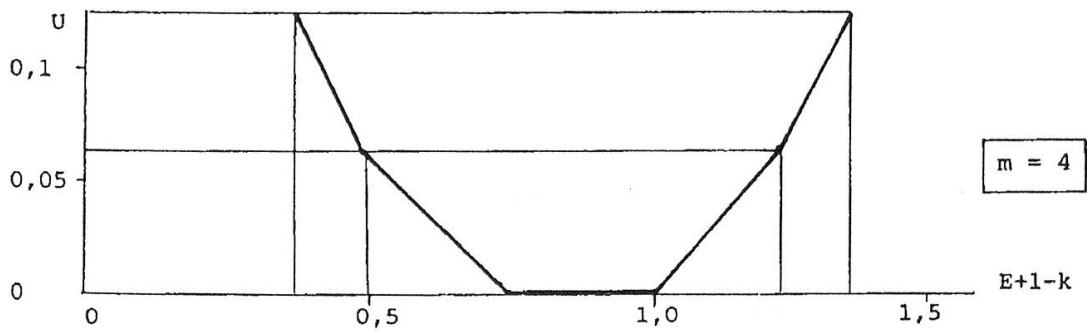
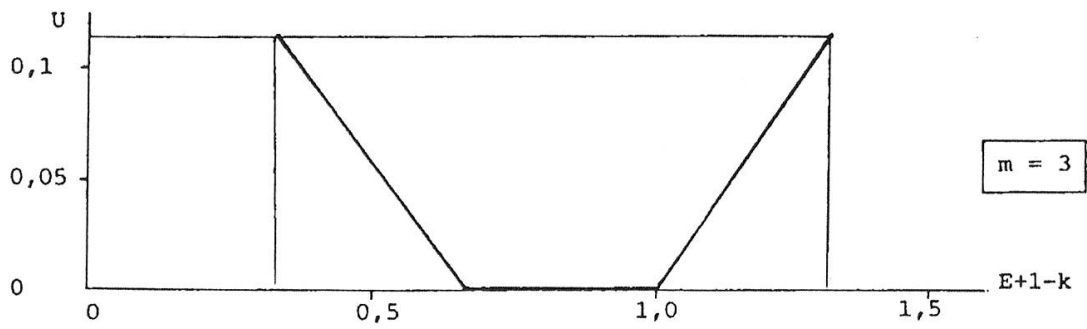
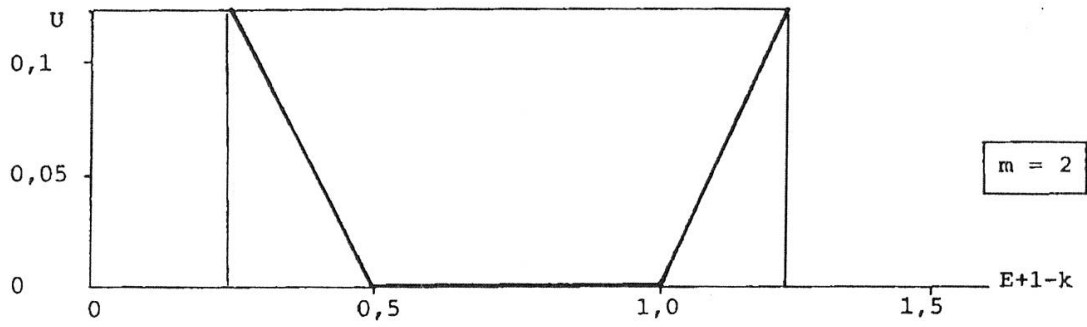
$$\frac{m-1}{2m} \leq E + 1 - k < \frac{m-1}{2m} + 1. \quad (19)$$

Observons que les relations (1) et (12) permettent d'écrire

$$m(E + 1 - k) \leq z < m(E + 1 - k) + 1.$$

Les figures 2 sont construites au moyen des valeurs du reliquat U indiquées dans le tableau qui les suit. Ces valeurs sont calculées, pour quelques fractionnements m , selon les indications qui suivent la formule (18) et dans les limites (19). Les figures illustrent la variation du reliquat U , au sujet duquel on peut faire, en particulier, les constatations suivantes:

- U varie selon une succession de segments linéaires;
- U est nul dans un intervalle de $\frac{1}{m}$ dont la limite supérieure est 1;



Figures 2

m	$E + 1 - k$	z	U
2	1/4	1	0,125
	2/4	1	0
	4/4	2	0
	5/4	3	0,125 *
3	1/3	1	0, <u>1</u>
	2/3	2	0
	3/3	3	0
	4/3	4	0, <u>1</u>
4	3/8	2	0,125
	4/8	2	0,0625
	6/8	3	0
	8/8	4	0
	10/8	5	0,0625
	11/8	6	0,125 *
6	5/12	3	0,125
	6/12	3	0,08 <u>3</u>
	8/12	4	0,02 <u>7</u>
	10/12	5	0
	12/12	6	0
	14/12	7	0,02 <u>7</u>
	16/12	8	0,08 <u>3</u>
17/12	9	0,125 *	
12	11/24	6	0,125
	12/24	6	0,1041 <u>6</u>
	14/24	7	0,069 <u>4</u>
	16/24	8	0,041 <u>6</u>
	18/24	9	0,0208 <u>3</u>
	20/24	10	0,0069 <u>4</u>
	22/24	11	0
	24/24	12	0
	26/24	13	0,0069 <u>4</u>
	28/24	14	0,0208 <u>3</u>
	30/24	15	0,041 <u>6</u>
	32/24	16	0,069 <u>4</u>
34/24	17	0,1041 <u>6</u>	
35/24	18	0,125 *	

* valeur limite pour $E + 1 - k \rightarrow \frac{3m-1}{2m}$

- le maximum de U correspond à $E + 1 - k = \frac{m-1}{2m}$; dans ce cas, selon (16), $R(k) = 0$ et, selon (18), $U = \frac{1}{2} \frac{z}{m} (1 - \frac{z}{m})$;
 si m est pair, $j = k - \frac{1}{2}$ selon (10) et $\frac{z}{m} = \frac{1}{2}$, selon (12);
 par conséquent $U^{\max} = \frac{1}{8}$;
 si m est impair, $j = k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$, $\frac{z}{m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$, $U^{\max} = \frac{1}{8} (1 - \frac{1}{m^2})$.

En considérant les figures relatives aux fractionnements 2, 3, 4, 6, 12 on est conduit à s'intéresser au cas où $m \rightarrow \infty$. Compte tenu de (6) on obtient alors $k = [E - \frac{1}{2}] + 1$ en désignant par $[E - \frac{1}{2}]$ le plus grand entier contenu dans $E - \frac{1}{2}$. En outre, selon (1), $j = E$. Par suite (12) permet d'écrire $\frac{z}{m} = E - [E - \frac{1}{2}]$ et (16), $R(k) = E - \frac{1}{2} - [E - \frac{1}{2}]$. Enfin (18) devient

$$U = \frac{1}{2} \left(E - \left[E - \frac{1}{2} \right] - 1 \right)^2. \quad (20)$$

Cette dernière relation est de la forme $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ avec $0,5 \leq x < 1,5$. C'est la branche de parabole de la figure 3.

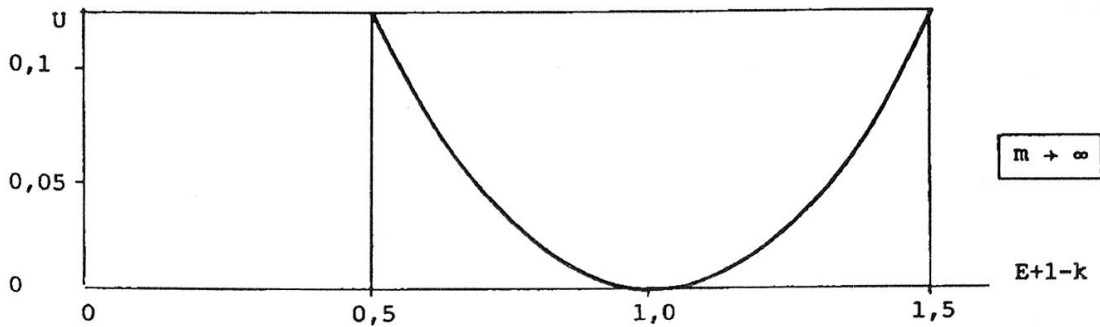


Figure 3

4.5 Exemple

Il est intéressant de contrôler avec un exemple le procédé décrit ci-dessus pour calculer le reliquat U . Pour cela considérons la prime $E = 17,3$ d'une rente viagère immédiate payable trimestriellement ($m = 4$) avec, au décès, restitution de prime sous déduction des arrérages versés. Cet exemple a la

particularité, apparemment surprenante, que la durée exacte j de la restitution est supérieure à la durée fictive k , ce qui entraîne $z > m$.

Partant de $E = 17,3$ et $m = 4$ on obtient, avec les formules (1) et (5),

$$j = 17,5 \quad \text{et} \quad k = 17, \quad \text{d'où} \quad E + 1 - k = 1,3,$$

avec la formule (12),

$$z = 6,$$

et avec la formule (18),

$$U = 0,0875.$$

Observons qu'on peut également obtenir le montant du reliquat par interpolation en utilisant des valeurs indiquées pour $m = 4$ dans le tableau précédant les figures 2:

$$U = 0,0625 + (0,125 - 0,0625) \frac{1,3 - \frac{10}{8}}{\frac{1}{8}} = 0,0875.$$

La figure 4 illustre le cas envisagé.

Considérons les restitutions possibles dès le début de la 17^e année.

La restitution exacte trimestrielle peut prendre six valeurs :

$$\begin{array}{lll} 17,3 - 16; & 17,3 - 16,25; & 17,3 - 16,5; \\ 17,3 - 16,75; & 17,3 - 17; & 17,3 - 17,25. \end{array}$$

Leur total, divisé par 4 pour le rapporter à l'année, donne

$$\bar{R}(17;6) = 1,0125.$$

La restitution fictive est

$$R(17) = 17,3 - 16,375 = 0,925.$$

D'où le reliquat, conforme au résultat obtenu précédemment,

$$U = \bar{R}(17;6) - R(17) = 0,0875.$$

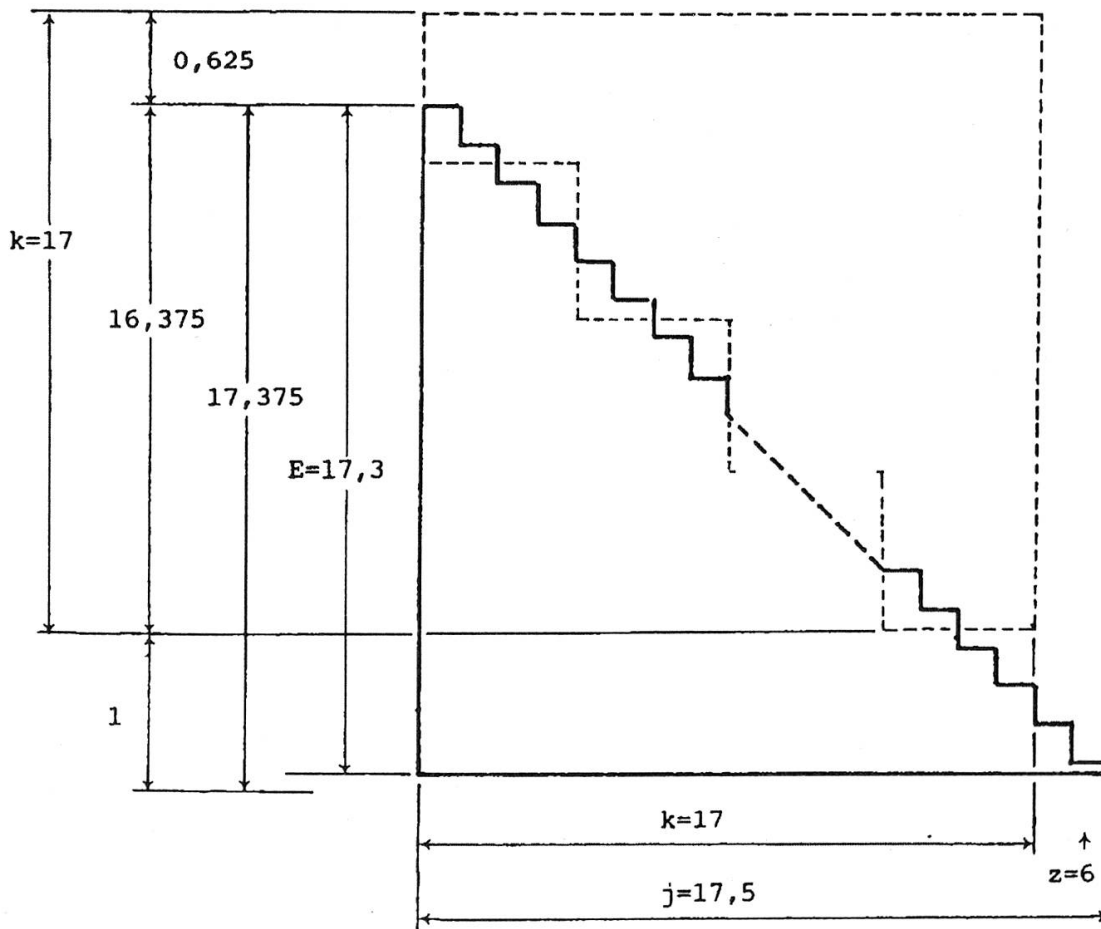


Figure 4

5 Valeur actuelle du reliquat

Le reliquat U que la formule (18) permet de calculer à partir de la prime E et du fractionnement m est une prestation qui est accordée à l'assuré mais dont la prime ne tient pas compte. L'assurance étant conclue à l'âge x et la durée de la restitution fictive étant k , la valeur actuelle du reliquat est

$$U_x = U \frac{C_{x+k-1}}{D_x}. \quad (21)$$

Reprenons l'exemple du paragraphe 4.5 ($E = 17,3$; $m = 4$) et admettons que l'âge de conclusion x est 65. Sachant que $U = 0,0875$ et $k = 17$, on obtient avec

les bases techniques ERM 90 3,25 % pour assurances individuelles de rentes,

$$U_{65} = 0,0875 \frac{C_{81}}{D_{65}} = 0,0875 \frac{228,88}{11\,108,94} = 0,0018.$$

Si la prime devait comprendre la valeur actuelle du reliquat, elle passerait de 17,3 à 17,3018 et subirait une augmentation de 0,10‰.

Le tableau ci-après permet de se faire une idée des maximums que pourraient atteindre le reliquat et son rapport avec la prime.

x	k	$1000 U_x^{\max}$	$1000 \frac{U_x^{\max}}{k}$
55	21	1,5	0,07
65	17	2,6	0,15
75	14	3,7	0,27

Les durées k correspondent grosso modo à un tarif établi avec les bases techniques utilisées dans l'exemple précédent. Les valeurs $1000 U_x^{\max}$ sont calculées, au moyen de (21), avec les bases citées et $U^{\max} = 0,125$. Dans les rapports de la dernière colonne la durée k remplace la prime E , ce qui est sans influence sur les résultats indiqués.

6 Conclusion

La convention qui consiste à remplacer la restitution exacte par une restitution fictive, dans le calcul de la prime d'une rente viagère immédiate dont les termes sont payés par fractions, néglige un éventuel reliquat de restitution en fin de durée. Le montant de ce reliquat ne dépend que de la partie fractionnaire de la prime. Il varie entre zéro et un huitième, au maximum.

La différence de prime qu'occasionnerait la prise en considération de la valeur actuelle du reliquat est illustrée par des valeurs maximales indiquées dans le paragraphe précédent. Il apparaît comme admissible de ne pas en tenir compte dans un tarif.

Sommaire

- 1 Préambule
- 2 Restitution exacte
 - 2.1 Durée
 - 2.2 Montant
- 3 Restitution fictive
- 4 Situation à la fin de la restitution
 - 4.1 Primes avec la même durée de restitution k
 - 4.2 Dernière fraction d'année de la durée j
 - 4.3 Reliquat de restitution
 - 4.4 Variation de U
 - 4.5 Exemple
- 5 Valeur actuelle du reliquat
- 6 Conclusion

Philippe Chuard
av. de Lavaux 93
1009 Pully

Résumé

Une convention, généralement adoptée, permet de simplifier le calcul d'un tarif de rentes viagères avec restitution de prime au décès sous déduction des arrérages versés, lorsque les termes de rente sont payés par fractions. L'auteur examine les conséquences de cette simplification.

Zusammenfassung

Eine allgemein benützte Konvention vereinfacht die Berechnung der Prämien für Renten mit Rückgewähr der Prämie im Todesfall unter Abzug der bezogenen Renten, wenn die Zahlung der Rente unterjährig ist. Der Verfasser untersucht die Folgen dieser Vereinfachung.

Summary

A generally adopted convention simplifies the calculation of the premiums of annuities with return of premium in case of death after deduction of the already paid annuities, when the payment of the annuity occurs more than once a year. The author studies the consequences of this simplification.