Kurzmitteilungen

D. Kurzmitteilungen

Daniel Neuenschwander, Lausanne and Bern

On option pricing in models driven by iterated integrals of Brownian motion

1 Introduction

Let $\{B_k(t)\}_{t\geq 0}$ ($k = 1, 2$) be two independent Brownian motions with parameters μ_k, σ_k. Let the stochastic process $\{a_2(t)\}_{t\geq 0}$ be given by $a_2(t) = \int_0^t B_1(s)dB_2(s)$ and suppose that the price of an asset A at time t is given by $S(t) = S(0)\exp a_2(t)$. Assume furthermore that $\{B_1(t)\}_{t\geq 0}$ is a traded quantity, too. (Some time ago, volatility instruments were indeed traded in Zürich.) Then Hull and White (1987) have shown that the price of a European call option with exercise time T on the asset A is given by mixing the Black-Scholes price for the Brownian motion $\{B_2(t)\}_{t\geq 0}$ over the distribution of the mean volatility $\frac{\sigma_2^2}{T}\int_0^T \overline{B}_1^2(t)dt$ of $a_2(t)$, where $\{\overline{B}_1(t)\}_{t\geq 0}$ is a Brownian motion with parameters $\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}, \sigma_1$.

In this note, we prove the same result, where the Brownian motion $\{B_1(t)\}_{t\geq 0}$ is replaced by an iterated stochastic integral of arbitrary order of Brownian motions. We take the approach suggested by Gerber and Shiu (1994 and subsequent papers), where the price of an option is calculated as expected discounted payoff with respect to an equivalent martingale measure given by an Esscher transform with a suitable parameter.

Let $\{B_k(t)\}_{t\geq 0}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) be independent one-dimensional Brownian motions with parameters μ_k and σ_k and define the stochastic process $\{a_n(t)\}_{t\geq 0}$ recursively as

$$a_0(t) := 1\,, \qquad a_k(t) := \int_0^t a_{k-1}(s)\, dB_k(s)\,. \tag{1}$$

Put furthermore

$$\overline{a}_0(t) := 1\,, \qquad \overline{a}_k(t) := \int_0^t \overline{a}_{k-1}(s)\, d\overline{B}_k(s)\,, \tag{1a}$$

where $\{\overline{B}_k(t)\}_{t\geq 0}$ are independent real-valued Brownian motions with respective parameters

$$\overline{\mu}_k = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2\,,$$

$$\overline{\sigma}_k = \sigma_k\,.$$

Suppose that we are on a market with a riskless asset A_0 (bank account) and n risky assets A_k with price processes $S_k(t) = \{S_k(0)\exp(a_k(t))\}_{t\geq 0}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). This has an appealing interpretation: $\log(S_k(t)/S_k(0))$ can be viewed as a "Brownian motion" with (time-dependent) random variance $a_{k-1}^2(t)$ (or, in other words, a "Black-Scholes model with random volatility"). The random volatility is reflected by the fact that the tail of the distribution of $a_n(t)$ (if $\{B_i(t)\}_{t\geq 0}$ are standard Brownian motions) is of the order $\exp(-|x|^{2/n})$ ($x \to \pm\infty$) (cf. Schott (1983)).

2 Extension of the Black-Scholes formula to a model where the logarithm of the price process is driven by an iterated stochastic integral of Brownian motions

Let $\Phi(x) = (1/(2\pi))^{1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp(-y^2/2)dy$ denote the standard normal distribution function.

Theorem 1 *Suppose that we are on a market with a riskless asset A_0 (bank account) and n risky assets A_k (zero-coupon bonds) with price processes $\{S_k(t)\}_{t\geq 0} = \{S_k(0)\exp(a_k(t))\}_{t\geq 0}$ where $\{a_k(t)\}_{t\geq 0}$ are as in (1), $\{B_k(t)\}_{t\geq 0}$ being independent one-dimensional Brownian motions with parameters μ_k and σ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Suppose that the riskless force of interest on the market is given by δ. Let C be a European call option on the asset A_n with exercise date T and exercise price K. Then the price p of C is given by*

$$\begin{aligned} p = E\Bigg(S_n(0)\Phi\Bigg(\frac{-\kappa + (\delta + \frac{\sigma_n^2}{T}\int_0^T \overline{a}_{n-1}^2(s)\,ds/2)T}{\sigma_n\sqrt{\int_0^T \overline{a}_{n-1}^2(s)\,ds}}\Bigg) \\ - Ke^{-\delta T}\Phi\Bigg(\frac{-\kappa + (\delta - \frac{\sigma_n^2}{T}\int_0^T \overline{a}_{n-1}^2(s)\,ds/2)T}{\sigma_n\sqrt{\int_0^T \overline{a}_{n-1}^2(s)\,ds}}\Bigg)\Bigg) \end{aligned} \tag{2}$$

where $\kappa := \log(K/S_n(0))$ and the expectation is taken with respect to the distribution of $\int_0^T \overline{a}_{n-1}^2(s)\,ds$ and $\{\overline{a}_n(t)\}_{t\geq 0}$ is defined as in (1a).

For $n = 2$, we have that $\overline{a}_1^2(t) = \overline{B}_1^2(t)$ is the infinitesimal variance of $\log(S_2(t)/S_2(0))$ and it is important that $S_1(t) = S_1(0)\exp a_1(t) = S_1(0)\times \exp B_1(t)$ is the price of a traded asset, too (this was also supposed in Hull, White (1987)). As mentioned before, this really happens in practice: some time ago, volatility instruments were traded in Zürich.

Observe that $\overline{a}_{n-1}(t)$ can become ≤ 0, but in fact the process $\{a_n(t)\}_{t\geq 0}$ remains unchanged if $\overline{a}_{n-1}(t)$ is replaced by $|\overline{a}_{n-1}(t)|$.

For the proof of Theorem 1, we first treat the case of a "Brownian motion" with variable, but deterministic variance $\sigma^2(t)$.

Proposition 1 *Assume that in a market we have one riskless asset and one risky asset (zero-coupon bond) A, the price of A being given by the stochastic process* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *where* $S(t) = S(0)\exp X(t)$,

$$X(t) = \sigma(t)B(t)\,,$$

$\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *is a one-dimensional Brownian motion with parameters* μ *and (w.l.o.g.)* $\sigma = 1$, *and* $\sigma(t)$ *is a positive-valued bounded measurable function of time. Suppose that the riskless force of interest on the market is given by* δ. *Let* C *be a European call option on the asset* A *with exercise date* T *and exercise price* K. *Then the price* p *of* C *is given by*

$$\begin{aligned} p = {} & S(0)\Phi\left(\frac{-\kappa + (\delta + \Sigma^2(T)/2)T}{\Sigma(T)\sqrt{T}}\right) \\ & - Ke^{-\delta T}\Phi\left(\frac{-\kappa + (\delta - \Sigma^2(T)/2)T}{\Sigma(T)\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

where $\kappa := \log(K/S(0))$

$$\Sigma^2(t) := \frac{1}{t}\int_0^t \sigma^2(s)\,ds.$$

For the proof of Proposition 1, we generalize the method of Esscher transform suggested in Gerber and Shiu (1994 and subsequent papers) in the sense that we allow the Esscher parameter $h = h(t)$ to be a function of time. The following exposition is a generalization of Gerber, Shiu (1994), pp. 197f., p. 206. Let $F(.,t)$ be the distribution function of $X(t)$. Then one defines (by a little abuse of notation) the Esscher transformed process with parameter function $h(t)$ by the process $\{X(t); h(t)\}_{t\geq 0}$ with independent increments, where the distribution function of $(X(t); h(t))$ is given by

$$F(x, t; h(t)) := \frac{\int\limits_0^x e^{h(t)y} F(dy, t)}{\int\limits_0^\infty e^{h(t)y} F(dy, t)} .$$

Let $M(z, t) = E(e^{zX(t)})$ be the moment generating function of $X(t)$ and $M(z, t; h(t))$ that of $(X(t); h(t))$. Then we have

$$M(z, t; h(t)) = \frac{M(z + h(t), t)}{M(h(t), t)} . \tag{4}$$

Since

$$M(z, t) = M(z, 1)^{\Sigma^2(t)t} , \tag{5}$$

we get by (4) and (5)

$$\begin{aligned} M(z, t; h(t)) &= \left(\frac{M(z + h(t), 1)}{M(h(t), 1)} \right)^{\Sigma^2(t)t} \\ &= M(z, 1; h(t))^{\Sigma^2(t)t} . \end{aligned} \tag{6}$$

Since the exponential function is positive, the measures of the original and the Esscher transformed process are equivalent (i.e. they have the same null sets). The doctrine in financial mathematics is that the price of the option is defined as the expected discounted payoff with respect to an equivalent martingale measure. So we have to determine the Esscher parameter function $h(t) = h^*(t)$ in such a way that the process $\{e^{-\delta t} S(t)\}_{t\geq 0}$ is a $h^*(t)$-martingale (which means that $\{(e^{-\delta t} S(t); h^*(t))\}_{t\geq 0}$ is a martingale). This is equivalent to the requirement

$$\Sigma^2(t) \log M(1, 1; h^*(t)) = \delta \qquad (t > 0) . \tag{7}$$

By inserting the explicit formula for the moment generating function of a normal distribution, one obtains (as in Gerber, Shiu (1994), p. 206) the Black-Scholes formula with the variance σ^2 replaced by $\Sigma^2(T)$, which yields the result of Proposition 1. □

Proof of Theorem 1: Define (for $k = 1, 2, \ldots, n$) the stochastic process $\{h_k(t)\}_{t\geq 0}$ as that $\{h(t)\}_{t\geq 0}$ which arises in the proof of Proposition 1 if one puts $\sigma(t) := \overline{a}_{k-1}(t)$. Then the stochastic process (with values in $\mathbb{R}^n$) given by

$$\{\{e^{-\delta t} S_k(t); h_k(t)\}_{1\leq k\leq n}\}_{t\geq 0} \tag{8}$$

is a martingale which is equivalent to the original process

$$\{\{S_1(t), S_2(t), \ldots, S_n(t)\}_{1\leq k\leq n}\}_{t\geq 0} \ . \tag{9}$$

Now the assertion follows from the definition of $h_k(t)$. □

Acknowledgements

The author would like to thank the referees for important remarks and pointing out an error in the first draught.

References

[1] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1994). Martingale approach to pricing perpetual american options. *ASTIN Bull.* **24(2)**, 195–220.

[2] Hull, J., White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatility. *J. Finance* **XLII(2)**, 281–300.

[3] Schott, R. (1983). Une loi du logarithme itéré pour certaines intégrales stochastiques. In: *Marches aléatoires et processus stochastiques sur les groupes de Lie*. Institut Elie Cartan, Nancy, 147–161.

Daniel Neuenschwander
Université de Lausanne
Institut des Sciences Actuarielles
CH-1015 Lausanne

Christian Wagner, Basel

Berechnungen für das IAS 19 im Rahmen der EVK 90

1 Einleitung

Mit den International Accounting Standards (IAS) 19 kommt in der Schweiz eine Neuerung auf Unternehmen zu, die nach internationalen Richtlinien bilanzieren wollen oder müssen. Die den Angestellten im Rahmen der beruflichen Vorsorge zugesicherten Leistungen sind nach schweizer Recht Verpflichtungen der rechtlich selbständigen Vorsorgeeinrichtung und werden periodisch durch Pensionsversicherungsexperten bewertet. Nach IAS 19 sollen diese Verpflichtungen in der Konzernbilanz offen gelegt werden. Im Unterschied zur technischen Bilanz der Pensionskasse hat der Aktuar dazu Annahmen über künftige Austritte, Entwicklung von Löhnen und Renten etc. in seine Bewertung mit einzubeziehen (IAS 19, § 72–91). Die benötigten technischen Grundlagen können z. B. durch einen Ausbau des klassischen Formelapparats der Eidgenössischen Versicherungskasse (EVK 90) erstellt werden. Wir wollen einige Punkte ansprechen, die in diesem Zusammenhang wichtig sind.

2 Austrittswahrscheinlichkeiten

Vorab sei die naheliegendste Möglichkeit erwähnt, die Austrittswahrscheinlichkeiten s_x direkt in die Ordnung der Aktiven einzubauen, d. h. angelehnt an die Notation der EVK 90:

$$l_{x+1}^a = l_x^a(1 - {}^o q_x^a - {}^o i_x - {}^o s_x) \tag{1}$$

(siehe Neuburger (1993), S. 43). Mit dem Kringel ^{o} wird dabei angedeutet, dass alle drei Wahrscheinlichkeiten paarweise voneinander abhängig sind, während die in den EVK 90 abgedruckten abhängigen Aktivensterblichkeiten ${}^*q_x^a$ und Invalidierungswahrscheinlichkeiten ${}^*i_x$ durch den Stern * gekennzeichnet sind. Kein besonderes Kennzeichen haben die unabhängigen (partiellen) Wahrscheinlichkeiten. Die Darstellungen für ${}^o q_x^a$ und ${}^o i_x$ werden nachher in Formel (4) gegeben.

Eine zweite Möglichkeit zur Berücksichtigung von Austrittswahrscheinlichkeiten besteht darin, diese als partielle Wahrscheinlichkeiten in den Formeln für die

Anwartschaften einzubauen. Die Aktivenordnung bleibt unverändert und wird gedanklich so aufgebaut:

$$„l^a_{x+1} = l^a_x(1 - {}^*q^a_x - {}^*i_x)(1 - s_x)“ \tag{2}$$

(siehe auch Müller (1973), S. 132). Mit diesem Vorgehen lassen sich auch eintrittsaltersabhängige s_x leicht in das Modell integrieren.

Selbst wenn die Austrittswahrscheinlichkeiten s_x schon als partielle gemessen wurden (je Alter x Anzahl der Austritte im Beobachtungszeitraum bezogen auf das Mittel aus Anfangsbestand und Endbestand ergänzt um die Austritte), werden in den Formeln für die Anwartschaften gleichwohl auch die abhängigen Wahrscheinlichkeiten ${}^o s_x$ benötigt. Man kann sich hier an Zwinggi (1945), Formel (36) auf Seite 25 halten, z.B. ist

$$\begin{aligned} {}^o q^a_x &\approx q^a_x\left(1 + \frac{1 - (1 - i_x)(1 - s_x)}{2}\right) \\ &\approx q^a_x\left(1 - \frac{1}{2}i_x\right)\left(1 - \frac{1}{2}s_x\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Bei Verwendung der zweiten Näherung erhalten wir so

$${}^o q^a_x \approx {}^* q^a_x\left(1 - \frac{1}{2}s_x\right), \qquad {}^o i_x \approx {}^* i_x\left(1 - \frac{1}{2}s_x\right), \tag{4}$$

und mit Hilfe der ersten Näherung (q, i, s permutiert)

$${}^o s_x \approx s_x\left(1 + \frac{1 - (1 - {}^*q^a_x - {}^*i_x)}{2}\right) = s_x\left(1 - \frac{1}{2}({}^*q^a_x + {}^*i_x)\right), \tag{5}$$

was den Vorteil hat, auf die tabellierten ${}^*q^a_x$ und ${}^*i_x$ greifen zu können. Umgekehrt kann man, wenn die Austrittswahrscheinlichkeiten ${}^o s_x$ abhängig von Sterblichkeit und Invaliderung gemessen wurden (je Alter x Anzahl der Austritte im Beobachtungszeitraum bezogen auf das Mittel aus Anfangsbestand und Endbestand ergänzt um alle Abgänge) via

$$s_x \approx {}^o s_x\left(1 + \frac{1}{2}({}^*q^a_x + {}^*i_x)\right) \tag{6}$$

näherungsweise die partiellen Austrittswahrscheinlichkeiten berechnen.

Zur Bestimmung von Austrittswahrscheinlichkeiten siehe z. B. Wüthrich (1996).

3 Lohn- und Rentenentwicklung

Bezeichne yl_x^a den Lohnindexstand im Alter x auf der Basis $yl_{20}^a = 1$. Damit lässt sich eine Lohnkarriere modellieren, die in jüngeren Jahren stärker ausgeprägt sein mag als in den Jahren vor der Pensionierung. Einfacher wäre natürlich eine gleichmässige Lohnsteigerungsrate, was bekanntlich nur der Anwendung eines anderen technischen Zinssatzes gleichkommt. Dies entspräche aber je nach der konkreten Situation nicht unbedingt den Vorgaben „ ... take account of inflation, seniority, promotion and other relevant factors ...“(IAS 19 § 84).
$yr \geq 1$ sei der für alle Alter x identische Rentenerhöhungsfaktor. Er wird bei den Kommutationszahlen für laufende Renten, D_x^i, D_y^w und D_x, sowie für Anwartschaften in den Ordnungen der Rentner, D_x^{iw}, D_x^k, ..., zum Diskontierungsfaktor multipliziert, z. B. $D_x^i = (v \cdot yr)^{\overline{x}} l_x^i$.

4 Kapitaloption

Nicht explizit in den IAS 19 erwähnt ist die Kapitaloption, etwa dass der frisch Pensionierte statt der fälligen Altersrente den entsprechenden Barwert inklusive Anwartschaften auf Hinterlassenenrenten beziehen kann. Unter den „ ... variables that will determine the ultimate cost of providing post-employment benefits ...“(IAS 19 § 73) ist aber auch die Optionshäufigkeit zu verstehen, sofern die Kapitaloption im konkreten Fall reglementarisch vorgesehen ist (besonders in Sparkassen) und davon merklich Gebrauch gemacht wird.

5 Beispiele

Hier einige Beispiele, wie sich das Zusammenspiel der vorher diskutierten Faktoren im Formalismus niederschlägt. Sie beziehen sich auf lohnproportionale Vorsorgeleistungen. Angesichts der grossen Gestaltungsfreiheit in der beruflichen Vorsorge sind je nach Art der Vorsorgeeinrichtung modifizierte Formeln anzuwenden, z. B. bei fixen oder vom projizierten Alterskapital abhängigen Leistungen (Sparkasse). Unter Verwendung von

$$f_x = \prod_{u<x} (1 - s_u) \tag{7}$$

ergibt sich für die diskontierten Aktiven:

$$D_x^a = v^{\overline{x}} l_x^a y l_x^a f_x \, . \tag{8}$$

Die lebenslängliche Invalidenrente als Beispiel für Kommutationszahlen zu Anwartschaften:

$$D_x^{ai} = v^{\overline{x}+0.5} l_x^a y l_{x+0.5}^a f_x {}^o i_x \overset{<i(12)}{\ddot{a}}_{x+0.5} \,, \tag{9}$$

mit Berücksichtigung der durchschnittlich in der Mitte des Altersjahrs (am 1. Januar) anfallenden Lohnerhöhung. Man beachte den Kringel am ${}^o i_x$. Formal kaum verändert zeigt sich die Anwartschaft auf Rücktrittsrente

$$_{s-x|}\alpha_x^a = \frac{D_s^a}{D_x^a} \overset{<(12)}{\ddot{a}}_s \quad . \tag{10}$$

6 Anwartschaft auf Austrittsleistung

Nach IAS 19 § 136 ist die Austrittsleistung (erworbene Ansprüche beim Verlassen der Vorsorgeeinrichtung) ebenfalls eine zu bewertende Vorsorgeverpflichtung. Sie kann mit Hilfe der Kommutationszahlen

$$D_x^{as} = v^{\overline{x}+0.5} l_x^a f_x {}^o s_x AL_{x+0.5} \tag{11}$$

berechnet werden. Die Austrittsleistung AL, die notabene auch vom Alter beim Eintritt in die Vorsorgeeinrichtung und der dannzumal eingebrachten Eintrittsleistung abhängt, wird wie im Schema der EVK 90 üblich auf die Mitte des Altersjahrs kalkuliert. Nur wenn diese proportional zum versicherten Lohn wächst (Leistungsprimat), kann in die Kommutationszahl auch noch die Lohnentwicklung integriert werden,

$$D_x^{as} = v^{\overline{x}+0.5} l_x^a y l_{x+0.5}^a f_x {}^o s_x BEL_{x+0.5} \,, \tag{12}$$

mit dem Barwert der erworbenen Leistungen BEL ($= AL$ in der Leistungsprimatkasse). Andernfalls (Sparkasse) ist die künftige lohnbedingte Erhöhung der Austrittsleistung im Term $AL_{x+0.5}$ zu integrieren. Dazu muss je Versichertem das im aktuellen Alter gegebene Altersguthaben von Jahr zu Jahr unter Berücksichtigung der Lohnentwicklung fortgeschrieben werden. Die Kommutationszahlen lauten somit

$$D_{x+t}^{as} = v^{\overline{x}+t+0.5} l_{x+t}^a f_{x+t} {}^o s_{x+t} PAG_{x,t+0.5} \,, \tag{13}$$

für $t = 0, \ldots, s-x-1$, mit dem vom Alter x bis zum Alter $x+t+0.5$ projizierten, d. h. um Zinsen und Altersgutschriften erhöhten Altersguthaben PAG ($= AL$ in der Sparkasse). Schliesslich ist die Anwartschaft auf Austrittsleistung

$$\alpha^{as}_{x:\overline{s-x}|} = \frac{1}{D^a_x}\sum_{u=x}^{s-1} D^{as}_u\,, \quad \text{bzw.} \quad \alpha^{as}_{x:\overline{s-x}|} = \frac{1}{D^a_x}\sum_{t=0}^{s-x-1} D^{as}_{x+t}\,, \tag{14}$$

letztere Formel unter Verwendung einer Aktivenordnung mit $yl^a_x \equiv 1$.

7 Projected Benefit Obligation

Die Projected Benefit Obligation (PBO) ist der zeitanteilige Barwert der Vorsorgeverpflichtungen auf Basis der oben beschriebenen erweiterten Grundlagen. Im Leistungsprimat entspricht dies dem mit den erweiterten Grundlagen berechneten BEL plus Anwartschaft auf Austrittsleistung.
Die Sparkasse mit Risikoschutz, eigentlich eine Beitragsprimatlösung, wird kraft IAS 19 § 26 zum Leistungsprimat erhoben – wegen der garantierten Verzinsung mit 4 % und dem BVG-Umwandlungssatz (uw_s) von 7.2 % für das Altersguthaben im Rücktrittsalter $s = 65$ (Männer) bzw. 62 (Frauen). Die Bestimmung der zeitanteiligen Leistungen nach IAS 19 § 67–71 lässt in diesem Fall einen Interpretationsspielraum. Als Beispiel für eine mögliche Bewertung der Altersrente sei folgende Formel gegeben, in der die voraussichtliche Altersrente $PAG_{x,s}uw_s$ in gerader Linie auf die Dienstdauer ab dem Eintrittsalter x_0 aufgeteilt wird:

$$\frac{D^a_s}{D^a_x}\,\frac{x-x_0}{s-x_0} PAG_{x,s}uw_s\left[\ddot{a}^{(12)}_s + 0.6\alpha^w_s + 0.2\alpha^{ap}_s\right], \tag{15}$$

unter Verwendung einer Aktivenordnung mit $yl^a_x \equiv 1$.

8 Die mittlere restliche Dienstdauer

Diese wird benötigt, um den Anteil der im Rechnungsjahr erfolgswirksamen aktuariellen Gewinne oder Verluste zu ermitteln, welche z. B. infolge Abweichungen von den angenommenen Rechnungsgrundlagen entstehen (IAS 19 § 92–95). Man gewinnt sie aus der vollständigen temporären Lebenserwartung in der Aktivenordnung unter Berücksichtigung der Austritte, indem man für alle, die das Rücktrittsalter nicht erreichen, ein halbes Jahr abzieht (d. h. Tod, Invalidität oder Austritt auf Mitte Jahr angenommen), also

$$\overset{o}{e}{}^a_{x:\overline{s-x}|} = \frac{1}{l^a_x f_x}\sum_{u=x}^{s-1} l^a_u f_u - \frac{1}{2}\,\frac{l^a_x f_x - l^a_s f_s}{l^a_x f_x}\,. \tag{16}$$

Literatur

Eidgenössische Versicherungskasse (1992) *Technische Grundlagen der Eidgenössischen Versicherungskasse 1990.* Bern.
International Accounting Standards Committee (1999) *International Accounting Standards 1999.* London.
Müller, Nikolaus E. (1973) *Einführung in die Mathematik der Pensionsversicherung.* München.
Neuburger, Edgar (1993) *Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen.* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
Wüthrich, Marcel (1996) Herleitung von Austrittswahrscheinlichkeiten aus Vorsorgeeinrichtungen. *Mitteilungen der Schweizerischen Aktuarvereinigung* **2**, 153–169.
Zwinggi, Ernst (1945) *Versicherungsmathematik.* Birkhäuser, Basel.

Christian Wagner
Wagner & Kunz Aktuare
Steinenbachgässlein 27
CH-4051 Basel
E-mail address: wagner@aktuare.ch