

# Duration und Zinssensitivität bei Lebensversicherungen

Autor(en): **Müller, Thomas**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): - **(2010)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967361>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Duration und Zinssensitivität bei Lebensversicherungen

### 1. Einleitung

In der Schweiz wie auch in vielen anderen Ländern wird von der Aufsichtsbehörde ein fester Zinssatz als sogenannter technischer Zins vorgegeben. Dieser Zinssatz bestimmt die Tarifierung und insbesondere die Reservierung von neu abgeschlossenen Lebensversicherungen. Dabei stellt sich die Frage, wie Prämie und Reserve bei Änderung des Zinssatzes variieren. Eine zentrale Frage bei Lebensversicherungen ist, wie viel die Ausfinanzierung der älteren Tarifgenerationen zu höheren technischen Zinsen kostet. Bei Pensionskassen interessiert, welche Mittel die Umstellung der Reserven auf tiefere Zinsen erfordert.

Diesen Fragen ist man auch schon viel früher mit den Mitteln der Differentialrechnung nachgegangen (siehe [Z], [S]). Die Finanz- und Bankenwelt ist inzwischen mit der Einführung von intuitiv gut verständlichen Begriffen wie Duration und Dispersion vorangegangen. Der grosse Nutzen dieser Konzepte liegt in der Verbindung von Analysis (Ableitung nach dem Zins) und Geometrie (Zahlungsschwerpunkt). Mit einer Näherungsformel zur Bestimmung der Zinssensitivität der Reserve eines Lebenportefeuilles werden in dieser Arbeit die finanzmathematischen Konzepte auch für die Passivseite, dem angestammten Gebiet der Aktuar, eingesetzt.

Diese Arbeit bleibt in der sogenannten deterministischen Sicht der Lebensversicherung und beschränkt sich auf die Erwartungswerte der cash-flows.

### 2. Zinssensitivität von deterministischen cash-flow-Barwerten

#### a. Ableitungen von cash-flow-Barwerten und deren Duration nach dem Zinssatz

Gegeben sei ein cash-flow  $Z_t$  mit Zahlung des Betrages  $Z_t$  nach  $t$  Jahren ( $t \geq 0$ ). Der Barwert des cash-flows zu einem Zinssatz  $i$  und Diskontsatz  $\nu = \nu(i) = 1/(1+i)$  ist folgendermassen definiert:

$$P = P(Z) = P(i) = P(i, Z) = \sum_{t \geq 0} \frac{Z_t}{(1+i)^t} = \sum_{t \geq 0} \nu^t \cdot Z_t.$$

Die Entwicklung von  $P(i)$  in eine Taylor-Reihe um den Zinssatz  $i_0$  mit  $\Delta i = i - i_0$

$$P(i_0 + \Delta i) = P(i_0) + P'(i_0) \cdot \Delta i + 1/2 P''(i_0) \cdot \Delta i^2 + 1/6 P'''(i_0) \cdot \Delta i^3 + \dots$$

führt zu den aus der Finanzmathematik bekannten Begriffen Duration (nach Macaulay)  $D$  und Konvexität  $C$ .

$$D = D(Z) = D(i) = D(i, Z) = -\frac{1+i}{P(i)} \cdot P'(i) \quad C = C(Z) = C(i) = C(i, Z) = \frac{P''(i)}{P(i)}$$

Besteht ein Portefeuille aus mehreren Einzel-cash-flows, so ergeben sich Duration und Konvexität als gewichtetes Mittel dieser Grössen für die einzelnen cash-flows mit den einzelnen cash-flow-Bärwerten als Gewichten.

In der Finanzmathematik werden üblicherweise nur die ersten beiden Terme der Reihenentwicklung, also  $D$  und  $C$ , betrachtet. Die Begriffe Duration  $D$ , Konvexität  $C$  und Dispersion  $\sigma^2$  werden in der Finanzmathematik oft folgendermassen definiert:

$$D = \frac{1}{P} \cdot \sum_{t \geq 0} t \cdot \nu^t \cdot Z_t, \quad C = \frac{\nu^2}{P} \cdot \sum_{t \geq 0} t \cdot (t+1) \cdot \nu^t \cdot Z_t, \quad \sigma^2 = (1+i)^2 C - D - D^2.$$

Die Duration  $D$  kann als „mittlere Dauer“ und die Dispersion  $\sigma^2$  als „Streuung“ der cash-flow-Zahlungen interpretiert werden. Bei einem zero-coupon bond entspricht die Duration der Restlaufzeit und die Dispersion verschwindet. Die Dispersion kann als Mittel der Abweichungsquadrate  $\overline{t_m^2}$  dargestellt werden, mit dem Zeitraum  $t_m = t_m(i) = t - D(i)$  zwischen den einzelnen Zahlungsterminen und dem mittleren Termin der Duration. Wir definieren ganz allgemein

$$\overline{t_m^2}(i, i_0, Z) = \overline{t_m^2}(i, i_0) = \frac{\sum_{t \geq 0} (t_m(i_0))^n \cdot \nu(i)^{t_m(i_0)} Z_t}{\sum_{t \geq 0} \nu(i)^{t_m(i_0)} Z_t}.$$

Für  $i = i_0$  schreiben wir  $\overline{t_m^2} = \overline{t_m^2}(i, i_0, Z)$ . Es gilt:  $\overline{t_m^2} = \sigma^2$ . Im Quotienten verschwindet die Ableitung des Nenners  $\sum_{t \geq 0} \nu(i)^{t_m(i_0)} Z = \nu(i)^{-D(i_0)} P(i) = (1+i)^{D(i_0)} P(i)$ , was in den mit (\*) versehenen Gleichungen benützt wird:

$$\begin{aligned} D' &= \left. \frac{d(D(i))}{di} \right|_{i=i_0} = \left. \frac{d(P^{-1} \sum_{t \geq 0} (t - D(i_0)) \cdot \nu(i)^t \cdot Z_t)}{di} \right|_{i=i_0} \\ &= \left. \frac{d(\overline{t_m^2}(i, i_0))}{di} \right|_{i=i_0} \stackrel{(*)}{=} -\nu \cdot \overline{t_m^2} = -\nu \cdot \sigma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D'' &= \frac{d^2(D(i))}{di^2} \Big|_{i=i_0} = \frac{d^2(\overline{t_m}(i, i_0))}{di^2} \Big|_{i=i_0} \\
&= \frac{d(-\nu(i) \cdot \overline{t_m}^2(i, i_0))}{di} \Big|_{i=i_0} \stackrel{(*)}{=} \nu^2 \cdot (\overline{t_m}^3 + \sigma^2).
\end{aligned}$$

b. *Integraldarstellung für die Variation von Barwerten*

Wir interessieren uns dafür, wie der Barwert eines Cash-flows variiert, wenn wir den Zinssatz um  $\Delta i$  von  $i_0$  auf  $i_1$  herauf- oder heruntersetzen und geben im Folgenden Näherungsberechnungen an, die auch für langjährige Cash-flows nur wenig von der genauen Variation abweichen. Mit unserem multiplikativen Ansatz erhalten wir bessere Näherungen als mit der additiven Taylorentwicklung. Wir stützen uns dabei auf die Duration als Ableitung des Logarithmus der cash-flow-Barwerte und auf die Ableitungen der Duration. Setze  $\nu_0 = 1/(1+i_0)$  und  $\nu_1 = 1/(1+i_1)$ , dann gelangen wir mit

$$\ln \frac{P(i_1)}{P(i_0)} = [\ln P(i)]_{i_0}^{i_1} = \int_{i_0}^{i_1} \frac{P'(i)}{P(i)} di = - \int_{i_0}^{i_1} D(i) \cdot \nu di \cong \bar{D} \ln \frac{\nu_1}{\nu_0}$$

zu den folgenden Näherungsformeln für die Zinsvariation von Barwerten:

$$\frac{P(i_1)}{P(i_0)} \cong e^{\ln(\nu_1/\nu_0) \cdot \bar{D}} = (\nu_1/\nu_0)^{\bar{D}},$$

wobei wir eine mittleren Duration  $\bar{D}$  über dem Intervall  $[i_0, i_1]$  ansetzen:

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= \frac{1}{\Delta i} \int_{i_0}^{i_1} (D(i_0) + D'(i_0)(i - i_0) + \frac{D''(i_0)}{2}(i - i_0)^2) di \\
&= D_0 - \frac{\nu_0}{2} \sigma_0^2 \Delta i + \frac{\nu_0^2}{6} (\overline{t_m}^3(i_0) + \sigma_0^2) \Delta i^2,
\end{aligned}$$

mit  $D_0 = D(i_0)$ ,  $\sigma_0^2 = \sigma^2(i_0)$ . Für einen cash-flow mit nur einer Auszahlung, wie beispielsweise bei einem zero-coupon bond, ist die Formel exakt. Die Näherung ist umso ungenauer, je grösser einerseits die Dispersion und andererseits  $\Delta i$  ist. Sind diese Werte hinreichend klein, so kann der Term in  $D''$  ohne grossen Fehler weggelassen werden.

### 3. Reserveänderung bei Zinsvariation

#### a. Differentialgleichung

Bei Versicherungen – seien es einzelne Verträge oder auch ganze Portefeuilles – sind prinzipiell zwei cash-flows zu betrachten: Der cash-flow der Beiträge (Einnahmen)  $B$  und derjenige der Leistungen (Ausgaben)  $L$ . Für die Reservierung sind die Barwerte dieser cash-flows zum Reservezinssatz zu bestimmen. Die Reserve sei als Differenz von Leistungs- und Beitragsbarwert  $V = P(L) - P(B)$  definiert. Die Ableitung der Reserve nach dem Zinssatz ist

$$\begin{aligned} \frac{dV}{di} &= V' = P(L)' - P(B)' \\ &= -\nu \cdot (P(L) \cdot D(L) - P(B) \cdot D(B)) \\ &= -\nu \cdot (V \cdot D(L) + P(B) \cdot (D(L) - D(B))), \end{aligned}$$

wobei  $D(L)$  die Duration des zukünftigen Leistungs-cash-flows und  $D(B)$  die Duration des zukünftigen Beitrags-cash-flows sind.

#### b. Integral zur Bestimmung der Reserveauffüllung

Nimmt man die Koeffizientenfunktionen  $D(L)$ ,  $D(B)$  und  $P(B)$  der obigen Differentialgleichung als konstant, kann man die obige Differentialgleichung einfach lösen. Für Näherungen kann man die Koeffizienten als mittlere Werte in den Intervallen  $[i_0, i_1]$  ansetzen.

$$\bar{D}(Z) = D_0(Z) - 0.5 \cdot \nu_0 \cdot \sigma_0^2(Z) \cdot \Delta i \quad Z = L \text{ oder } B$$

$$\bar{P}(B) = P_0(B) \cdot (1 - 0.5 \cdot \nu_0 \cdot \bar{D}(B) \cdot \Delta i) \quad \text{Beitragsbarwert (mittels Taylor-Reihe)}$$

Das im nächsten Abschnitt aufgeführte Beispiel behandelt ein Leibrentenportefeuille mit sehr langer Duration der Leistungen. Deshalb verwenden wir dort die bessere Näherung einschliesslich der Ableitung der Dispersion.

Die Reserve  $V(i_0)$  zu einem (Reserve)Zinssatz  $i_0$  sei bekannt. Ebenso seien die Beitrags- und Leistungs-cash-flows bekannt und daraus können Duration, Konvexität und Dispersion  $D_0(Z)$ ,  $C_0(Z)$  und  $\sigma_0^2(Z)$  der Beitrags- und Leistungs-cash-flows ( $Z=B$  oder  $L$ ) zum Reservezinssatz  $i_0$  berechnet werden. Dann kann der Auffüllungsbedarf (bei Zinssatzreduktion) respektive die frei werdende Reserve (bei Zinssatzerhöhung) wie folgt bestimmt werden:

$$\Delta V = V(i_1) - V(i_0) \cong \left( V(i_0) + \bar{P}(B) \cdot \frac{\bar{D}(L) - \bar{D}(B)}{\bar{D}(L)} \right) \left( (\nu_1/\nu_0)^{\bar{D}(L)} - 1 \right).$$

c. *Beispiel für Reserveerhöhung bei einem Leibrentenportefeuille*

Die Reserve für den Zinssatz  $i_0 = 4\%$  sei bekannt und man möchte die Reserve mit einem neuen Zinssatz von  $i_0 + \Delta i = 2\%$  respektive den Auffüllungsbedarf  $\Delta V$  bei Reduktion des Zinssatzes um  $2\%$  berechnen. Wir betrachten ein Leibrentenportefeuille mit 3 Versicherten im Alter  $x=20, 40$  und  $60$ . Versichert seien jährlich vorschüssig zahlbare Renten der Höhe 1, zahlbar ab Alter 65. Alle Versicherten zahlen die gleiche Prämie, basierend auf dem Eintrittsalter 20, d. h.

$$\text{Prämie } \pi = 8.98\%$$

Die Todesfallwahrscheinlichkeiten seien dabei  $q_x = 0.00015 e^{0.1 \cdot (x-20)}$ ,  $x = 20, \dots, 108$ ;  $q_{109} = 1$  und  ${}_t p_x = \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k})$  die Wahrscheinlichkeit, nach  $t > 0$  Jahren am Leben zu sein.

cash-flows	Beiträge	Leistungen
$Z_t, 0 \leq t \leq 88 (=108-20),$ $Z_t = 0$ bei $t > 88$	$\pi \sum_{x=20,40,60} {}_t p_x \cdot 1_{\{t+x < 65\}}$	$\sum_{x=20,40,60} {}_t p_x \cdot 1_{\{t+x \geq 65\}}$

Gemäss 2.b. berechnen wir nun die mittlere Duration im Intervall  $[i_0, i_1]$ :

Cash-flow $Z$	$D_0(Z)$	$\sigma_0^2(Z)$	$\bar{t}_m^3(i_0, Z) + \sigma_0^2(Z)$	$\bar{D}(Z)$ gemäss 2.b
$L$	23.58	243.1	3'369	26.12
$B$	11.84	110.4	1'281	12.98

$$\text{Beitragsbarwert} \quad P_0(B) = (\ddot{a}_{20:45} + \ddot{a}_{40:25} + \ddot{a}_{60:5})^* 8.98\% = 3.737$$

$$\text{mittlerer Beitragsbarwert} \quad \bar{P}(B) = P_0(B) \cdot (1 - 0.5\nu_0 \bar{D}(B) \Delta i) = 4.203$$

*Bezugsgrösse für Reserveerhöhung*

$$\text{Reserve} \quad V(i_0) = V_0 = 12.280$$

$$\text{Beitragsterm} \quad \bar{P}(B) \cdot (\bar{D}(L) - \bar{D}(B)) / \bar{D}(L) = 2.115$$

$$\underline{14.395}$$

*Reserveerhöhung:*

$$\Delta V \cong \left( V_0 + \bar{P}(B) \cdot \frac{\bar{D}(L) - \bar{D}(B)}{\bar{D}(L)} \right) \cdot \left( \left( \frac{\nu_1}{\nu_0} \right)^{\bar{D}(L)} - 1 \right)$$

$$= 14.395 \cdot \left( \left( \frac{1.04}{1.02} \right)^{26.12} - 1 \right) = 9.510.$$

Der exakte Wert beträgt 9.513. Die Reserve steigt somit in diesem Beispiel um über 75 % auf  $V(i=2\%) = 21.793$  und in unserer Näherung auf 21.790. Die Näherungsformel ist auch bei diesem etwas extrem gewählten Beispiel sehr genau.

Vernachlässigt man bei  $\bar{D}$  den 3. Term (d. h. man setzt  $\bar{D} = D_0 - 0.5 \cdot \sigma_0^2 \cdot \nu_0 \Delta i$ ), so erhält man 9.410 als Näherung von  $\Delta V$ . Bei dieser etwas gröberen Näherung genügen Duration und Konvexität von Beitrags- und Leistungs-cash-flow. Ohne weitere Berechnungen kennt man im Allgemeinen lediglich die Reserve genau. Den Beitragsbarwert muss man zusätzlich ermitteln oder schätzen, beispielsweise anhand eines repräsentativen Bestandesauszugs. Duration und Konvexität bestimmen sich für Portefeuilles generell als mit den Barwerten gewichtetes Mittel dieser Größen für die einzelnen cash-flows. Für die Dispersion gilt dies nicht.

Gegenüber der Taylorentwicklung der üblichen Reserveformel mit der fehleranfälligen Differenz (von Leistungs- und Prämienbarwert) ist die angegebene Formel mit einer Summe aus 2 Termen, dem Reserveterm und dem von den zukünftigen Beiträgen abhängigen Term etwas stabiler. Für eine sehr grobe untere Abschätzung des Auffüllungsbedarfes bei Zinssatzreduktion kann der Term mit den zukünftigen Beiträgen weggelassen werden.

#### 4. Zinssatzvariation: Prämie bei gleicher Leistung resp. Leistung bei gleicher Prämie

##### a. Differentialgleichung

Der Prämienatz sei durch  $\pi = P(L)/P(B)$  gegeben, wobei man üblicherweise für die Versicherungsleistung und die Prämie die in Abschnitt 3 angegebenen cash-flows verwendet. Diese gehen von einer Versicherungsleistung oder einer Prämienhöhe von '1' aus, die im Versicherungsfall respektive im Erlebensfall als Prämie zahlbar ist. Die Ableitung nach dem Zinssatz ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d\pi}{di} &= \frac{d \ln \pi}{di} = \frac{d \ln(P(L))}{di} - \frac{d \ln(P(B))}{di} \\ &= \frac{P(L)'}{P(L)} - \frac{P(B)'}{P(B)} = -\nu \cdot (D(L) - D(B)). \end{aligned}$$

In der Praxis ist die Zinsabhängigkeit von  $L = \pi^{-1}$  noch interessanter, da diese Zinsabhängigkeit derjenigen der versicherten Leistung  $L$  bei gegebener Prämie entspricht:

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{di} = \frac{d \ln L}{di} = \frac{d \ln(\pi^{-1})}{di} = \frac{d(-\ln(\pi))}{di} = -\frac{d \ln(\pi)}{di} = \nu \cdot (D(L) - D(B)).$$

b. *Integral*

Die Änderung des Prämiensatzes erhält man durch Integrale, die sich wiederum nur näherungsweise berechnen lassen:

$$\frac{\pi(i_0 + \Delta i)}{\pi(i_0)} \cong e^{-\Delta i \cdot \nu_0 \cdot (D(L) - D(B))}.$$

Beschränkt man sich auf eine lineare Näherung, ergibt sich

$$\Delta\pi(\%) = (\pi(i + \Delta i) - \pi(i))/\pi(i) \cong -\nu_0 \cdot (D(L) - D(B)) \cdot \Delta i.$$

Näherungen für die relative Leistungserhöhung aus einer Zinssatzdifferenz  $\Delta i$  sind:

$$\begin{aligned} \frac{L(i_0 + \Delta i)}{L(i_0)} &\cong e^{\Delta i \cdot \nu_0 \cdot (D(L) - D(B))} \cong (1 + \Delta i)^{\nu_0 \cdot (D(L) - D(B))} \\ &\cong \left(1 + \nu_0 \frac{D(L) - D(B)}{n} \cdot \Delta i\right)^n, \end{aligned}$$

womit für Versicherungen mit fester Versicherungsdauer  $n$  die Auswirkung der Zinserhöhung auf einen jährlichen Erhöhungssatz umgerechnet werden kann. Im Allgemeinen wird man die Duration für den Ausgangszinssatz  $i_0$  verwenden, d. h.  $D(Z) = D_0(Z)$ ,  $Z = L$  oder  $B$ . Für genauere Schätzungen wird man allenfalls eine geeignete Interpolation  $D(Z) = \bar{D}(Z)$  für einen mittleren Zinssatz im Intervall  $[i_0, i_0 + \Delta i]$  ansetzen.

c. *Beispiel: BVG-Sparprozess*

Wir wenden nun die Überlegungen zu den Durationen auf den in der Schweiz im Rahmen der beruflichen Vorsorge vorgeschriebenen Sparprozess an. Dabei sind per Ende des Versicherungsjahres ab Alter 25 für jeweils 10-jährige Altersstaffeln Sparprämien von 7%, 10%, 15% und 18% des BVG-Lohnes zu zahlen. Wie hängt das hochgerechnete Altersguthaben vom Zinssatz ab?

*Prämienzahlung*

$$\text{Barwert: } 7\% \cdot a_{\overline{10}|} + 10\% \cdot {}_{10|}a_{\overline{10}|} + 15\% \cdot {}_{20|}a_{\overline{10}|} + 18\% \cdot {}_{30|}a_{\overline{10}|}$$

Für  $i_0 = 0$  berechnet sich Gesamtduration und -konvexität als gewichtetes Mittel dieser Werte für die jeweiligen Altersstaffeln  $D({}_{m|}a_{\overline{n}|}) = 1(n+1)/2 + m$  und  $C({}_{m|}a_{\overline{n}|}) = 1(n+1+3m)(n+2)/3 + m^2$ :



$$\text{Duration} \quad 14\% D(a_{\overline{10}|}) + 20\% D({}_{10|}a_{\overline{10}|}) + 30\% D({}_{20|}a_{\overline{10}|}) + 36\% D({}_{30|}a_{\overline{10}|}) = 24.3$$

$$\text{Konvexität} \quad 14\% C(a_{\overline{10}|}) + 20\% C({}_{10|}a_{\overline{10}|}) + 30\% C({}_{20|}a_{\overline{10}|}) + 36\% C({}_{30|}a_{\overline{10}|}) = 733.6$$

$$\text{Dispersion} = 733.6 - 24.3^2 = 118.8.$$

$$\text{Wir setzen} \quad \bar{D}(B) = D_0(B) - 0.5 \cdot \sigma_0(B)^2 \cdot i = 24.3 - 59.4i.$$

### Altersguthaben

Das Altersguthaben wird mit 65, also nach 40 Jahren ausgezahlt. Damit ist die Duration des Leistungs-cash-flows 40, wobei die Dispersion 0 ist. Dies gibt die Näherung

$$AG(i)/AG_0 = (1+i)^{D(L)-\bar{D}(B)} = (1+i)^{40-24.3+0.5\cdot\sigma_0(B)^2\cdot i} = (1+i)^{15.7+59.4\cdot i}$$

Bei einem BVG-Lohn von 50'000 ist  $AG_0 = 250'000$  und für die verschiedenen BVG-Zinssätze:

BVG-Zinssatz $i$	Jahre für Zinswirkung ( $15.7+59.4i$ )	Aufzinsfaktor ( $1+i$ ) <sup>15.7+59.4<i>i</i></sup>	Altersguthaben	
			Näherung	Exakt
2.00 %	16.89	1.3971	349'285	349'427
2.50 %	17.19	1.5286	382'146	382'430
4.00 %	18.08	2.0319	507'966	509'171

## 5. Die Rentenhöhe in Abhängigkeit vom Zinssatz

### a. Ableitung des Rentensatzes und Duration

In diesem Abschnitt betrachten wir zuerst eine kontinuierliche (Renten)Zahlung der Intensität  ${}_t p_x$ . Die folgenden Beziehungen gelten auch für  ${}_t p_x = 1$ , d. h. für eine ewige Rente. Wir gehen von kontinuierlicher Verzinsung  $\delta = \ln(1+i)$  aus.

Seien  ${}_t E_x = e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_t p_x$  der Erlebensfallbarwert,  $\bar{a}_x(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t E_x dt$  der Rentenbarwert,  $D(\bar{a}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} \int_0^\infty t \cdot {}_t E_x dt = -\frac{1}{\bar{a}_x} \cdot \frac{d\bar{a}_x}{d\delta}$  die Duration, welche bei kontinuierlicher Verzinsung der modifizierten Duration entspricht.

Aus  $\int_t^\infty {}_\tau E_x d\tau = {}_t E_x \cdot \bar{a}_{x+t}$  folgt  $\frac{d}{dt} {}_t E_x \cdot \bar{a}_{x+t} = -{}_t E_x$ . Mit partieller Integration erhält man  $\int_0^\infty t \cdot {}_t E_x dt = [-t \cdot ({}_t E_x \cdot \bar{a}_{x+t})]_0^\infty + \int_0^\infty {}_t E_x \cdot \bar{a}_{x+t} dt$  und damit  $D(\bar{a}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} \int_0^\infty {}_t E_x \cdot \bar{a}_{x+t} dt$ .

b. *Begrenzung der Ableitung des Rentensatzes nach dem Zinssatz*

Die Ableitung des Rentensatzes ergibt sich im kontinuierlichen Fall als Verhältnis zwischen Duration und Rentenbarwert und liegt immer zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1:

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{a}_x)^{-1}}{d\delta} &= -\frac{d\bar{a}_x}{d\delta} \cdot \frac{1}{(\bar{a}_x)^2} = \frac{D(\bar{a}_x)}{\bar{a}_x} = \frac{1}{\bar{a}_x^2} \cdot \int_0^\infty {}_tE_x \cdot \bar{a}_{x+t} dt \\ &= 1 - \frac{1}{\bar{a}_x^2} \int_0^\infty {}_tE_x \cdot (\bar{a}_x - \bar{a}_{x+t}) dt \geq 1/2. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration im 1. Schritt weisen wir die Beschränkung auf  $\frac{1}{2}$  nach:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty {}_tE_x \cdot (\bar{a}_x - \bar{a}_{x+t}) dt &= \int_0^\infty {}_tE_x \cdot \bar{a}_{x+t} \cdot d(-\bar{a}_{x+t}) \\ &\leq \int_0^\infty \bar{a}_{x+t} \cdot d(-\bar{a}_{x+t}) = [-\bar{a}_{x+t}^2/2]_0^\infty = \bar{a}_x^2/2. \end{aligned}$$

Von den beiden Extremwerten erhält man  $\frac{1}{2}$  durch eine Zeitrente mit verschwindendem Zinssatz und 1 durch eine ewige Rente ohne – oder mit positiver konstanter Sterblichkeit. Die Zeitrente kann man sich in unserem Modell als Grenzfall einer verschwindenden Sterblichkeit bis  $t=n$  und Sterblichkeit 1 bei  $t=n$  vorstellen.

c. *Abhängigkeit des Rentensatzes vom Zinssatz*

Die Rentenhöhe bei gegebener Einmalprämie und gleichbedeutend damit der Rentensatz  $(\bar{a}_x)^{-1}$  bei gegebenem  $x$  sind konvexe Funktionen des Zinssatzes, d. h.

$$\frac{d^2(\bar{a}_x(\delta))^{-1}}{d\delta^2} \geq 0;$$

Wir zeigen, dass  $\frac{1}{(\bar{a}_x)^2} \int_0^\infty {}_tE_x \cdot \bar{a}_{x+t} \cdot d(-\bar{a}_{x+t}) = \int_0^\infty {}_tE_x \cdot \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} \cdot d\left(-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}\right)$  mit

zunehmendem Zinssatz  $\delta$  kleiner wird: Wegen  $\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}\right) = \frac{(D(\bar{a}_x) - D(\bar{a}_{x+t})) \cdot \bar{a}_x \cdot \bar{a}_{x+t}}{(\bar{a}_x)^2}$

$\geq 0$  nimmt  $\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}$  mit steigendem  $\delta$  zu. Deshalb muss bei grösserem  $\delta$  auch ein

grösseres  $t$  gewählt werden, damit  $\bar{a}_{x+t}(\delta)/\bar{a}_x(\delta)$  konstant bleibt. Der Erlebensfallbarwert  ${}_tE_x$  zu einem höheren Zinssatz und zu einem späteren Zeitpunkt ist kleiner. Im obigen Integral wird so der Integrand und damit auch das ganze Integral bei höherem Zinssatz  $\delta$  kleiner oder bleibt allenfalls gleich.

d. *Beispiel*

Nimmt  ${}_tE_x = e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tP_x$  linear bis zu einem Schlussalter  $\omega$  ab, wie dies beispielsweise bei der Ordnung der Lebenden nach De Moivre bei Zinssatz Null der Fall ist, so ist  $D(\bar{a}_x)/\bar{a}_x = 2/3$ , unabhängig von  $x$ , wie man leicht nachrechnen kann. Bei höherem Alter kann man für pauschale Überschlagsformeln von einem solchen linearen Verlauf von  ${}_tE_x$  ausgehen, was zur Näherung  $1/\bar{a}_x \cong 1/\bar{e}_x + 2/3 \cdot \delta$  führt. Mit  $q_x = 0.0001e^{0.1 \cdot (x-20)}$  ergibt sich im kontinuierlichen Fall  $\bar{e}_{65} = 20.967$  und im diskreten Fall  $e_{65} = 20.633$ . Die Rentenbarwerte  $\bar{a}_x$  resp.  $a_x$  zum Zins 0 werden dabei als  $\bar{e}_x$  resp.  $e_x$  bezeichnet und als Lebenserwartung interpretiert.

Zinssatz $i$ , im kontinuierlichen Fall $\delta = \ln(1 + i)$	Rentensatz mit Zahlungsart			
	Exakt $1/\bar{a}_{65}$	kontinuierlich Näherung $1/\bar{e}_{65} + 2/3 \cdot \delta$	diskret, jährlich nachschüssig Exakt $1/a_{65}$	Näherung $1/e_{65} + 2/3 \cdot i$
0 %	4.76 %	4.76 %	4.85 %	4.85 %
2 %	6.02 %	6.08 %	6.17 %	6.18 %
4 %	7.39 %	7.38 %	7.63 %	7.51 %

Die Tabelle zeigt, dass in den praxisrelevanten Fällen mit genügend langer Rentenzahlungsdauer die Gesetzmässigkeiten vom kontinuierlichen auf den diskreten Fall übertragen werden können. Bei diskreter Rentenzahlung kann die Duration mit den sogenannten Kommutationszahlen als  $D(a_x) = S_{x+1}/N_{x+1}$  bestimmt werden. Diese Beziehung wurde bereits in [Z] für die Entwicklung des Rentenbarwertes  $a_x$  in eine Taylorreihe verwendet, wobei die Duration selbst als Begriff noch nicht bekannt war.

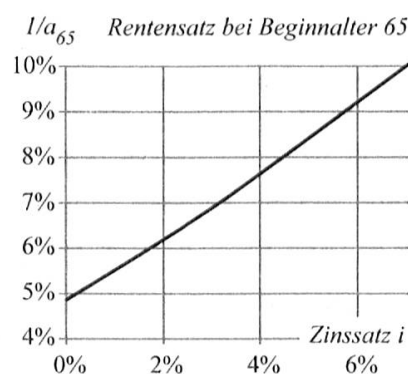
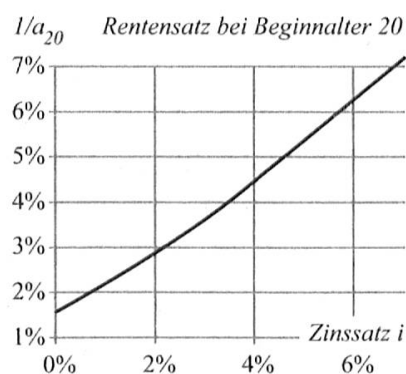
Die lineare Näherungsformel gilt für die Umwandlung in eine Altersrente und bestimmt damit die Zinssensitivität der Umwandlungssätze in der beruflichen Vorsorge, speziell auch die Zinssensitivität der in der Schweiz gesetzlich vorgeschriebenen Umwandlungssätze im BVG. Bei jungem Beginnalter ändert die Zinssensitivität des Rentensatzes ihren Charakter: Sie ist bei tiefem Zinssatz ähnlich wie bei einer Zeitrente (mit tiefem Zins) und geht dann bei hohem Zinssatz in diejenige einer ewigen Rente über, wie die Grafik für Beginnalter 20 zeigt.

### Zinssensitivität des Rentensatzes bei jährlich zahlbaren, nachschüssigen Renten

Mit zunehmendem Zinssatz steigt die Ableitung des Rentensatzes an: In den Graphiken zwischen den Zinssätzen  $i$  von 0–7 %

$x = 20$ : 0.53–0.95

$x = 65$ : 0.62–0.83



Thomas Müller  
Basler Versicherungen AG  
Aeschengraben 21  
4002 Basel

thomas.mueller@baloise.ch

### Literatur

- [S] Saxer, W. (1979), *Versicherungsmathematik Erster Teil*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York
- [Z] Zwinggi, E. (1958), *Versicherungsmathematik*, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart

## Zusammenfassung

Aus der Finanzmathematik ist bekannt, wie der Barwert eines „bonds“ bei Änderung des Bewertungszinssatzes für die Barwertbildung variiert. Grundlegende Grösse ist hierbei die Duration des „bonds“. Dieses Konzept lässt sich auf die cash-flows bei Lebensversicherungen übertragen. Schon in der klassischen Literatur werden diese Fragen unter den Begriffen „Zinsfussproblem“ behandelt. Damals war die anschauliche Interpretation der „Duration“ als mittlerer Zahlungsfrist des cash-flows offenbar noch nicht bekannt. Wir zeigen den umfassenden Einsatz des Duration-Konzepts für Zinsfragen in der Lebensversicherung. Dabei führen wir aus, wie Versicherungsleistungen generell und im Speziellen die Höhe von Leibrenten, Prämien und Reserven vom gewählten Zinssatz abhängig sind.

## Résumé

Grâce aux mathématiques financières, il est aisé d'apprécier les fluctuations de la valeur actuelle d'une obligation en fonction des variations du taux d'intérêt. Dans ce domaine une donnée fondamentale est la duration de l'obligation. Cette notion peut également être appliquée aux assurances vie.

Depuis quelques dizaines d'années, les problèmes des taux d'intérêt ont été décrits, illustrés et débattus. A cette époque l'interprétation illustrative de la duration comme le délai de paiement moyen n'était pas encore connue. Cette nouvelle interprétation est tout particulièrement importante pour l'estimation d'un impact résultant d'un changement de taux d'intérêt.

Dans cet article, l'utilité de la notion de duration pour des questions relatives aux taux d'intérêt dans les assurances vie est démontrée. La dépendance au taux d'intérêt des prestations en général, et plus particulièrement du montant des rentes viagères, des primes et des réserves est développée.

## Summary

In financial mathematics it is well known how the present value of a bond changes on varying the valuating interest. The basic notion hereby is the duration of the bond.

This concept can be applied to life insurance as well. In the literature of a few decades ago, one finds the term 'interest rate problem'. The illustrative interpretation of the 'duration' as the average pay-out time was obviously not yet known at the time. The new interpretation is especially useful for estimation purposes and to render plausible the impact of interest changes.

In this article we show the extensive use of the notion of duration for interest-related questions in life insurance. In doing so, we demonstrate how benefits in general and, in particular, the amount of an annuity, the premium and the reserve of a portfolio all depend on the rate of interest.