Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Aktuarvereinigung

Band: - (1996)

Heft: 1

Artikel: Brève incursion dans le domaine du chaos déterministe

Autor: Hort, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550968

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MICHEL HORT, Yverdon-les-Bains

Brève incursion dans le domaine du chaos déterministe

1 Introduction

La notion de chaos déterministe est apparue dans la décennie 1970. Actuellement, une littérature abondante lui est consacrée. Ce sont surtout les physiciens et les biologistes qui s'intéressent à ce concept. Dès lors, nous nous sommes posé les deux questions suivantes:

- qu'est-ce exactement que le chaos déterministe?
- peut-il présenter un intérêt pour la science actuarielle?

Les considérations et les exemples présentés ci-après n'ont certes pas la prétention d'apporter des réponses définitives à ces deux questions. Plus modestement, ils cherchent à proposer quelques éléments pour une première appréciation.

Première question: qu'est-ce que les chaos déterministe?

A grands traits, on peut dire qu'il y a chaos déterministe lorsqu'un modèle, simple dans certaines conditions, devient, dans d'autres conditions, extrêmement compliqué et, par là même, perd de sa capacité descriptive. L'évolution des populations offre des exemples de cette situation. Par exemple, dans son ouvrage *Théorie mathématique des populations*, Alain Hillion commente comme il suit l'évolution d'une colonie d'insectes (p. 37) *La taille de la population peut tendre vers une limite, être une fonction périodique du temps ou avoir un comportement général si difficile à caractériser qu'on le qualifie de „chaotique"*.
Sur le plan de la méthodologie, le chaos déterministe a donné lieu à d'amples analyses. Il révèle en effet que la modélisation mathématique des phénomènes peut rencontrer des difficultés imprévues.
Cette situation autorise Olivier Zurchuat à écrire dans le N° 93 de *l'Auditoire* (un périodique interne de l'Université de Lausanne) *La découverte dans les années septante du chaos déterministe acheva de relativiser les prétentions du déterminisme laplacien: des phénomènes modélisés par des équations*

toutes simples peuvent donner lieu à des comportements très complexes, imprévisibles.
Les ouvrages cités dans la bibliographie illustrent divers aspects du chaos déterministe.
Pour concrétiser notre propos, nous consacrerons le chapitre suivant à la suite récurrente

$$x_{t+1} = kx_t - kx_t^2$$

qui est, selon les auteurs qui ont abordé la question, la plus simple qui puisse offrir des exemples de comportements chaotiques.

Seconde question: intérêt pour la science actuarielle?

Déjà dans les années 1970, les premiers auteurs qui avaient traité du chaos déterministe avaient fait observer que ce concept pourrait être utilisé avec profit dans la modélisation de l'instabilité et des fluctuations des phénomènes économiques et démographiques. Or ces domaines sont proches, à un titre ou à un autre, de la science actuarielle. De fait, le chaos déterministe apparaît effectivement aujourd'hui dans ces domaines. Lorsque nous avons préparé ce papier, on nous a signalé que la suite récurrente étudiée ci-après correspondait à un cas particulier du modèle de Day d'accumulation du capital et à un cas particulier du modèle de Pohoja de la dynamique du taux d'emploi (voir G. Abraham-Frois et E. Berreri *Instabilité, cycles, chaos* Economica 1995).

2 La suite récurrente $x_{t+1} = kx_t - kx_t^2$

Remarquons tout d'abord que l'étude de cette suite récurrente est liée à celle de la fonction:

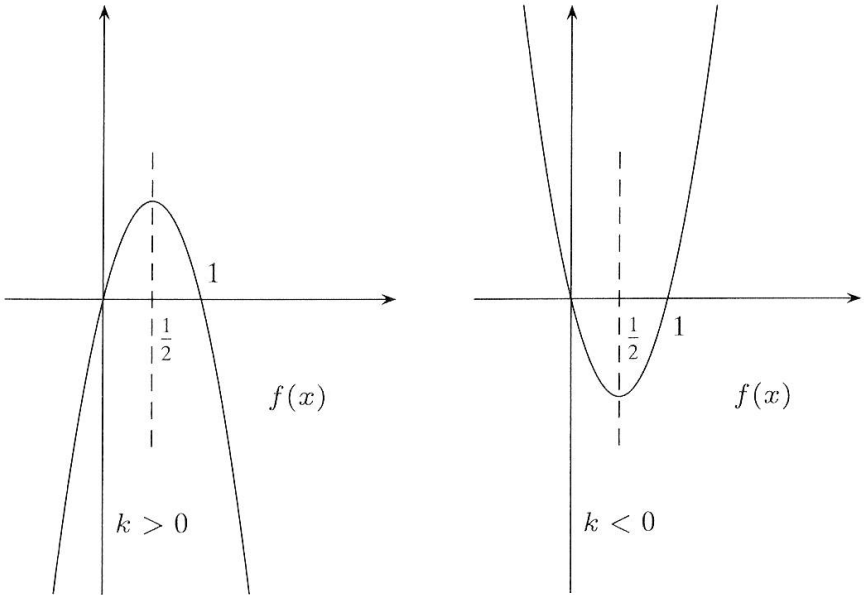
$$f : x \to f(x) = kx - kx^2$$

Nous ferons donc pour commencer quelques remarques au sujet de cette fonction.

1. $f(x)$ est définie pour tout x.
2. Sa représentation graphique est une parabole qui tourne sa concavité vers le bas si $k > 0$ et vers le haut si $k < 0$.

3. Pour $k = 0$, la fonction est constante et égale à 0.
4. La fonction présente un extremum pour $x = \frac{1}{2}$; cet extremum est un maximum si $k > 0$ et un minimum si $k < 0$.
5. La représentation graphique est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$. Pour tout k, la parabole passe par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

Allure de la représentation graphique



Ceci précisé, revenons à la suite récurrente proprement dite.
Chaque terme x_t $(t \in \mathbb{N})$ de la suite est un nombre réel qui se déduit du précédent, sauf x_0 qui est une donnée de base, appelée condition initiale.
Selon la valeur du paramètre k et de la condition initiale x_0, la suite peut adopter huit comportements dont le dernier est justement le chaos déterministe. Nous commentons ci-après ces huit comportements, ce qui permettra de voir ce que le comportement chaotique a de spécifique.

2.1 Le comportement stationnaire

En comportement stationnaire, tous les termes x_t de la suite sont égaux.
Ceci se produit, pour tout k autre que 0 et 1, si $x_0 = 0$ ou si $x_0 = d = 1 - \frac{1}{k}$.

Pour $k = 0$ et pour $k = 1$, seule la valeur initiale $x_0 = 0$ entre en ligne de compte et tous les termes de la suite sont nuls.

Ces conditions s'établissent facilement en résolvant l'équation

$$x_{t+1} = x_t = kx_t - kx_t^2$$

Exemple: $k = 1.6 \quad d = 0.375$

Pour $x_0 = 0$: $\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_t = \cdots = 0$
Pour $x_0 = 0.375$: $\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_t = \cdots = 0.375$

2.2 *Le comportement stationnaire à partir de $t = T$*

Considérons dans l'équation

$$x_{t+1} = kx_t - kx_t^2$$

x_{t+1} comme donné et x_t comme l'inconnue, il vient deux racines x_t' et x_t'' soit:

$$x_t' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}D \qquad x_t'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}D \qquad D^2 = 1 - \frac{4}{k}x_{t+1} \qquad x_t' + x_t'' = 1$$

Si $D^2 < 0$, il n'existe pas, dans l'ensemble des nombres réels, de valeur x_t dont le successeur soit le x_{t+1} donné.

Si $D^2 = 0$, on a: $x_t' = x_t'' = \frac{1}{2}$

En outre, si $x_{t+1} = d$, les deux racines sont $d = 1 - \frac{1}{k}$ et $1 - d = \frac{1}{k}$.

Ce qui précède permet de construire des modèles comme celui qui suit:

$$k = 6.4 \qquad d = 0.843\,75 \qquad T = 4 \qquad x_4 = d$$

x_3, x_2, x_1 et x_0 peuvent se calculer selon ce qui vient d'être dit.

On obtient ainsi huit suites qui adoptent le même comportement stationnaire à partir de $t = T = 4$. Soit:

x_0	x_1	x_2	x_3	$x_{t\geq 4}$
0.850 778 090				
	0.812 510 281			
0.149 221 910				
		0.974 958 879		
0.969 792 221				
	0.187 489 719			
0.030 207 779				
			0.156 25	0.843 75
0.807 186 859				
	0.996 071 895			
0.192 813 141				
		0.025 041 121		
0.999 385 856				
	0.003 928 105			
0.000 614 144				

2.3 *Le comportement stationnaire à la limte*

Les valeurs 0 et d peuvent être la limite de la suite des x_t lorsque t tend vers l'infini. Pour qu'il en soit ainsi, les conditions suivantes doivent être remplies:

Conditions		*Limite*	Remarque
$-1 \leq k < 0$	$1 - d < x_0 < d$	0	A
$0 < k \leq 1$	$d < x_0 < 1 - d$	0	B
$1 < k \leq 2$	$0 < x_0 < 1$	d	B C
$2 < k \leq 3$	$0 < x_0 < 1$	d	A C

A: le passage à la limite se fait par encadrement
B: le passage à la limite se fait par approche
C: sauf si x_0 conduit au comportement stationnaire.

Exemple:

k	-0.8	0.25	1.6	2.5
d	2.25	-3	0.375	0.6
x_0	2	3	0.2	0.9
x_1	1.6	-1.5	0.256	0.225
x_2	0.768	$-0.937\,5$	$0.304\,742$	$0.435\,937$
x_3	$-0.142\,540$	$-0.454\,102$	$0.338\,999$	$0.614\,740$
x_4	$0.130\,287$	$-0.165\,077$	$0.358\,526$	$0.592\,086$
...				
Limite	0	0	0.375	0.6

2.4 *Le comportement périodique*

Il peut se faire que x_t présente un comportement périodique de période p, c'est-à-dire que

$$x_t = d_r \quad \text{pour tout} \quad t = mp + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < p$$

Pour $p = 2$ par exemple, les deux valeurs d_0 et d_1 s'obtiennent en résolvant l'équation du 4e degré

$$x_{t+2} = x_t = k[kx_t - kx_t^2] - k[kx_t - kx_t^2]^2$$

0 et d sont, de façon évidente, deux racines de cette équation. Les deux autres sont d_0 et d_1. On trouve

$$d_0 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{k} + D\right] \quad d_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{k} - D\right] \quad D^2 = 1 - \frac{2}{k} - \frac{3}{k^2}$$

On note que si $-1 < k < 3$, d_0 et d_1 ne sont pas des nombres réels. De plus, si $k = 3$, on a $d_0 = d_1 = d$ ce qui conduit au comportement stationnaire. Des considérations semblables peuvent être faites pour $p > 2$.

Exemple: $k = 3.835$

$p = 2$: $d_0 = 0.892\,344\,810 \quad d_1 = 0.368\,411\,382$

d'où: $x_0 = x_2 = x_4 = \cdots = x_{2m} \quad = \cdots = 0.892\,344\,810$
$x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = x_{2m+1} = \cdots = 0.368\,411\,382$
(On peut naturellement partir aussi de $x_0 = d_1$)

$p = 3$: $d_0 = 0.152\,074\,266 \quad d_1 = 0.494\,514\,368 \quad d_2 = 0.958\,634\,596$

d'où: $x_0 = x_3 = \cdots = x_{3m} \quad = \cdots = 0.152\,074\,266$
$x_1 = x_4 = \cdots = x_{3m+1} = \cdots = 0.494\,514\,368$
$x_2 = x_5 = \cdots = x_{3m+2} = \cdots = 0.958\,634\,596$
(On peut naturellement partir aussi de $x_0 = d_1$ ou de $x_0 = d_2$).

2.5 *Le comportement périodique à partir de $t = T$*

Ce cas n'est pas sans analogie avec celui étudié sous chiffre 2.2. Ainsi nous nous bornerons à présenter un exemple, soit $T = 6$ avec:

$$k = -1.5 \qquad p = 2 \qquad d_0 = \frac{2}{3} \qquad d_1 = -\frac{1}{3}$$

Il vient: $x_0 = 1.665\,992 \quad x_3 = 1.637\,889$
$x_1 = 1.664\,306 \quad x_4 = 1.567\,187$
$x_2 = 1.658\,415 \quad x_5 = 1.333\,333$

et pour $t \geq 6$:

$$x_6 = x_8 = \cdots = x_{2m} \quad = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$x_7 = x_9 = \cdots = x_{2m+1} = \cdots = -\frac{1}{3}$$

2.6 *Le comportement périodique à la limite*

Les x_t peuvent tendre vers un comportement périodique pour t tendant vers l'infini comme le montre l'exemple suivant:

$$k = 3.2 \quad p = 2 \quad t = 2m + r \quad x_0 = 0.6$$

$$d_0 = 0.799\,455\,490 \quad d_1 = 0.513\,044\,509$$

t	m	r	x_t	$x_t - d_0$	$x_t - d_1$
0	0	0	0.6		0.086 955 491
1	0	1	0.768	−0.031 455 490	
2	1	0	0.570 163 2		0.057 118 691
3	1	1	0.784 246 801	−0.015 208 689	
4	2	0	0.541 452 019		0.028 407 510
5	2	1	0.794 501 536	−0.004 953 954	
6	3	0	0.522 460 304		0.009 415 795
7	3	1	0.798 385 711	−0.001 069 779	
...					
Limite		0	0.513 044 509		0
		1	0.799 455 490	0	

Un des points les plus importants de la théorie que nous exposons a été la découverte d'une suite infinie de valeurs

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ \ldots$$

telle que
si $0 < x_0 < 1$ et pour autant qu'il ne s'agisse pas d'un x_0 conduisant à un comportement stationnaire ou à un comportement périodique (immédiat ou à partir de $t = T$) et si

$$F_s < k \leq F_{s+1}$$

alors x_t tend vers un comportement périodique de période $p = 2^s$.
Nous ne développerons pas ici le calcul des F_s mais dirons simplement que $F_1 = 3$ et que $\lim\limits_{s \to \infty} F_s = F = 3.569\,945\,6\ldots$
F est appelé "point de Feigenbaum" du nom du physicien américain qui a été le premier à le calculer. Ce point montre que l'on peut rencontrer des cycles de p valeurs périodiques pour p de plus en plus grand, sans se heurter à une borne supérieure.
En outre, signalons que l'on donne le nom d'*attracteur* au p-uple constitué par les valeurs formant un comportement périodique limite. L'attracteur peut donc être regardé comme une généralisation de la notion de limite.

2.7 *Les comportements non bornés*

Jusqu'à maintenant tous les comportements dont il a été question étaient bornés, ce qui veut dire que x_t ne tendait jamais vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque t devenait infinimemt grand.
Mais des comportements non bornés se présentent aussi. Pour cela on a les conditions suivantes:

1°)	pour	$k < 0$	si	$1 - d > x_0$	ou si	$d < x_0$
2°)	pour	$0 < k < 1$	si	$d > x_0$	ou si	$1 - d < x_0$
3°)	pour	$1 < k$	si	$0 > x_0$	ou si	$1 < x_0$

Ces conditions sont suffisantes mais pas nécessaires. En effet:

- si $k < -2$, des comportements non bornés peuvent aussi apparaître pour

  $1 - d < x_0 < d$

Exemple: $k = -2.5 \quad 1 - d = -0.4 \quad d = 1.4$

  $x_0 = -0.274\,456\,3$ entraîne un comportement périodique donc borné
  $x_0 = -0.274$ entraîne $\lim\limits_{t \to \infty} x_t = +\infty$ donc un comportement non borné.

- si $4 < k$, des comportements non bornés peuvent aussi apparaître pour

  $0 < x_0 < 1\,.$

Exemple: $k = 5$

  $x_0 = 0.8$ entraîne un comportement stationnaire donc borné
  $x_0 = 0.81$ entraîne $\lim\limits_{t \to \infty} x_t = -\infty$ donc un comportement non borné.

2.8 *Le comportement chaotique*

Le comportement chaotique peut être assimilé à un comportement périodique avec une valeur de p infiniment grande. La suite présente dans ce

cas un comportement borné mais qui n'est ni stationnaire, ni périodique – p étant fini – que ce soit:

dès x_0	(chiffres 2.1 et 2.4 ci-dessus)
dès x_T	(chiffres 2.2 et 2.5 ci-dessus)
à la limite	(chiffres 2.3 et 2.6 ci-dessus)

Prenons $k = 3.58$ et une valeur initiale x_0 comprise entre 0 et 1. Faisons quelques calculs numériques, soit:

t	x_t	x_t	x_t	x_t
0	0.05	0.5	0.6	0.9
1	0.170 05	0.895	0.859 2	0.322 2
2	0.505 256 1	0.336 430 5	0.433 091 8	0.781 826 0
3	0.894 901 1	0.799 217 2	0.878 973 4	0.610 655 2
4	0.336 710 2	0.574 479 3	0.380 837 4	0.851 164 4
5	0.799 544 4	0.875 141 1	0.844 165 0	0.453 527 2
6	0.573 777 8	0.391 183 5	0.470 950 6	0.887 268 2

On remarque que la suite des x_t présente pour toutes les valeurs initiales une alternance de valeurs hautes et de valeurs basses. Dans les trois premiers cas, les valeurs basses apparaissent lorsque t est pair et, dans le dernier cas, pour t impair. En outre les valeurs hautes et basses ne sont pas très éloignées de

- $d_0 = 0.867\,297\,013 \qquad d_1 = 0.412\,032\,595$

Tout cela suggère que l'on pourrait avoir peut-être à la limite un comportement périodique avec $p = 2$.
Or tel n'est pas le cas! Considérons en effet la limite suivante (écrite pour les cas où la valeur basse de x_t se présente pour t pair)

$$\lim_{x_{2m} \to d_1} \frac{x_{2m+2} - d_1}{x_{2m} - d_1} = k^2(1 - 2d_0)(1 - 2d_1)\,.$$

La limite ci-dessus peut s'établir par la règle de L'Hospital. On prend alors la dérivée du dénominateur et du numérateur considérés comme des

fonctions de x_{2m}. La dérivée du dénominateur est 1. Pour le numérateur, on obtient: $x'_{2m+2} = k^2(1 - 2x_{2m})(1 - 2[kx_{2m} - kx_{2m}^2])$ d'où l'expression ci-dessus en faisant $x_{2m} = d_1$.
Pour $k = 3.58$, la limite ci-dessus vaut -1.6564 ce qui entraîne que, lorsque x_{2m} est suffisamment voisin de d_1, on a:

$$|x_{2m+2} - d_1| > |x_{2m} - d_1|$$

donc que x_{2m+2} s'éloigne de d_1.
Remarquons que, dans l'exemple du chiffre 2.6 ci-dessus, la même limite est de 0.16; d'où pour x_{2m} suffisamment voisin de d_1

$$|x_{2m+2} - d_1| < |x_{2m} - d_1|$$

ce qui entraîne la convergence constatée dans cet exemple.
Dès lors, on va avoir, pour $k = 3.58$, des séquences de x_{2m} qui s'éloignent de d_1. On remarque en outre que la première valeur de chaque séquence est plus proche de d_1 que la dernière valeur de la séquence précédente. C'est ce fait qui garantit que l'on reste dans un comportement borné.
L'exemple suivant illustre ce qui vient d'être dit dans le cas où $k = 3.58$ et $x_0 = 0.6$:

t	x_t	$x_t - d_1$	t	x_t	$x_t - d_1$
	1ère séquence			3e séquence	
2	0.433	0.021	16	0.337	−0.075
4	0.381	−0.031	18	0.574	0.162
6	0.471	0.059		4e séquence	
8	0.345	−0.067	20	0.390	−0.022
10	0.553	0.141	22	0.452	0.040
	2e séquence		24	0.359	−0.053
12	0.365	−0.047	26	0.519	0.107
14	0.506	0.094			

Cet exemple est tout à fait typique d'un comportement chaotique. Un même genre de variation des x_t se présente d'ailleurs pour t impair. Puisque le

comportement chaotique est l'objet principal de cet exposé, nous allons en donner un second exemple.
Soit alors $k = -2$; pour x_0 choisi entre $d = 1.5$ et $1 - d = -0.5$, les x_t se présentent en séquences de valeurs décroissantes, la dernière étant toujours négative. En outre, il n'est plus nécessaire, dans ce second exemple, de distinguer entre valeurs paires et impaires de t.
Nous prendrons deux valeurs de x_0, soit $x_0 = 1.2$ et $x_0 = 1.21$ – ce qui permet d'illustrer la sensibilité aux conditions initiales qui est très forte en comportement chaotique.
Il vient:

	pour $x_0 = 1.2$		pour $x_0 = 1.21$	
t		x_t		x_t
0	1ère séquence	1.200 0	1ère séquence	1.210 0
1		0.480 0		0.508 2
2		−0.499 2		−0.499 9
3	2e séquence	1.496	2e séquence	1.499 5
4		1.487 2		1.497 8
5		1.449 2		1.491 4
6		1.302 1		1.465 8
7		0.786 6		1.365 4
8		−0.335 7		0.997 9
9	3e séquence	0.896 7		−0.004 2
10		−0.185 2	3e séquence	0.008 4
11	4e séquence	0.439 0		−0.016 6
12		−0.492 6	4e séquence	0.033 8
13	5e séquence	1.470 4		−0.065 3
14		1.383 2	5e séquence	0.139 2
15		1.060 2		−0.239 7
16		0.127 6	6e séquence	0.594 3
17		−0.222 6		−0.482 2

L'étude des exemples précédents, pour être complète, devrait montrer encore qu'il n'existe pas, pour tout p, de p-uple de p valeurs périodiques de x_t qui soit un attracteur pour $t \to \infty$. Nous ne pouvons cependant pas développer ce point dans le cadre restreint de cet exposé.

Sur un plan plus général, on peut en revanche remarquer que, pour k positif mais $< F$, il n'existe pas de comportement chaotique. En effet, on a toujours, selon le choix de x_0, soit un comportement non borné, soit un comportement stationnaire ou périodique (dès x_0, dès $t = T$ ou à la limite).

Si k est positif, c'est donc seulement pour $k \geq F$ que des comportements chaotiques apparaissent. Mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Pour $k = 3.835$ par exemple, on peut vérifier que le 3-uple

$$d_0 = 0.152\,074\,266 \quad d_1 = 0.494\,514\,368 \quad d_2 = 0.958\,634\,596$$

est un attracteur.

3 Trois remarques finales

1. On observe que des regroupements peuvent être faits entre les différentes catégories de comportements dont nous avons parlé.

Ainsi, le comportement stationnaire peut être regardé comme un cas particulier du comportement périodique, celui où $p = 1$.

De même, les comportements traités sous chiffres 2.1 et 2.4 peuvent être regardés comme des cas particuliers des comportements des chiffres 2.2 et 2.5, ceux où $T = 0$.

De plus, les comportements des chiffres 2.3 et 2.6 peuvent être envisagés comme les cas limites, pour $T \to \infty$, des comportements traités sous chiffres 2.2 et 2.5.

Enfin le comportement chaotique n'est que le cas particulier du comportement périodique pour $p \to \infty$.

2. Notre deuxième remarque a trait au niveau de généralité des développements présentés.

Nous n'avons en effet considéré qu'une seule suite récurrente. Mais les auteurs qui ont abordé ces questions ont montré que les conclusions obtenues à son sujet peuvent être étendues à une vaste catégorie de suites

récurrentes. Ils citent volontiers deux autres suites également très simples, soit

$$x_{t+1} = k\sin(x_t) \quad \text{et} \quad x_{t+1} = kx_t^2 - 1$$

Par exemple, pour $k = 2.1$, la première de ces suites a un comportement stationnaire pour $x_0 = 1.950\,458\,65$, valeur qui est également la limite des x_t pour $t \to \infty$ (Pour la prise du sinus, il faut considérer les x_t comme exprimés en radians).
La seconde suite présente un comportement stationnaire pour $k = 1.5$ et pour $x_0 = 1.215\,250\,4$ ou pour $x_0 = -0.548\,583\,8$.
C'est peut-être le lieu de faire remarquer qu'il existe des suites récurrentes qui n'adoptent jamais un comportement chaotique. Par exemple

$$x_{t+1} = \frac{x_t^2 + k}{2x_t} \qquad (k > 0)$$

a toujours un comportement stationnaire: dès x_0 si celui-ci vaut $+\sqrt{k}$ ou $-\sqrt{k}$ ou à la limite pour toute autre valeur de x_0 (sauf 0). On a alors:

$$\lim_{t\to\infty} x_t = +\sqrt{k} \quad \text{si } x_0 \text{ positif} \qquad \lim_{t\to\infty} x_t = -\sqrt{k} \quad \text{si } x_0 \text{ négatif.}$$

3. On peut se demander si, en comportement chaotique, un élément aléatoire ne s'introduit pas et si le modèle ne devient pas une sorte de machine à fournir des nombres au hasard. En fait il n'en est rien. Chaque x_t reste déterminé par son prédécesseur. C'est pourquoi d'ailleurs on parle de chaos *déterministe*.
D'ailleurs, en cas de comportement périodique avec p très grand (supérieur à 500 ou à 1 000 par exemple), on est pratiquement aussi en situation d'imprédictibilité. Dans un tel cas, le modèle mathématique ne délivre plus une information utile sur le phénomène qu'il entend décrire.
Enfin signalons que, dans les exemples présentés, les calculs ont été faits avec un plus grand nombre de décimales que celles figurant dans les valeurs transcrites. Si donc on veut refaire les calculs à partir des chiffres cités, de petites différences peuvent apparaître sur les dernières décimales.

Michel Hort
Jordils 13 bis
Yverdon-les-Bains

Bibliographie

Olivier Zurchuat. Le Chaos et le Déterminisme. L'Auditoire, N° 93, Lausanne, novembre 1994

Divers auteurs. Revue du Palais de la Découverte, Paris. Vol. 22, N° 218, mai 1994, Vol. 23, N° 223, novembre 1994.

James Gleick. Chaos. The Viking Press, New York 1987. Traduit en français sous le titre: La Théorie du Chaos. Albin Michel 1989 et Flammarion 1991

Ian Stewart. Does God play Dice? The new mathematics of Chaos. Penguin Books, Londres 1989. Traduit en français sous le titre: Dieu joue-t-il aux dés? Les mathématiques du chaos. Flammarion 1992

Robert L. Devaney. Chaos, Fractals and Dynamics. Addison-Wesley Publ. Company 1990

Peitgen, Jürgens & Saupe. Chaos and Fractals. New frontiers of Science. Springer Verlag 1992

Résumé

L'article présente d'une façon qui se veut très simple le concept de chaos déterministe apparu dans les mathématiques au cours des années 1970. Chaque notion présentée est illustrée par un exemple numérique.

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel stellt in einer gewollt einfachen Art das Konzept der Theorie des deterministischen Chaos vor, deren Entwicklung im Verlauf der siebziger Jahre begann. Alle vorgestellten Begriffe werden anhand numerischer Beispiele illustriert.

Summary

The paper presents in a simple way the concept of deterministic chaos, that appeared in mathematics during the seventies. Every notion is illustrated by a numeric example.