

# Performanceweitergabe bei einer Mindestverzinsung

Autor(en): **Deprez, O. / Furrer, C. / Gerber, H.U.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaire = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): - **(2001)**

Heft 2

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967350>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

O. DEPREZ, C. FURRER, H. U. GERBER, Zürich, Lausanne

### Performanceweitergabe bei einer Mindestverzinsung

Im Rahmen der obligatorischen beruflichen Vorsorge besteht in der Schweiz eine Vorschrift betreffend die Mindestverzinsung der individuellen Vorsorgekapitalien (Altersguthaben). Dieser Mindestzinssatz beträgt 4 % seit dem Inkrafttreten des entsprechenden Gesetzes (BVG) am 1.1.1985. Es stellt sich im Zusammenhang mit dieser Mindestverzinsung die Frage, wie hoch und in welcher Form die Beteiligung an einer allfälligen Überperformance festgelegt werden bzw. wie viel von der erzielten Überperformance von der Pensionskasse zurückbehalten werden soll.

#### 1 Das Modell

Wir gehen davon aus, dass die stetige Rendite des gesamten Vermögens einer Pensionskasse normalverteilt ist. Sei  $Y$  der realisierte Jahreszins. Dann gilt

$$Y = e^X - 1, \quad [1]$$

wobei  $X$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  ist.  $1 + Y$  ist dann lognormalverteilt mit Erwartungswert  $1 + \mu^*$  und Standardabweichung  $\sigma^*$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} \mu^* &= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1, \\ \sigma^* &= \sqrt{e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)}. \end{aligned} \quad [2]$$

**Beispiel** Für  $\mu^* = 6\%$  und  $\sigma^* = 10\%$  erhält man  $\mu = 5.383861\%$  und  $\sigma = 9.413072\%$ .

Sei  $i$  der Mindestzins auf den individuellen Vorsorgekapitalien. Falls die Verzinsung der individuellen Vorsorgekapitalien immer zu  $Y$ , aber mindestens zu  $i$  erfolgen würde, so ergäbe sich ein erwarteter Zinssatz auf den Vorsorgekapitalien, welcher höher als  $\mu^*$  wäre. Eine solche Performanceweitergabe ist deshalb nicht sinnvoll.

## 2 Variante 1 der Performanceweitergabe

Sei UP die Überperformance (gemessen an der angenommenen Mindestverzinsung von  $i$ ). Es gilt:

$$\text{UP} = \text{Max}(Y - i, 0) = (Y - i)^+. \quad [3]$$

Eine natürliche Performanceweitergabe mit einer Zinsgarantie in der Höhe  $i$  ist die folgende:

$$Z = i + f \cdot \text{UP}. \quad [4]$$

Hier ist  $Z$  der weiterzugebende Zinssatz (siehe Graphik 1, "Variante 1").

Es gilt nun, den Faktor  $f$  zu ermitteln, wobei folgendes Postulat erfüllt sein soll:

$$E[Z] = \mu^*. \quad [5]$$

Mit [1], [3] und [4] ergibt sich daraus die Gleichung

$$i + f \cdot E[(e^X - 1 - i)^+] = E[e^X - 1], \quad [6]$$

und somit

$$f = \frac{E[e^X] - 1 - i}{E[(e^X - 1 - i)^+]}. \quad [7]$$

Für den Zähler von [7] erhält man

$$E[e^X] - 1 - i = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1 - i = \mu^* - i. \quad [8]$$

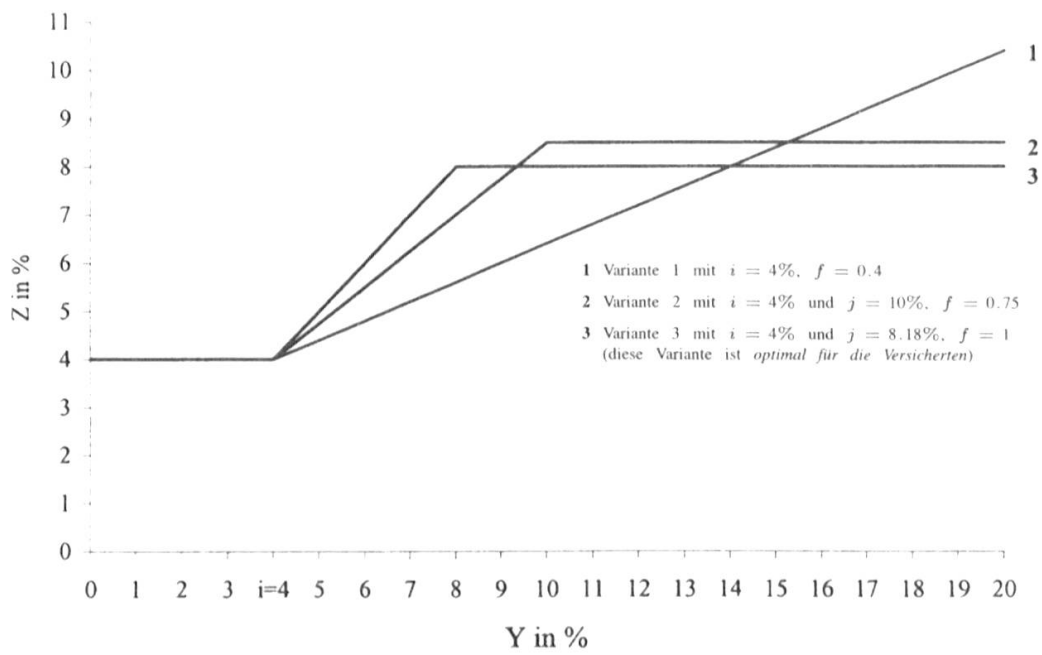
Mit beispielsweise Gerber (1997), Seite 162, Exercise 7,  $\beta = 1 + i$ , erhält man für den Nenner

$$\begin{aligned} E[(e^X - 1 - i)^+] &= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\log(1+i) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right] \\ &\quad - (1+i) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\log(1+i) - \mu}{\sigma}\right) \right], \end{aligned} \quad [9]$$

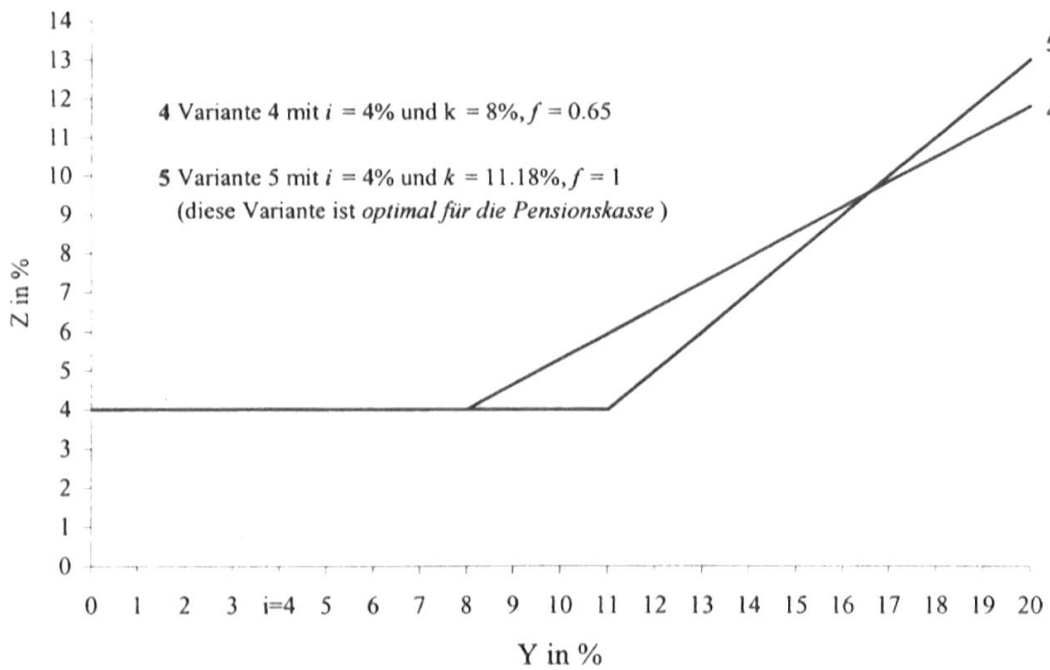
und damit gilt

$$\begin{aligned} f &= (\mu^* - i) / \left\{ (1 + \mu^*) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\log(1+i) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - (1+i) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\log(1+i) - \mu}{\sigma}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad [10]$$

wobei wir noch [2] benützt haben.



Grafik 1



Grafik 2

### Beispiele

a) Für  $i = 4\%$ ,  $\mu^* = 6\%$ ,  $\sigma^*$  diverse Werte gemäss untenstehender Tabelle

$\sigma^*$	$f$	$\sigma^*$	$f$
1 %	0.996	10 %	0.398
2 %	0.925	11 %	0.370
3 %	0.818	12 %	0.345
4 %	0.720	13 %	0.324
5 %	0.638	14 %	0.305
6 %	0.571	15 %	0.288
7 %	0.516	16 %	0.273
8 %	0.470	17 %	0.259
9 %	0.431	18 %	0.247

b) Für  $\mu^* = 6\%$ ,  $\sigma^* = 10\%$ ,  $i$  diverse Werte gemäss untenstehender Tabelle

$i$	$f$
1 %	0.726
2 %	0.643
3 %	0.535
4 %	0.398
5 %	0.223
6 %	0.000

Für das Beispiel  $\mu^* = 6\%$ ,  $\sigma^* = 10\%$  und  $i = 4\%$  gilt also  $f = 0.4$  (0.398). Wird  $f$  kleiner als 40 % gewählt, wird ein Zinssatz  $Z$  weitergegeben, welcher im Erwartungswert kleiner als  $Y$  ist; wird  $f$  grösser als 40 % gewählt, wird ein Zinssatz  $Z$  weitergegeben, welcher im Erwartungswert grösser als  $Y$  ist. Das Beispiel a) zeigt, dass der Faktor  $f$  (und somit die Performanceweitergabe) stark von  $\sigma^*$  abhängt.

### 3 Variante 2 der Performanceweitergabe

Die Idee ist, die Überperformance an einem Punkt  $j > i$  zu stützen, wodurch ein grösserer Wert von  $f$  resultiert. Der weiterzugebende Zins  $Z$  ist jetzt folgendermassen definiert (siehe Graphik 1, "Variante 2"):

$$\begin{aligned} Z = i &= (1 - f) \cdot i + f \cdot i && \text{für } Y \leq i, \\ Z = i + f \cdot (Y - i) &= (1 - f) \cdot i + f \cdot Y && \text{für } i < Y \leq j, \\ Z = i + f \cdot (j - i) &= (1 - f) \cdot i + f \cdot j && \text{für } Y > j. \end{aligned} \quad [11]$$

Zur Berechnung seines Erwartungswertes schreibt man  $Z$  zweckmässigerweise als

$$Z = i + f \cdot (Y - i)^+ - f \cdot (Y - j)^+. \quad [12]$$

Mit dem Postulat [5] erhält man nun

$$f = \frac{\mu^* - i}{E[(Y - i)^+] - E[(Y - j)^+]}. \quad [13]$$

Der Nenner von [13] lässt sich unter Anwendung von [9] berechnen.

**Beispiel** Für  $i = 4\%$ ,  $j = 10\%$ ,  $\mu^* = 6\%$ ,  $\sigma^*$  diverse Werte gemäss untenstehender Tabelle

$\sigma^*$	$f$	$\sigma^*$	$f$
1 %	0.996	10 %	0.752
2 %	0.933	11 %	0.750
3 %	0.867	12 %	0.748
4 %	0.824	13 %	0.747
5 %	0.798	14 %	0.747
6 %	0.781	15 %	0.747
7 %	0.770	16 %	0.747
8 %	0.762	17 %	0.748
9 %	0.756	18 %	0.749

Man bemerkt, dass der Faktor  $f$  in diesem Beispiel bedeutend weniger stark von  $\sigma^*$  abhängt als im Beispiel a) des 2. Abschnittes (Spezialfall der Variante 2 mit  $j = \infty$ ).

#### 4 Variante 3 der Performanceweitergabe

Ein weiterer Ansatz der Performanceweitergabe ist der, dass man in der Formel [11]  $f = 1$  vorgibt und den entsprechenden Stützpunkt  $j$  bestimmt (siehe Graphik 1, "Variante 3").

**Beispiele** Für  $i = 4\%$ ,  $\mu^* = 5\%$ ,  $6\%$ ,  $7\%$  und  $8\%$  und  $\sigma^*$  diverse Werte gemäss untenstehender Tabelle erhält man so für den Stützpunkt  $j$  folgende Werte

$\sigma^*$ \backslash $\mu^*$	5 %	6 %	7 %	8 %
1 %	6.015 %	8.046 %	10.095 %	12.163 %
2 %	6.022 %	8.059 %	10.112 %	12.183 %
3 %	6.030 %	8.073 %	10.133 %	12.208 %
4 %	6.038 %	8.089 %	10.154 %	12.236 %
5 %	6.045 %	8.104 %	10.177 %	12.265 %
6 %	6.053 %	8.120 %	10.200 %	12.295 %
7 %	6.061 %	8.136 %	10.224 %	12.326 %
8 %	6.069 %	8.152 %	10.248 %	12.358 %
9 %	6.078 %	8.168 %	10.272 %	12.389 %
10 %	6.086 %	8.184 %	10.296 %	12.421 %
11 %	6.094 %	8.201 %	10.320 %	12.454 %
12 %	6.102 %	8.217 %	10.345 %	12.487 %
13 %	6.111 %	8.234 %	10.370 %	12.520 %
14 %	6.119 %	8.251 %	10.395 %	12.553 %
15 %	6.127 %	8.267 %	10.420 %	12.586 %
16 %	6.136 %	8.284 %	10.446 %	12.620 %
17 %	6.144 %	8.301 %	10.471 %	12.654 %
18 %	6.153 %	8.319 %	10.497 %	12.688 %

In diesen Beispielen hängt der Stützpunkt  $j$  nicht sehr stark von  $\sigma^*$  ab, und es gilt die Faustregel

$$j \approx 2 \cdot \mu^* - i. \quad [14]$$

Die Formel [14] wäre exakt (siehe dazu den Beweis im Anhang), falls die Verteilung von  $Y$  bezüglich  $\mu^*$  symmetrisch wäre. Die Lognormalverteilung ist in diesen Beispielen *näherungsweise* symmetrisch, was die Approximation [14] erklärt.

## 5 Variante 4 der Performanceweitergabe

Eine alternative Idee ist, die Überperformance erst nach einem gewissen Sockel  $k > i$  weiterzugeben. Die Performanceweitergabe ist jetzt definiert als

$$Z = i + f \cdot (Y - k)^+, \quad [15]$$

siehe Graphik 2, "Variante 4". Für gegebenes  $k$  wird der Wert von  $f$  aufgrund des Postulats [5] ermittelt. Der resultierende Ausdruck für  $f$  ist wie in Formel [10], ausser, dass im Nenner "i" durch "k" ersetzt werden muss.

**Beispiele** Für  $i = 4\%$ ,  $\mu^* = 6\%$ ,  $k = 5\%$ ,  $6\%$ ,  $7\%$  und  $8\%$  und  $\sigma^*$  diverse Werte gemäss untenstehender Tabelle erhält man so für  $f$  folgende Werte

$\sigma^*$ \backslash $k$	5 %	6 %	7 %	8 %
5 %	0.792	1.003	1.297	1.712
6 %	0.686	0.836	1.033	1.295
7 %	0.605	0.717	0.858	1.038
8 %	0.541	0.628	0.734	0.864
9 %	0.489	0.558	0.641	0.740
10 %	0.446	0.503	0.569	0.646
11 %	0.410	0.457	0.511	0.573
12 %	0.380	0.419	0.464	0.515
13 %	0.354	0.387	0.425	0.468
14 %	0.331	0.360	0.392	0.429
15 %	0.311	0.336	0.364	0.395
16 %	0.293	0.315	0.340	0.367
17 %	0.277	0.297	0.319	0.342
18 %	0.263	0.281	0.300	0.321

Bemerkung: Varianten mit  $f > 1$  würde man in der Praxis sicher vermeiden, denn in diesen Varianten müsste die Pensionskasse das Risiko eines Verlustes nicht nur bei einer ungenügenden, sondern auch bei einer sehr hohen Performance tragen!



## 6 Variante 5 der Performanceweitergabe

Ein weiterer Ansatz der Performanceweitergabe ist der, dass man in der Formel [15]  $f = 1$  vorgibt und den entsprechenden Sockel  $k$  bestimmt. Es gilt also

$$Z = i + (Y - k)^+, \quad [16]$$

siehe Graphik 2, "Variante 5".

**Beispiele** Für  $i = 4\%$ ,  $\mu^* = 5\%$ ,  $6\%$ ,  $7\%$  und  $8\%$  und  $\sigma^*$  diverse Werte gemäss untenstehender Tabelle erhält man so für den Sockel  $k$  folgende Werte

$\sigma^* \backslash \mu^*$	5 %	6 %	7 %	8 %
1 %	4.099 %	4.008 %	4.000 %	4.000 %
2 %	4.621 %	4.195 %	4.059 %	4.015 %
3 %	5.421 %	4.626 %	4.289 %	4.130 %
4 %	6.405 %	5.237 %	4.682 %	4.380 %
5 %	7.529 %	5.987 %	5.209 %	4.752 %
6 %	8.768 %	6.850 %	5.846 %	5.230 %
7 %	10.107 %	7.810 %	6.577 %	5.798 %
8 %	11.537 %	8.856 %	7.392 %	6.448 %
9 %	13.051 %	9.980 %	8.281 %	7.170 %
10 %	14.642 %	11.175 %	9.239 %	7.958 %
11 %	16.309 %	12.438 %	10.261 %	8.807 %
12 %	18.048 %	13.765 %	11.342 %	9.713 %
13 %	19.858 %	15.153 %	12.481 %	10.673 %
14 %	21.736 %	16.601 %	13.674 %	11.685 %
15 %	23.682 %	18.106 %	14.920 %	12.746 %
16 %	25.696 %	19.668 %	16.216 %	13.855 %
17 %	27.776 %	21.286 %	17.563 %	15.010 %
18 %	29.924 %	22.958 %	18.959 %	16.211 %

## 7 Optimale Performanceweitergabe

Wir haben fünf Varianten der Performanceweitergabe präsentiert. Bei den Varianten 1, 3 und 5 hat  $Z$  eine einfache Form (und ist durch das Postulat [5] eindeutig definiert); bei den Varianten 2 und 4 handelt es sich um einparametrische Familien. Allgemein kann eine Performanceweitergabe mit einer Mindestverzinsung in der

Höhe  $i$  definiert werden durch eine Zufallsvariable  $Z$  (welche eine Funktion von  $Y$  ist), mit den Eigenschaften

$$Z \geq i, \quad E[Z] = \mu^*. \quad [17]$$

Man kann sich nun fragen, welches  $Z$  für die Pensionskasse am nützlichsten ist. Zu diesem Zweck postulieren wir eine Nutzenfunktion  $u(x)$ , d. h. eine Funktion mit  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$ . Hier ist  $x$  die Differenz aus dem realisierten und dem weitergegebenen Zinssatz. Der erwartete Nutzen der Pensionskasse ist dann

$$E[u(Y - Z)]. \quad [18]$$

Wir werden zeigen, dass dieser Ausdruck durch [16] maximiert wird. Variante 5 der Performanceweitergabe ist also in diesem Sinne optimal.

Zum Beweis sei  $Z$  eine beliebige Zufallsvariable, welche die beiden Bedingungen von [17] erfüllt und sei

$$Z_k = i + (Y - k)^+, \quad [19]$$

gemäss Variante 5. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} Y - Z_k &= Y - i && \text{für } Y \leq k, \\ Y - Z_k &= k - i && \text{für } Y > k. \end{aligned} \quad [20]$$

Indem man zuerst die Konkavität der Funktion  $u(x)$  benützt und dann zusätzlich für  $Y - Z_k$  die spezielle Form [20], erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} u(Y - Z) &\leq u(Y - Z_k) + u'(Y - Z_k) \cdot (Z_k - Z) \\ &\leq u(Y - Z_k) + u'(k - i) \cdot (Z_k - Z). \end{aligned} \quad [21]$$

Im Erwartungswert ergibt sich daher die Ungleichung

$$E[u(Y - Z)] \leq E[u(Y - Z_k)], \quad [22]$$

was zeigt, dass  $Z_k$  den Ausdruck [18] tatsächlich maximiert.

Man kann sich auch fragen, welche Performanceweitergabe für die Versicherten optimal ist, d. h. welches  $Z$  deren erwarteten Nutzen

$$E[u(Z)] \quad [23]$$

maximiert, wobei  $u(x)$  eine geeignete Nutzenfunktion ist.

Falls man an  $Z$  nur die Bedingungen [17] stellt, dann wird [23] maximal für den konstanten Zinssatz  $Z \equiv \mu^*$ .

Sinnvollerweise stellen wir daher für  $Z$  die etwas stärkeren Bedingungen:

$$\begin{aligned} Z &= i && \text{für } Y \leq i, \\ i \leq Z \leq Y && \text{für } Y > i, \\ E[Z] &= \mu^*. \end{aligned} \tag{24}$$

In diesem Fall ist die Variante 3 optimal.

Zum Beweis sei  $Z$  eine beliebige Zufallsvariable, welche [24] erfüllt und  $Z_j$  der weiterzugebende Zinssatz gemäss Variante 3, d. h.

$$\begin{aligned} Z_j &= i && \text{für } Y \leq i, \\ Z_j &= Y && \text{für } i < Y \leq j, \\ Z_j &= j && \text{für } Y > j. \end{aligned} \tag{25}$$

Indem man wiederum die Konkavität der Funktion  $u(x)$  benützt und dann zusätzlich für  $Z_j$  die spezielle Form [25], erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$u(Z) \leq u(Z_j) + u'(Z_j) \cdot (Z - Z_j) \leq u(Z_j) + u'(j) \cdot (Z - Z_j). \tag{26}$$

Im Erwartungswert ergibt sich

$$E[u(Z)] \leq E[u(Z_j)], \tag{27}$$

was zeigt, dass [23] tatsächlich durch  $Z_j$  maximiert wird.

## 8 Bemerkungen

1. Falls sich die Pensionskasse gegen das Anlagerisiko auf dem Finanzmarkt absichert, gelten die gemachten Berechnungen nach wie vor, wobei aber jetzt  $\mu^*$  der Wert ist, der dem sogenannten *risikoneutralen Mass* entspricht. Mit diesem Mass werden die Preise von derivativen Finanzinstrumenten berechnet.
2. Obwohl die oben beschriebenen Methoden der Performancweitergabe im Erwartungswert auf die erwartete Performance führen, darf eine Pensionskasse eine solche Methode nicht unbesehen anwenden. Erstens werden sich die gewählten Parameter im Laufe der Zeit ändern, und zweitens ist der absehbare Zeithorizont für den Ausgleich der Abweichungen zum Erwartungswert ("Gesetz der Grossen Zahlen") gering. Die Pensionskasse wird also gut daran tun, vorerst Reserven zu bilden, bevor sie einen Anteil einer allfälligen Überperformance weitergibt.
3. Die Optimalität der Variante 3 und der Variante 5 gilt allgemein, d. h. auch wenn  $Y$  eine beliebige Verteilung hat.

### Anhang (zum Abschnitt 4)

Falls die Verteilung von  $Y$  symmetrisch ist bezüglich dem Erwartungswert  $\mu^*$ , ist die Formel

$$j = 2 \cdot \mu^* - i \quad \text{[I]}$$

exakt. Dies kann wie folgt gezeigt werden. Wir setzen

$$i = \mu^* - \Delta \quad \text{und} \quad j = \mu^* + \Delta. \quad \text{[II]}$$

Damit ist gemäss Formel [12] mit  $f = 1$

$$E[Z] = \mu^* - \Delta + E[(Y - \mu^* + \Delta)^+] - E[(Y - \mu^* - \Delta)^+]. \quad \text{[III]}$$

Aufgrund der Annahme ist die Verteilung von  $(Y - \mu^*)$  identisch mit der Verteilung von  $-(Y - \mu^*)$ . Somit folgt

$$E[Z] = \mu^* - \Delta + E[(Y - \mu^* + \Delta)^+] - E[(-Y + \mu^* - \Delta)^+]. \quad \text{[IV]}$$

Allgemein gilt für jede Zufallsvariable  $V$

$$V^+ - (-V)^+ = V. \quad \text{[V]}$$

Mit

$$V = Y - \mu^* + \Delta \quad \text{[VI]}$$

erhalten wir daher

$$\begin{aligned} E[Z] &= \mu^* - \Delta + E[Y - \mu^* + \Delta] \\ &= \mu^* - \Delta + \mu^* - \mu^* + \Delta \\ &= \mu^*, \end{aligned} \quad \text{[VII]}$$

womit gezeigt ist, dass das Postulat [5] für den Stützpunkt  $j = 2 \cdot \mu^* - i$  erfüllt ist.

**Referenz**

Gerber, H. U. (1997) *Life Insurance Mathematics*, Third edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Hans U. Gerber  
Ecole des H.E.C.  
Université de Lausanne  
CH-1015 Lausanne  
E-Mail-Adresse: HGerber@hec.unil.ch

Olivier Deprez und  
Christoph Furrer  
Neustadtgasse 7  
CH-8001 Zürich  
E-Mail-Adresse: olivier.deprez@deprez.ch

## **Zusammenfassung**

Bei einer vorgegebenen Mindestverzinsung stellt sich die Frage, wie viel von einer allfälligen Überperformance weitergegeben werden kann, damit im Erwartungswert eine Verzinsung erfolgt, die der erwarteten Performance entspricht.

## **Résumé**

Quelle fraction de l'excédent du taux de rendement réalisé par rapport au taux d'intérêt garanti peut être créditée, de telle sorte que les espérances mathématiques du taux de rendement réalisé et du taux d'intérêt crédité soient égales?

## **Summary**

What part of the possible excess of the realized rate of return over the guaranteed rate of interest can be credited, such that the expectations of the realized rate of return and the credited rate of interest are equal?

