Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Schaffhausen

Band: 19 (1944)

Artikel: Die Schöpfungen Jakob und Alfred Amsler's auf dem Gebiete der mathematischen Instrumente anhand der Ausstellung im Museum Allerheiligen systematisch dargestellt

Autor: Dubois, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-584790

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. Mathematik

5.

DIE SCHÖPFUNGEN JAKOB UND ALFRED AMSLER'S

AUF DEM GEBIETE DER MATHEMATISCHEN INSTRUMENTE

ANHAND DER AUSSTELLUNG IM MUSEUM ALLERHEILIGEN
SYSTEMATISCH DARGESTELLT

VON
FR. DUBOIS

(MIT 44 ABBILDUNGEN)

Einleitung

Die Schöpfungen Jakob Amsler's (1823—1911) und Alfred Amsler's (1857—1940) auf dem Gebiete der mathematischen Instrumente umfassen Instrumente für die verschiedensten Verwendungszwecke; die Leistungen des Vaters und des Sohnes sind zum Teil scharf voneinander getrennt, zum Teil innig verschmolzen. Man könnte versucht werden, die Konstruktionen der beiden Männer nacheinander in chronologischer Reihenfolge darzustellen; diese aber sachlich wie methodisch unbegründete Trennung, ein Produkt von zeitlichen Zufälligkeiten, verhindert die Klarlegung des Kernpunktes: des logischen Zusammenhanges zwischen den einzelnen Konstruktionen. Hier soll, in absichtlichem Bruche mit der Tradition, versucht werden, die Jakob und Alfred Amsler'schen mathematischen Instrumente in systematischer Reihenfolge gemeinsam zu behandeln, so wie es die logische Uebersicht der Gedankengänge verlangt.

Es sollen also nachstehend die Amsler'schen mathematischen Instrumente in folgender Gruppierung zur Sprache kommen:

I. Integrationsapparate,

II. Derivationsapparate,

III. Kurvimeter,

IV. Hydraulische Apparate,

V. Beschleunigungsmesser.

SYNOPTISCHE INHALTSÜBERSICHT

Seite

Einleitung 211

I. INTEGRATIONSAPPARATE

1. *Rotationsflächenintegratoren*

a) Scheibenintegrator 214

— Metallabnützungsmaschine 215

— Durand-Amsler'sches Radialplanimeter 216

— Lugeon-Amsler'sches aerologisches Planimeter . . . 217

b) Kugelkalotten-Integrator 219

c) Kugelintegrator 219/220

2. *Schraubenlinien-Integrator* 221

3. *Das Jakob Amsler'sche Polarplanimeter und seine Erweiterungen*

a) Das übliche Polarplanimeter und Abarten

— Mathematische Betrachtungen 224

— Einfaches Polarplanimeter 231

— Pantographisches Planimeter 232

— Lederplanimeter 233

— Scheibenpolarplanimeter 234

— Einfaches Linearplanimeter 235

— Scheiben-Linearplanimeter 236

b) Das Amsler'sche Momentenplanimeter

— Mathematische Betrachtungen 236

— Jakob Amsler'sche Originalkonstruktion . . . 237/238

— Variante von A. Amsler mit Kugelkalottenintegratoren . 238

— Variante von A. Amsler mit Scheiben-Sinusintegratoren . 239

c) Das stereographische Planimeter von A. Amsler . . . 241

4. *Der integrierende Dampfmaschinen-Indikator*

— Uebliche Ausführung mit Scheibenintegrator . . . 247

— Konstruktion von A. Amsler mit Scheiben-Sinusintegrator 247

— Konstruktion von J. Amsler mit Polarplanimeter . . 248

II. DERIVATIONSAPPARATE

Theoretische Erläuterungen 249

Der (nicht ausgeführte) J. und A. Amsler'sche Kegel-Geschwindigkeitsmesser 250

Der J. und A. Amsler'sche Kugel-Geschwindigkeitsmesser . . 251

III. KURVIMETER 257

IV. HYDRAULISCHE APPARATE

Der Rohrleitungswassermesser von A. Amsler 258

Der integrierende Pegel 265

V. BESCHLEUNIGUNGSMESSER

Der rotierende Beschleunigungsmesser von A. Amsler . . . 267

I. INTEGRATIONSAPPARATE[1]

Den Ausgangspunkt des Amsler'schen Schaffens überhaupt und den Anstoß zur Gründung der Maschinenfabrik Amsler bildet die Erfindung des Polarplanimeters 1852 durch Jakob Amsler. Es wäre indessen verfehlt, die Besprechung der Amsler-schen Integrationsapparate mit dem Polarplanimeter zu beginnen. Denn vor der Erfindung des Polarplanimeters haben schon Integratoren existiert bezw. sind weitere solche während der Wirksamkeit von J. und A. Amsler entstanden, so vor allem der Scheibenintegrator (Gonella 1825[2]), Wetli 1849[3]), der Kegelintegrator (Oppikofer 1827[4]), der Kugelkalottenintegrator (Coradi etwa 1880[5]) und der Kugelintegrator (Hele Shaw 1886[6]) einerseits, und der Integrator von Abdank-Abakanowicz (1878[7]) andererseits. Den ersteren liegt die Rotationsfläche, dem letzteren die Schraubenlinie zu Grunde. Nun haben sowohl Jakob wie Alfred Amsler für konstruktive Varianten des Polarplanimeters und seiner Abarten gewisse klassische Bestandteile der Rotationsflächenintegratoren quasi als Bausteine in ihre Konstruktion aufgenommen, bezw. selber die fremden Integratoren in selbstän-

---

[1]) Integrationsapparate dienen zur Ausführung der Operation $\int F(y) \cdot dx$, wobei y selber eine Funktion der Urvariablen x sein kann. Ist die Funktion $F(y)$ allgemeiner Natur, so heißen sie Integratoren oder Integraphen. Reduziert sich die Funktion $F(y)$ auf y selbst, hat also das Integral die Bedeutung der Fläche mit Ordinate y, so dienen die Integratoren vorwiegend zur Flächenausmessung; sie heißen dann kurzerhand Planimeter.

[2]) Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig, Teubner 1912, S. 51 und 81.

[3]) Galle, loc. cit., Seite 81.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Katalog mathem. und mathem.-physik. Modelle und Instrumente, Nachtrag München 1893, C. Wold & Sohn, Seite 32.

Ein Originalplanimeter von Wetli befindet sich in der physikalischen Sammlung der Kantonsschule in Solothurn (Mitteilung von Prof. H. Stohler, Basel).

[4]) H. Stohler, Basel, Referat an der Jahresversammlung des Vereins schweiz. Mathematiklehrer 1941 in Schaffhausen. Veröffentlicht im 69. Jahrbuch der Vereinigung schweiz. Gymnasiallehrer, Seite 115—117. Aarau, H. R. Sauerländer & Co. 1942.

[5]) Galle, loc. cit., Seiten 96—98.

[6]) Galle, loc. cit., Seiten 54 und 121.

[7]) Abdank-Abakanovicz, Les intégraphes, Paris, Gauthier-Villars 1886. Galle, loc. cit., Seiten 157—160.

diger konstruktiver Neugestaltung in andere Gebiete der Technik eingeführt. Die Uebersicht und das Verständnis werden also erleichtert, wenn die Amsler'schen Integrationsapparate nach den ihnen zu Grunde liegenden mathematischen Gebilden durchgenommen werden. Dadurch erhalten das Polarplanimeter und seine Weiterausbildungen ihren richtigen Platz in der Gesamtentwicklung.

Dieser Weg ist nachstehend eingeschlagen worden.

1. Rotationsflächen-Integratoren.

Ausgangsprinzip aller Rotationsflächen-Integratoren ist die Eigenschaft, daß die Länge ds eines elementaren Kreisbogens gleich dem Produkt aus Radius R mal Zentriwinkel $d\varphi$ ist. Wird also der Radius irgend einer Rotationsfläche durch eine geeignete konstruktive Maßnahme proportional dem Integrand y und der Drehwinkel $d\varphi$ derselben proportional dem Variablenelement dx gemacht, so wird das angestrebte Integral $\int y \cdot dx = \text{prop.} \int R \cdot d\varphi$ in einem gewissen Maßstabe erhalten, als die totale Abwicklung einer auf der Rotationsfläche radial gesteuerten, zum Radius senkrecht stehenden Kurvimeterrolle, Integrierrolle genannt.

a) *Scheibenintegrator.*

Unter vielen Anwendungen des Scheibenintegrators an Amslerschen Maschinen ist besonders diejenige von Alfred Amsler an seiner Abnützungsmaschine für Metalle (1917), Abb. 1, benützte [8]) erwähnenswert. Bei dieser rollen 2 scheibenförmige Probestücke *a*, *b* gegensinnig mit verschiedenen Umdrehungszahlen, also mit Schlupf, und unter einem bestimmten Anpressungsdruck (vorgespannte Feder g!) aufeinander ab. Die Abnutzbarkeit des Probematerials wird definiert durch den Gewichtsverlust in *mgr.* bezogen auf die verrichtete Abnützungsarbeit in kgm. Letztere, Integral des Probescheiben-Antriebsmomentes nach dem Drehwinkel $= \int M . d\varphi$, wird wie folgt ermittelt:

Die untere Probescheibe *b* wird über einen Jakob Amslerschen Zahndruckdynamometer mit Pendel m [9]) angetrieben. Durch den Pendelausschlag wird das Drehmoment über eine

[8]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 66, Jahrgang 1922, Heft 15, Seite 377/378.
E. Siebel, Handbuch der Werkstoffprüfung, Berlin, Springer 1940, Bd. 1, Seite 429.

[9]) Gramberg, Technische Messungen, 5. Auflage, Berlin, Springer 1923, Seiten 307/308.

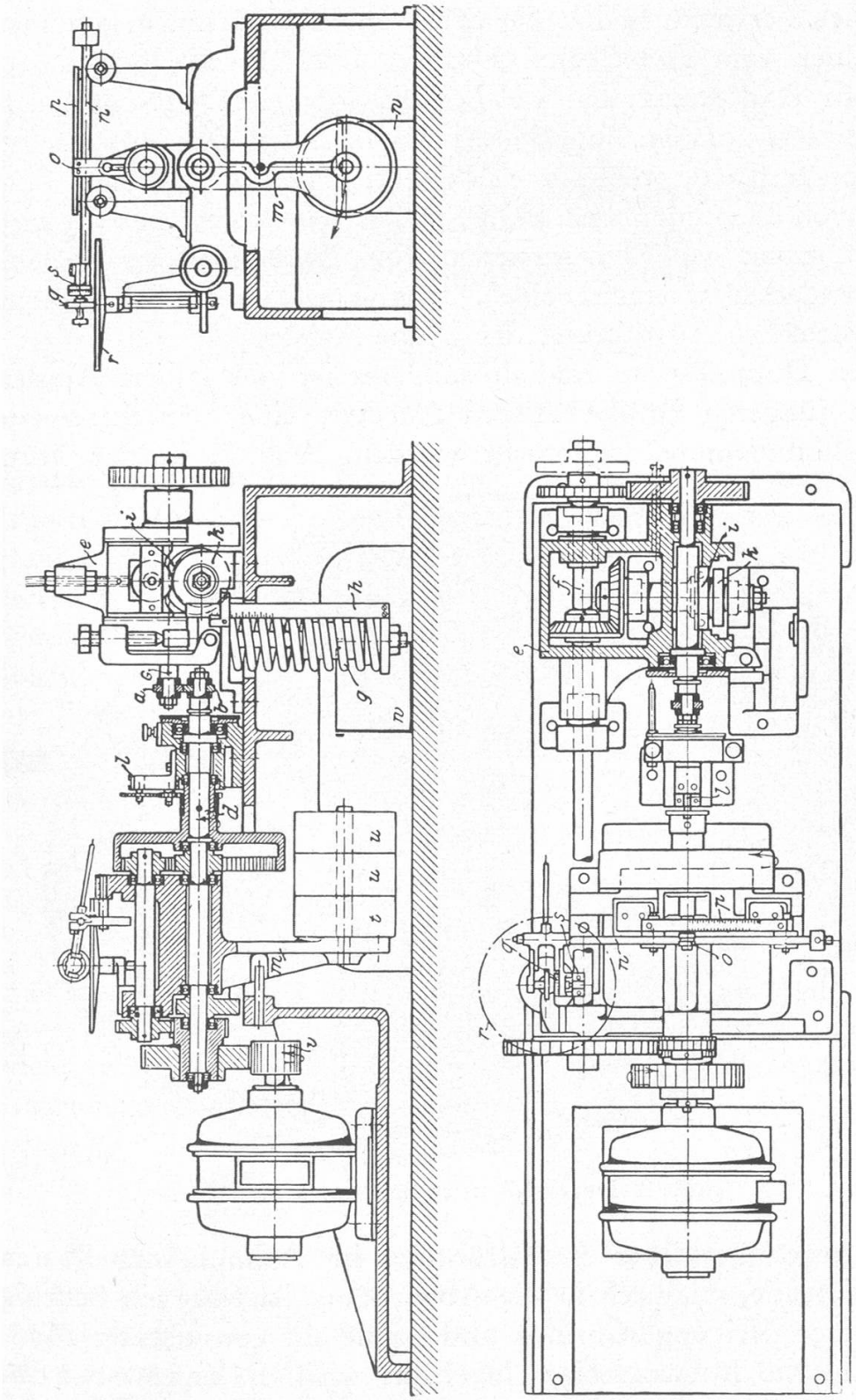


Abb. 1. Abnützungsmaschine für Metalle.

Stange *n* auf die Integrierrolle *q* eines zum Drehwinkel der Proben proportional rotierenden Scheibenintegrators r übertragen, welcher die Reibungsarbeit direkt angibt. Photographie im Museum.

Viel Verwendung hat der Scheibenintegrator auch gefunden in seiner vom Amerikaner Durand 1908 [10]) erdachten umgekehrten Anordnung, bei welcher die Integrierscheibe mit aufgespanntem polarem Funktionsdiagramm auf kreisrunder Papierscheibe feststeht, während die Integrierrolle mit radialer Führung von Hand um den Zentriwinkel $d\varphi$ herumgedreht wird (Auswertung von Diagrammen von Registrierapparaten mit rotierender Diagrammscheibe). Planimeter im Museum. (Konstruktive Ausführung der Firma Amsler.)

Am Durand'schen Radialplanimeter ist von Albert Amsler, einem jüngeren Bruder Alfred Amslers, eine bemerkenswerte Vervollkommnung angebracht worden, Abb. 2, in der Form

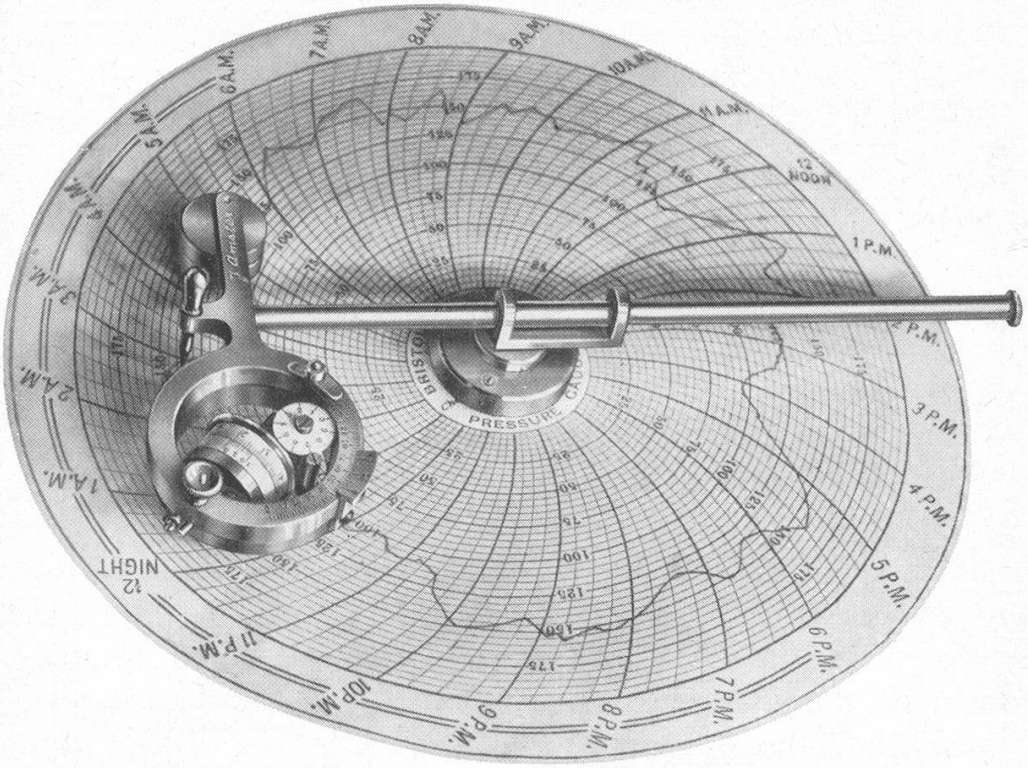


Abb. 2. Durand-Amsler-Radialplanimeter.

einer gegenüber ihrer Radialführung im Azimut verstellbaren Integrierrolle, wodurch in die Abwicklung letzterer ein beliebig wählbarer Neigungs-Cosinus und somit ein gewünschter Maßstab für die Rollenanzeige eingeführt wird. Planimeter im Museum.

Obgleich den Schöpfungen der Familie Amsler fremd, verdient des Zusammenhanges wegen an dieser Stelle erwähnt zu

[10]) Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1911, Seiten 213/214, Albert Amsler: „Das Durand-Amsler'sche Radialplanimeter".

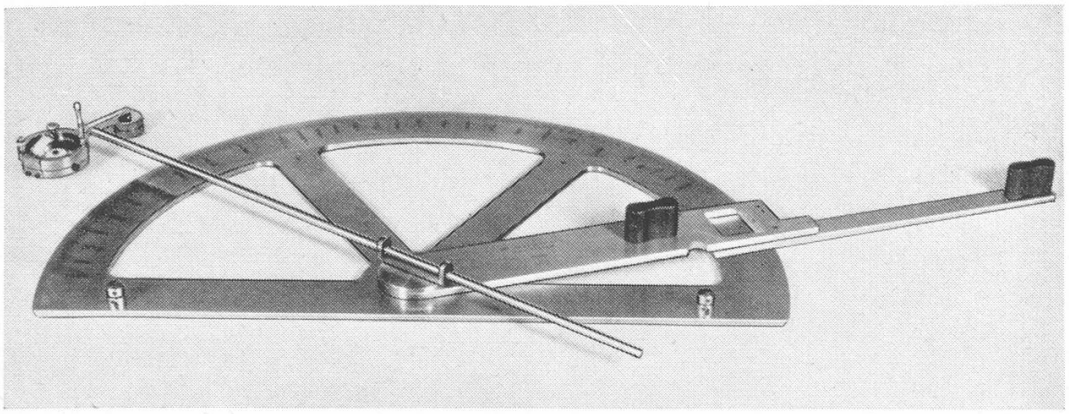


Abb. 3. Aerologischer Transporteur mit Radialplanimeter.

werden eine von der Maschinenfabrik Amsler in den letzten Jahren ausgeführte Anwendung des Radialplanimeters zur Integration der barometrischen Höhenformel, zwecks rascher Ermittlung der Höhe von Sondierballonen aus radiotelegraphisch übermittelten periodischen Luftdruck- und Temperaturzeichen. Solche Sondierballone werden in der Meteorologie und Ballistik zur Erforschung des Zustandes (Barometerdruck, Temperatur) der Atmosphäre in Funktion der Höhe benutzt. Aus der Differentialgleichung des Gleichgewichtes der Atmosphäre

$$-\,dp = dy \cdot \gamma$$

in Verbindung mit der Zustandsgleichung der Gase

$$\frac{p}{\gamma} = RT$$

(y = Höhe über Boden; p = Barometerdruck; γ = spez. Gewicht der Luft; $T = 273^0 + t$ = absolute Temperatur; R = Gaskonstante, für Luft = 29,27) folgt:

$$y = -R\int T\,\frac{dp}{p} = -R\int T \cdot d\,(\log p)$$

Die mechanische Auswertung dieser längst bekannten Integralformel vermittelst eines Transporteurs mit log p als Zentriwinkel und T als Radius-Vektor (abs. 0-Punkt im Transporteurzentrum) und mit angebautem Radialplanimeter wurde im Jahre 1938 von Herrn Dr. J. Lugeon [11]) von der eidg. meteorologischen Zentralanstalt in Zürich entwickelt und durch Oberstlt. Dr. Sänger in den Artillerienachrichtendienst der schweizerischen

[11]) J. Lugeon, Annalen der Schweiz. Meteorologischen Zentralanstalt 1938. J. Lugeon, Bulletin Technique de la Suisse Romande, 23. 8. 1941.

Armee systematisch eingeführt. Abb. 3 stellt den logarithmischen Transporteur kombiniert mit dem Radialplanimeter, Ausführung Amsler, dar.

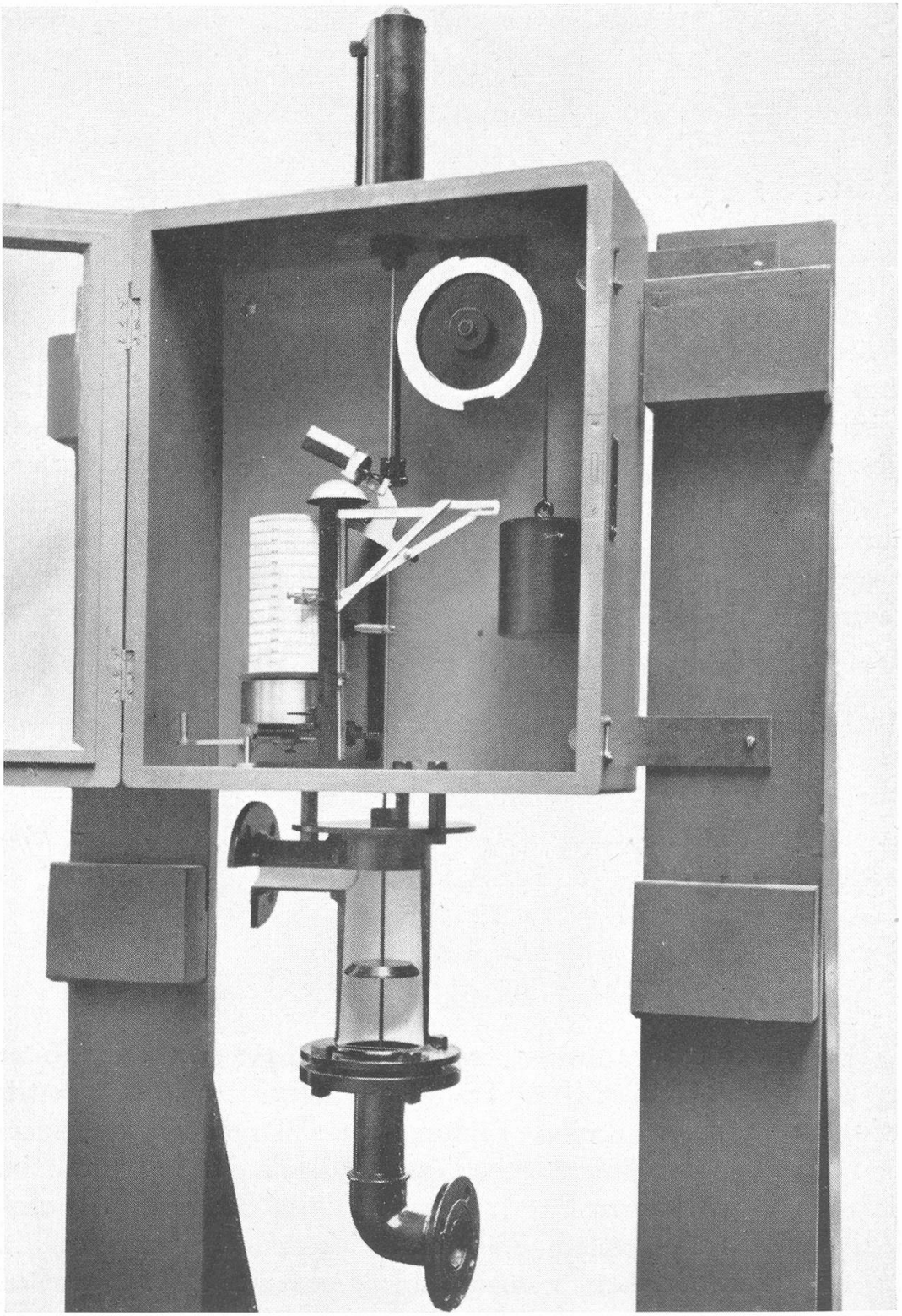


Abb. 4. Schwimmerdampfmesser mit Kugelkalottenintegrator.

b) *Kugelkalotten-Integrator.*

Abbildung 4 stellt eine interessante Anwendung dieses Integrators von Alfred Amsler an dem bekannten Schwimmerdampfmesser der Farbenfabriken vorm. F. R. Bayer & Co. in Leverkusen dar.[12])

In einem schwach konisch nach unten sich erweiternden Rohr bewegt sich eine Schwimmerscheibe, die über Führungsstange, Stahlband und Rolle durch ein Gegengewicht ausbalanciert ist. Der von oben her durch das Kegelrohr durchströmende Dampf senkt die Scheibe, bis der Ringspalt sich genügend erweitert hat, damit der Druckabfall im Drosselungsquerschnitt, m. a. W. der Ueberdruck auf der Schwimmerscheibe, das Gegengewicht gerade in Schwebe hält. Die Dampfströmung findet somit bei konstantem Druckgefälle $p_1 - p_2$, d. h. konstanter Geschwindigkeit $w = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma_m}\right)}$, ($g$ = Erdbeschleunigung, p_1 und p_2 = Dampfdrücke, γ_m = mittl. spez. Gewicht des Dampfes vor und nach Ringspalt) statt. Die sekundliche Durchflußmenge Q kg/*sec.* = $\gamma_m \cdot$ Ringquerschnitt $\cdot\, w$ ist also proportional dem Spaltquerschnitt, d. h. dem Abstand der Schwimmerscheibe von dem Beginn der Meßdüse (Durchdringung vom Kegel und von den Erzeugenden der Schwimmerscheibe). Die mengenproportionale Höhenlage der Scheibe wird von oben nach unten auf einer durch Uhrwerk gedrehten Schreibtrommel registriert und mittels Kugelkalottenintegrators mit dem gleichen Antrieb nach der Zeit integriert, um das total durchflossene Dampfgewicht zu erhalten, ähnlich wie bei einer Gas- oder Wasseruhr. Der nach einem sinus α-Gesetz verlaufende Abstand der Integrierrolle von der Kugelkalotten-Drehachse wird in eleganter Weise von der Führungsstange der Schwimmerscheibe vermittelst Ellipsenlenkers abgeleitet. Modell im Museum.

c) *Kugelintegrator.*

Hervorgegangen aus dem Kugelkalotten-Integrator durch Schwenkung der Kalottendrehachse um den funktionsabhängigen Winkel α, Festhaltung der Integrierrolle (im Gegensatz zur Kugelkalotte mit fester Drehachse und α-bewegter Integrierrolle) und Antrieb der zur vollen Kugel ergänzten

[12]) Gramberg, Technische Messungen, 5. Auflage, Berlin, Springer 1923, Seiten 245—255.

Kugelkalotte durch Reibrolle entlang einem Größtkreis. Dadurch entsteht zwischen Integrand und erforderlicher Funktionssteuerung der Kugelachse eine tg α - Beziehung anstatt der einfachen sin α=Beziehung wie beim Kugelkalottenintegrator. Siehe Fußnotiz [13]).

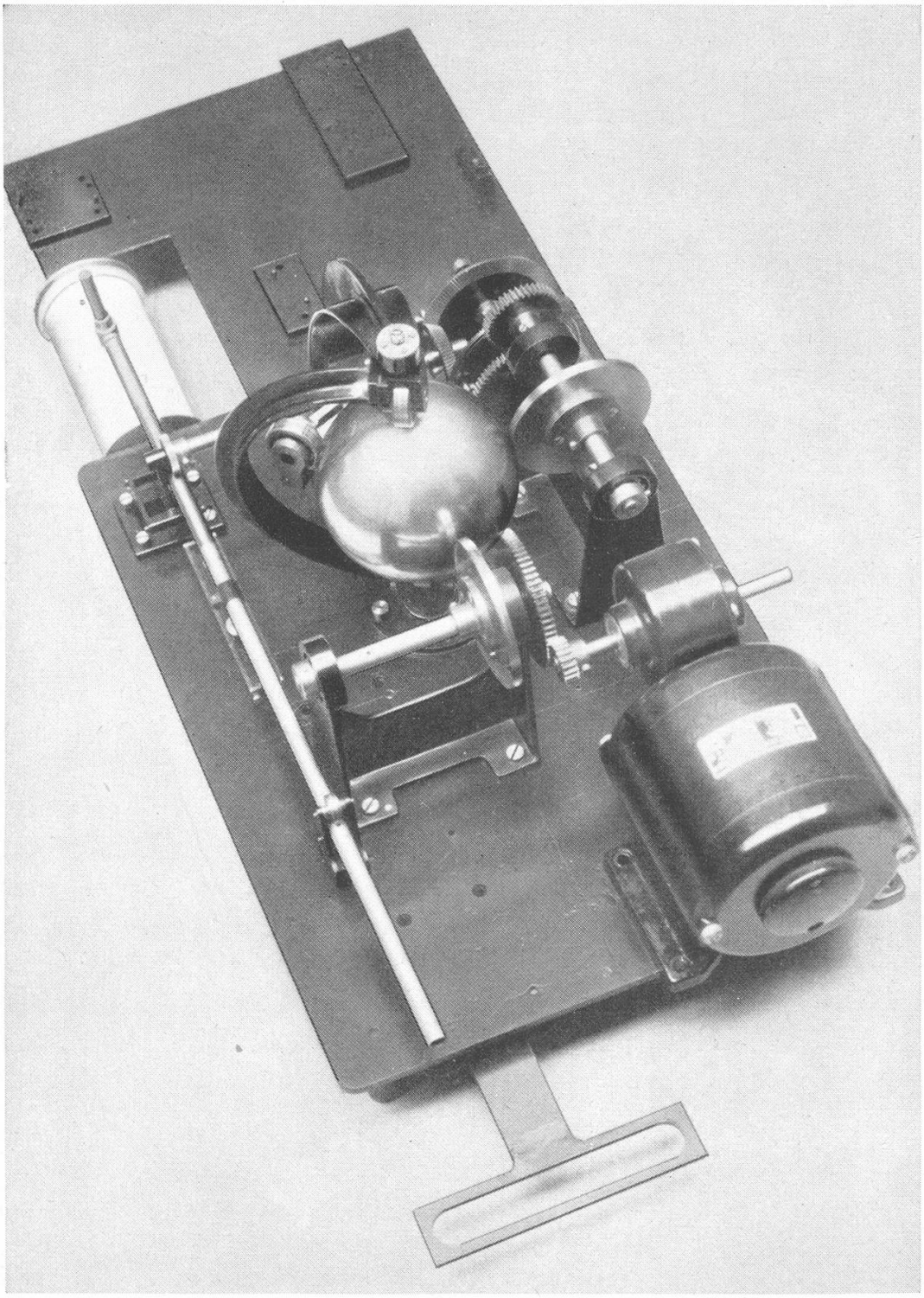


Abb. 5. Kugelintegrator.

Alfred Amsler war es, der als erster (etwa von 1912 an) einen ganz ergiebigen Gebrauch vom Kugelintegrator für technische Zwecke machte und zwar auf seinen Eisenbahndynamometerwagen, zur Ermittlung der Arbeit am Zughaken, sowie der für Rollwiderstandsbestimmungen von derselben abzuziehenden Arbeit der dynamischen Kräfte (Beschleunigungskraft und Erdschwerekomponente) über eine gegebene Fahrstrecke.[13])

Abb. 5 stellt einen Kugelintegrator nach der Konstruktion Alfred Amsler's in modernster Ausführung dar. Rechts vorn ist der dx-Antrieb durch Reibscheibe und Elektromotor. Unter der Apparatenplatte ist die Betätigung des Kugeläquatorialrahmens mit den 2 Richtungsrollen nach dem Gesetz: Konstante $\cdot$ tg α = zu integrierende Funktion y vermittelst eines Tangentenmechanismus ersichtlich. Die Scheibe in der Mitte hinten ist die $J = \int \mathrm{tg}\,\alpha \cdot dx = \int y \cdot dx$ abnehmende Integrierrolle. Schließlich ist links die Registriervorrichtung für das gewonnene Integral mit zwischengeschaltetem Wendegetriebe zur Zerhackung der endlos steigenden Integralkurve in eine gebrochene, die Breite des Registrierpapiers nicht überschreitende Zickzacklinie zu erkennen.[14]) Photographie im Museum.

2. Schraubenlinien-Integrator.

Diesem liegt die auf einem Zylinder konstanten Durchmessers aufgewickelte Schraubenlinie veränderlicher Steigung tg α zu Grunde. Dreht sich der Zylindergrundkreis um einen Bogen dx vorwärts, so steigt die Schraubenlinie in axialer Richtung um $dJ = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot dx$. Eine Integration $J = \int y \cdot dx$ ist also möglich, sobald man y = Konstante $\cdot$ tg α, tg α =

[13]) H. A. Gaudy, Schweizerische Bauzeitung 1914, No. 4, 5 und 6. Amsler & Co., Bulletin Technique de la Suisse Romande, 1924, No. 1, 3, 4 und 5.

[14]) Es sei vollständigkeitshalber daran erinnert, daß, während bei allen übrigen Rotationsflächenintegratoren der Uebergang von einem Funktionswert zum anderen durch ein Gleiten der Integrierrolle senkrecht zu ihrer Schneide auf der Fläche stattfindet, beim Kugelintegrator dagegen ein solcher Uebergang sich nur durch Abwicklung auf der Integrierrolle von Parallelkreisen, welche durch den Berührungspunkt senkrecht zur geometrischen (d. h. gedachten) Momentandrehaxe der Kugel gelegt werden, vollzieht, also ohne Gleiten der Rollenkante auf der Kugeloberfläche. Die Uebergänge bei wechselnder Funktion vollziehen sich somit in Spirallinien auf der Kugeloberfläche, was erlaubt, die Kugel gegen Antrieb- und Integrierrolle stark anzupressen. Der Kugelintegrator ist daher in der Lage, an der Welle der Integrierrolle ein viel stärkeres Drehmoment auszuüben und eventuell weitere Operationen zu verrichten; darin liegt gerade die Ueberlegenheit des Kugelintegrators gegenüber den übrigen Rotationsintegratoren, die knapp imstande sind, die Integrierrolle samt ihrem Zähler anzutreiben.

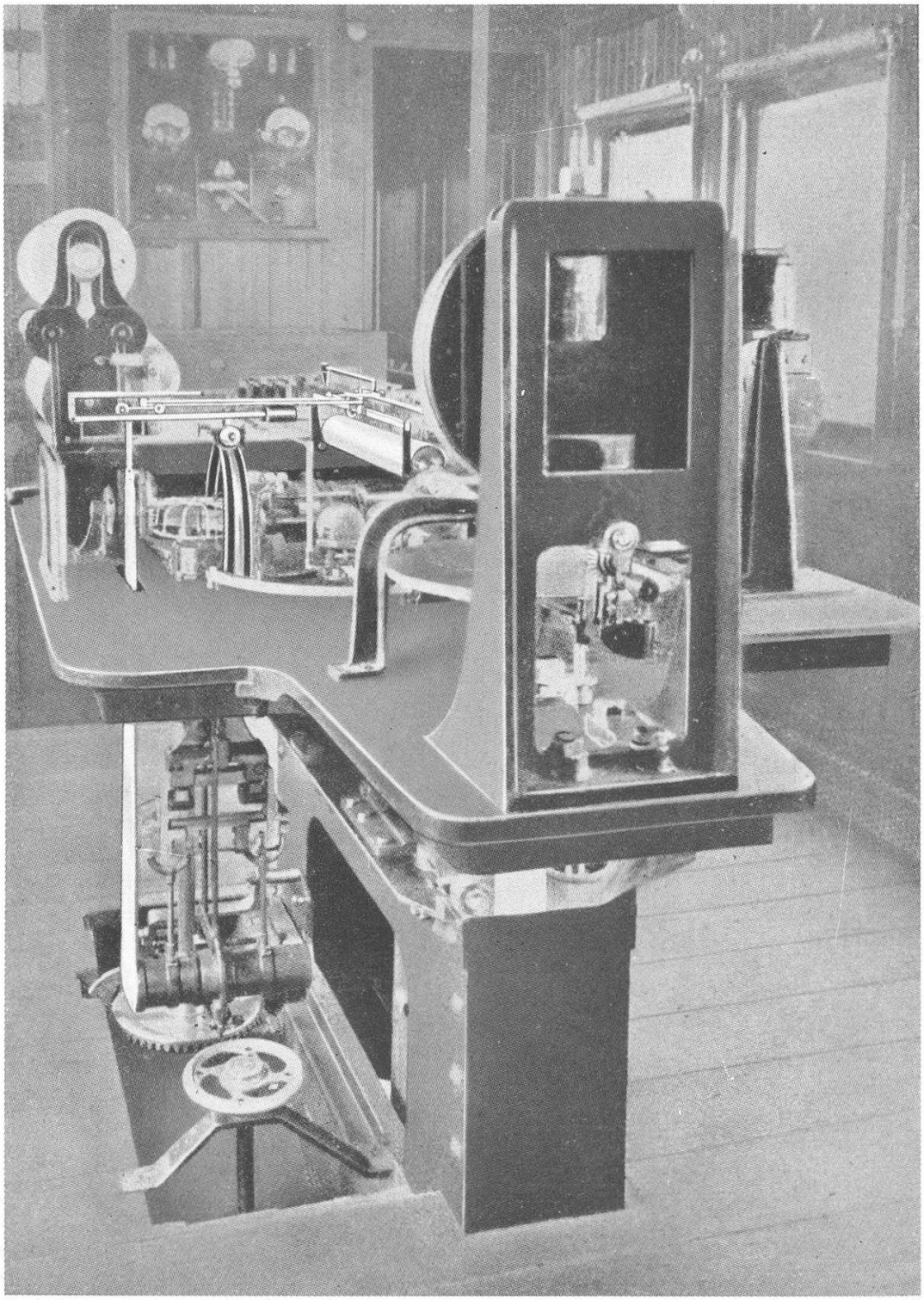


Abb. 6. Abdank-Abakanovicz-Schraubenlinienintegrator, Konstruktion A. Amsler, am Apparatentisch eines Dynamometerwagens (Italienische Staatsbahnen).

$\frac{y}{\text{Konst.}}$ = *prop. der zu integrierenden Funktion y macht.* [15]) *Grundorgan des Integrators ist ein scharfkantiges, unter* α *geneigtes Schneidenrad, das*

[15]) Siehe Fußnotiz [7]).

sich dank seiner Schärfe leicht in die Unterlage (Grundzylinder) eindrückt und dadurch das maßgebende Stück des veränderlichen Schraubenganges definiert.

Abb. 6 zeigt eine selbständige konstruktive Gestaltung des Abdank'schen Integrators durch Alfred Amsler, ebenfalls für Verwendung auf seinen Eisenbahndynamometerwagen, siehe 1 c) ante. Die mittels Accelerometerpendels abgetastete Beschleunigungs- und Gefällskraft P wird durch Tangentenmechanismus in ein proportionales tg α umgewandelt. Das scharfkantige Schneidenrad ist in dem auf Schienen geradlinig geführten Integralwagen drehbar gelagert und erhält mittels Gelenkparallelogrammes eine jederzeit der Neigung α des Tangentenhebels parallele Richtung. Unter dem Schneidenrad dreht sich eine der Fahrstrecke dx proportional angetriebene, mit der Geradführung parallele Metallwalze, gegen welche die Radkante mit Druck angepreßt ist (Antrieb vom Eisenbahnrad aus unter dem Apparatentisch ersichtlich). Der Schraubungsweg des Integralwagens auf der Walzenoberfläche in Führungsrichtung, $J = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \text{prop.} \int P \cdot dx$ wird durch Stoßstange auf den mitbewegten Schreibstift übertragen und von diesem auf ablaufendem Papierband (im Hintergrund) als Integralkurve aufgezeichnet.

Die Abb. 6 bezieht sich auf den Dynamometerwagen der Italienischen Staatsbahnen (1906).[16])

3. Das Jakob Amsler'sche Polarplanimeter und seine Erweiterungen.

a) *Das übliche Polarplanimeter und Abarten.*

Alles Wünschenswerte über das Polarplanimeter und seine Erweiterungen als Momentenplanimeter ist enthalten in der inhaltsreichen, geschichtlich gewordenen Originalabhandlung Jakob Amsler's „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren", Schaffhausen 1856, Verlag A. Beck & Sohn. Außerdem ist das Polarplanimeter bis in die allerjüngste Zeit hinein Gegenstand zahlreicher Abhandlungen gewesen, welche sein Wesen unter allen möglichen mathematischen Gesichtspunkten darlegen.

[16]) Rivista Tecnica delle Ferrovie Italiane, Doppelnummer 15. 9. / 15. 10. 1923, Seiten 110—114.

Es ist nicht beabsichtigt, an dieser Stelle nochmals die Theorie des Polarplanimeters zur Sprache zu bringen, was eine bloße Wiederholung wäre. Dagegen soll versucht werden, in möglichst anschaulicher Weise und unter absichtlichem Verzicht auf die mathematische Strenge den Kernpunkt dieser Erfindung zur Geltung zu bringen.[17])

Den bisher genannten Integratoren-Systemen liegen cartesische Koordinaten zu Grunde.[18]) Ihr Flächenelement ist das schmale Rechteck von Basis dx und Höhe y. Dem Polarplanimeter hingegen liegen Polarkoordinaten zu Grunde; sein Flächenelement ist das unendlich spitze Dreieck von Basis $r \cdot d\varphi$ und Seitenlänge r. In der Tat kann eine beliebig geformte Fläche, selbst eine auf cartesische Koordinaten x, y bezogene, als das über ihre Kontur genommene Linienintegral von aus irgend einem festen Pol (außerhalb oder innerhalb der

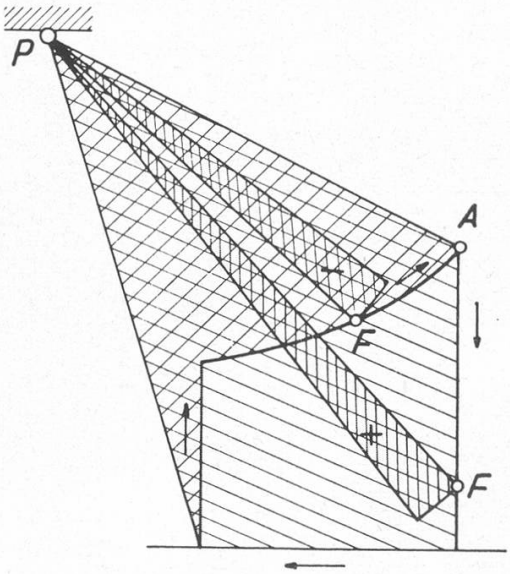


Abb. 7. Polarplanimeter, Prinzip der Flächenbestreichung, Pol außen.

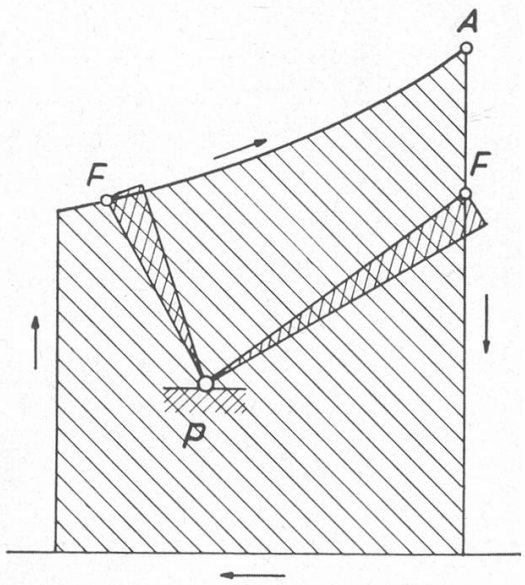


Abb. 8. Polarplanimeter, Prinzip der Flächenbestreichung, Pol innen.

Fläche) ausgehenden Elementardreiecken aufgefaßt werden. (Abb. 7 und 8.) Für außenliegenden Pol fallen bei Rückkehr zum Ausgangspunkt eine Anzahl Elementardreiecke negativ aus (Abb. 7), für innenliegenden Pol sind sie sämtliche positiv (Abb. 8). Es kommt also unter allen Umständen immer die reine eingeschlossene Fläche heraus.

[17]) Die nachfolgenden Darlegungen dürften zum Teil neuartig sein.

[18]) Vergl. z. B. Abb. 4 auf Seite 218 des Kugelkalottenintegrators am Bayer-Dampfmesser, bei welchem die Funktion y (sekundliche Dampfmenge) in orthogonalen Koordinaten direkt unterhalb des Integrators fortlaufend aufgezeichnet wird.

Bei den vorangehenden Planimetern ist das mathematische Gebilde, welches eine Integration ermöglicht, die Kreislinie, bezw. die Schraubenlinie; beim Amsler'schen Polarplanimeter ist es das ebene Dreieck. Dadurch ist seine ganze Mathematik bestimmt.

Materiell ist das Polarplanimeter durch nur 2 Seiten des Dreiecks, also durch einen Kniehebel, verwirklicht. Ein Ende des Kniehebels ist im festen Pol P drehbar eingehängt, das andere Ende trägt den Fahrstift F. Die mit ihrer Schneide auf der Unterlage ruhende Integrierrolle ist im Gelenk G senkrecht zum Fahrarm GF gelagert.[19]) Die dritte Seite PF des Dreiecks ist eine rein geometrische, d. h. gedachte Linie; sie liefert die veränderliche Seitenlänge r des Elementardreieckes $\frac{1}{2} \cdot r\, d\varphi \cdot r$.

Es sollen die Vorgänge zunächst rein geometrisch betrachtet werden:

Der Kniehebel werde (Abb. 9) in zwei um $d\varphi$ gegeneinander

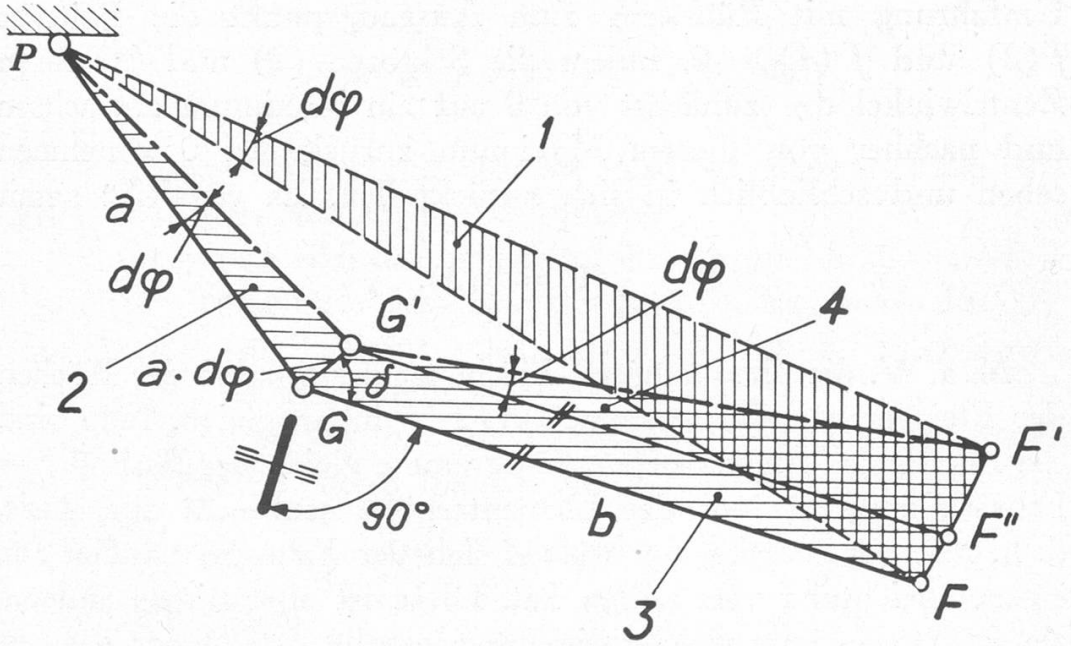


Abb. 9. Polarplanimeter, geometrische Begründung der Arbeitsweise.

geschwenkten Lagen gezeichnet; die während der Elementar-Schwenkung $d\varphi$ bestrichenen Flächen sind durch Schraffur

[19]) In Wirklichkeit ist aus konstruktiven Gründen die Integrierrolle nicht mit dem Gelenk zusammenfallend, sondern seitlich in Fahrarmrichtung gegen ersteres verschoben. Dadurch entsteht prinzipiell nichts Neues, wogegen die Darstellung komplizierter wird. Deshalb ist hier der Anschaulichkeit halber die Integrierrolle immer mit dem Gelenk zusammenfallend angenommen.

hervorgehoben. Außerdem werde das vom Fahrarm GF bestrichene ungleichmäßige Elementar-Vierseit $GG'F'F$ durch eine Parallele $G'F''$ zu GF in ein kleines Parallelogramm $GG'F''F$ und in ein kleines Dreieck $F'G'F''$ zerlegt. Die verschiedenen, durch andere Schraffur gekennzeichneten Teilflächen seien mit Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnet.

Wegen des Prinzips der Kontinuität müssen die bei der Schwenkung $d\varphi$ in Front vom Amsler'schen Dreieck PGF bestrichenen Flächen den hinter dem Dreieck verlassenen Flächen inhaltsgleich sein, also:

$$(1) = (2) + (3) + (4)$$

Ueber eine geschlossene Figurenkontur K integriert, gibt:

$$\int (1) = \int (2) + \int (3) + \int (4)$$

Liegt der Pol außerhalb der Flächenkontur, so werden bei Umfahrung mit Rückkehr zum Ausgangspunkt die Beiträge $\int (2)$ und $\int (4) = 0$, indem die Sektoren (2) und (4) ihren Zentriwinkel $d\varphi$ zunächst von 0 auf ein Maximum anwachsen und nachher von diesem Maximum zurück auf 0 abnehmen sehen und schließlich in sich zurückfallen. Es verbleibt somit

$$\int (1) = \int (3).$$

M. a. W. die planimetrierte Fläche ist der Summe der Flächen der Elementarparallelogramme $GG'F''F$ inhaltsgleich. Nun sind die Inhalte der Elementarparallelogramme gleich der Basis GF = Fahrarmlänge b mal der Elementarhöhe senkrecht zur Basis, d. h. mal der Strecke, um welche sich der Fahrarm parallel zur eigenen Richtung verschoben hat. Diese ist aber nichts anderes als die Strecke, um welche die Integrierrolle sich in der eigenen Ebene auf dem Papier abgerollt hat, da die Rolle zum Fahrarm senkrecht steht.[20]) Es gilt also der Satz:

> Der Inhalt der planimetrierten Gesamtfläche ist gleich dem Produkt aus Fahrarmlänge und Abrollweg der Integrierrolle,

[20]) Die mit der Entstehung des Sektors $F''G'F'$ verknüpfte Schwenkung der Integrierrolle vom Betrag $d\varphi$ liefert keine Abwicklung der Rolle, da die Schwenkung senkrecht zur Rollenschneide erfolgt.

oder: gleich dem Produkt aus Fahrarmlänge und Summe der Projektionen des Gelenkweges GG' nach der Kante der Integrierrolle.

Mathematisch ausgedrückt:

$$F = b\int a\,\mathrm{d}\varphi \cdot \sin\delta \tag{1}$$

Diese Gleichung beherrscht die ganze Theorie des Polarplanimeters und seiner Erweiterungen.

Liegt dagegen der Pol P im Innern der umfahrenen Fläche, so verschwinden jetzt bei Rückkehr zum Ausgangspunkt die Beiträge $\int$ (2) und $\int$ (4) nicht mehr, indem der Winkel $\mathrm{d}\varphi$ eine ganze Umdrehung 2π vollzogen hat, die Sektoren PGG' und $F''G'F'$ je zu einem ganzen Kreis geworden sind. Die Schlußgleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} F &= \int(2) + \int(4) + \int(3) \\ &= \pi \cdot a^2 + \pi \cdot b^2 + b\int a\,\mathrm{d}\varphi \cdot \sin\delta \end{aligned} \tag{1'}$$

Zur Meßrollenabwicklung kommt also in diesem Falle die Integrationskonstante $\pi\,(a^2 + b^2)$ hinzu.

Der Umstand, daß das mathematische Urgebilde des Amslerschen Polarplanimeters das ebene Dreieck ist, legt nahe, dasselbe entsprechend der Natur des Dreiecks, d. h. trigonometrisch, zu behandeln.

Seien (Abb. 10) a, b, c die Dreieckseiten, γ der c entgegengesetzte Winkel a, b, so hat das bestrichene Polardreieck PFF' den Inhalt: $\mathrm{d}F = \frac{1}{2} \cdot c\,\mathrm{d}\varphi \cdot c$. Also ist der Flächeninhalt der umfahrenen Fläche

$$F = \int_{\varphi} \frac{1}{2} c^2 \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Nun wenden wir auf das Dreieck a, b, c den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie für die Seite c an:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

In vorstehende Formel eingesetzt und zwischen den der Umfahrung entsprechenden Grenzen φ_0 und φ_1 integriert gibt:

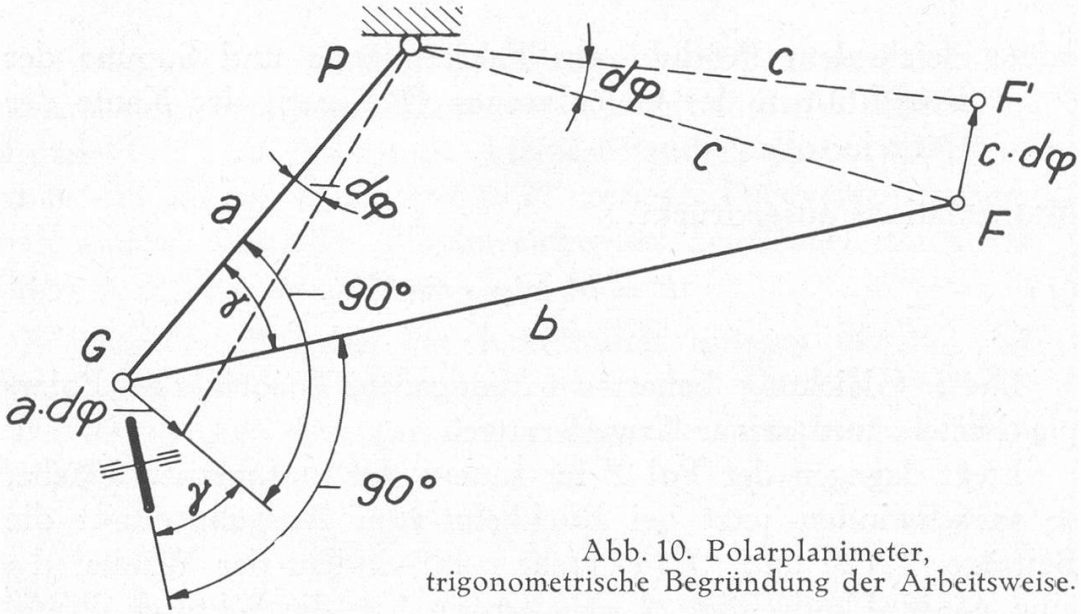


Abb. 10. Polarplanimeter, trigonometrische Begründung der Arbeitsweise.

$$F = \int_{\phi} \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi - b \int_{\phi} a d\varphi \cdot \cos\gamma$$

Bei Rückkehr zum Ausgangspunkt sind die beiden Grenzen φ_0 und φ_1 entweder einander gleich (Pol außerhalb der Figur, Abb. 7) oder φ_0 und $\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi$ (Pol innerhalb der Figur, Abb. 8). Das erste rechtsseitige Integral ist also je nachdem entweder $= 0$, oder $= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \cdot 2\pi = \pi (a^2 + b^2)$ und es gilt:

(2) (2') $$F = \left.\begin{matrix} 0 \\ \text{oder } \pi (a^2 + b^2) \end{matrix}\right\} - b \int_{\phi} a d\varphi \cdot \cos\gamma$$

Man beachte (Abb. 10), daß der Betrag $a d\varphi \cdot \cos\gamma$ die in die Schneide der Integrierrolle fallende Komponente des Elementarweges GG' des Gelenkes ist. Uebrigens sind die Winkel γ und δ der Figuren 10 und 9 zueinander um 90^0 verschoben, also $-\cos\gamma = \sin\delta$, so daß die beiden einmal rein geometrisch, einmal rein trigonometrisch gewonnenen Schlußformeln (1), (1') und (2), (2') miteinander identisch sind.

Bei den beiden Darstellungsarten drängt sich von selber die merkwürdige Integrationskonstante $\pi (a^2 + b^2)$ auf. Sie scheint also in der Wirkungsweise des Polarplanimeters eine eigentümliche Rolle zu spielen. In der Tat stellt sie den Inhalt eines Kreises mit Radius $\sqrt{a^2 + b^2} = c_0$ dar und dieser Kreis hat eine besondere Bedeutung:

Es ist der Kreis, auf welchem der Fahrarm GF senkrecht zum Polarm PG steht, also auf welchem die Integrierrolle nach P gerichtet bleibt, und gar keine Abwicklung erfährt. Abb. 11. Dieser Kreis ist der natürliche „Nullkreis" des Planimeters, und es lohnt sich die Mühe, die Mathematik des Polarplanimeters noch auf eine dritte Art, im Lichte dieses Kreises zu betrachten, denn ganz abgesehen vom Interesse, bildet die dritte Betrachtungsweise, die sogen. Nullkreistheorie des Polarplanimeters, den naturgemäßen Uebergang vom Polarplanimeter zu seiner sehr wichtigen Abart, dem weiter unten angeführten Amsler'schen Linearplanimeter.

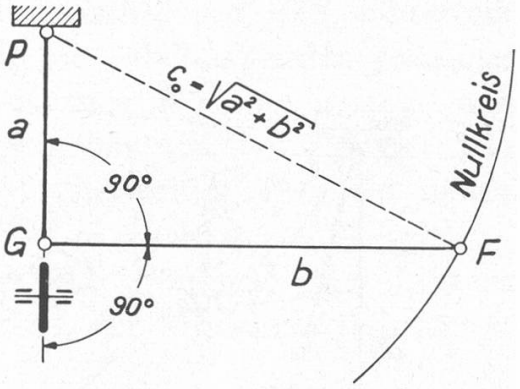


Abb. 11. Polarplanimeter, Entstehung des Nullkreises.

Der Nullkreis werde (Abb. 12) als krummlinige Abszissenachse angesehen, auf welche die zu planimetrierende Kontur K bezogen ist. Von den innerhalb des Nullkreises gelegenen Teilen der Elementardreiecke PFF' werde nunmehr abgesehen. Elementarflächen sind nach Abzug der inneren Dreiecke $\frac{1}{2} \cdot c_0\, d\varphi \cdot c_0$ unendlich schmale Trapeze mit krummen Basen $AA'F_1'F_1$ (schräg schraffiert). Die Gesamtumfahrung der Flächenkontur ist äquivalent mit der Resultierenden von Einzelumfahrungen der Elementartrapeze $AA'F_1'F_1$ im Sinne der Pfeile.

Zu einer flächenäquivalenten Einzelumfahrung gelangt man auf folgende Art: verzerrungslose Schwenkung $d\varphi$ des rechtwinkligen Nullkreisdefinitionsdreieckes (a, b, c_0) längs des Nullkreisbogens F_0F_0'; Verzerrung des Nullkreisdefinitionsdreieckes um den Winkel δ zum allgemeinen (stumpfen) Dreieck (a, b, $c > c_0$), dabei Beschreibung des Kreisbogens $F_0'F_1'$ mit Radius b; verzerrungslose Zurückschwenkung des allgemeinen (stumpfen) Dreiecks auf konzentrischem Kreisbogen $F_1'F_1$; Wiederentzerrung des allgemeinen Dreiecks zum Null-Dreieck entlang dem Kreisbogen F_1F_0.

Die neue Elementarfläche ist jetzt ein allseitig krummliniges Trapez; die Aequivalenz des neuen Trapezes $F_0F_0'F_1'F_1$ mit dem symmetrischen ersten Trapez $A_0A'F_1'F_1$ ergibt sich aus der Gleichheit je der beiden Basen und der Höhen, für beide $= c - c_0$.

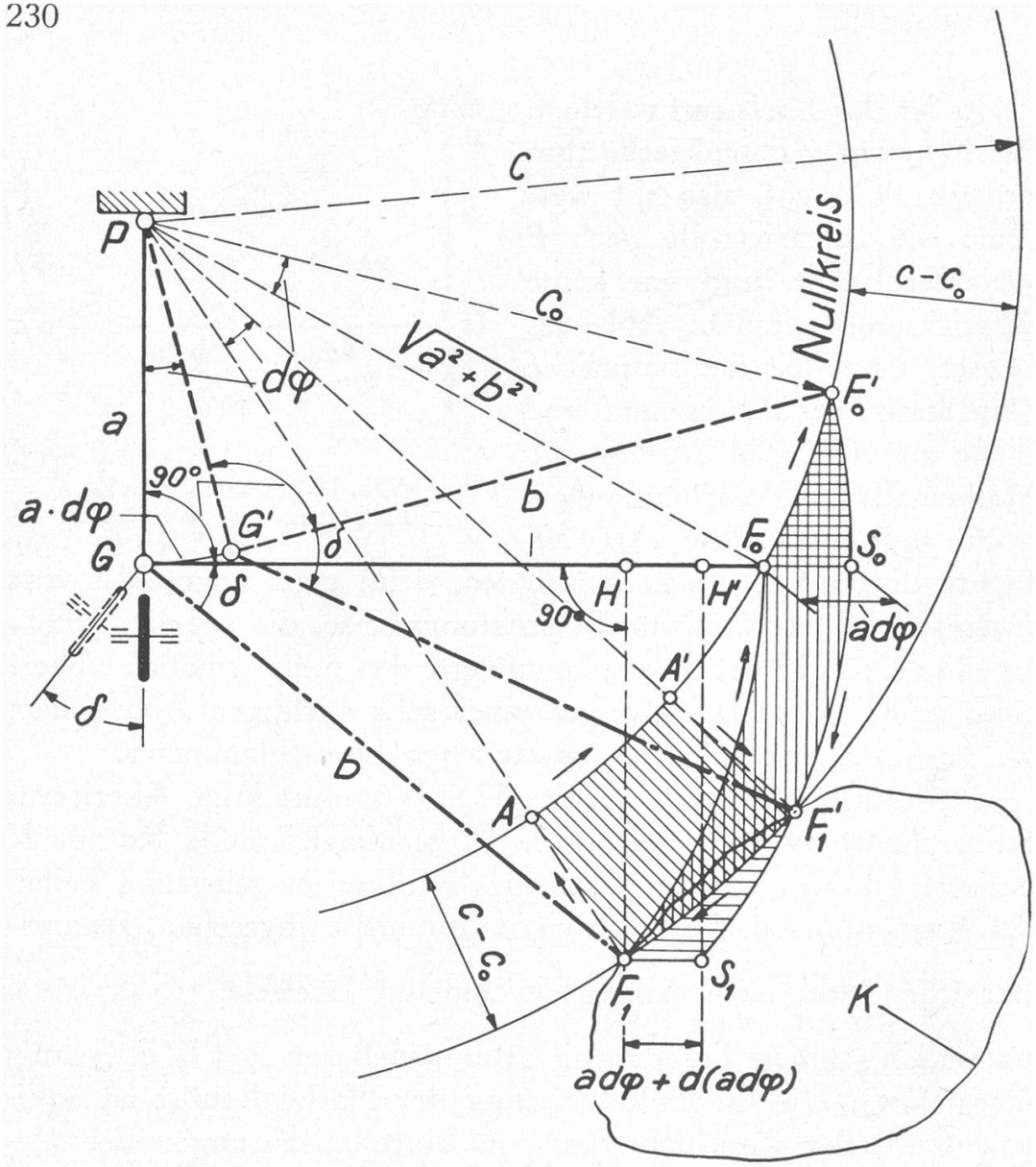


Abb. 12.
Polarplanimeter, auf dem Nullkreis beruhende Begründung der Arbeitsweise.

Durch die Parallelen F_0S_0 und $F_1S_1 // GF_0$ verwandle man schließlich das allseitig krummlinige zweite Trapez in das äquivalente dritte $F_0S_0S_1F_1$ mit zwei geraden Basen [21]). Die mittlere Breite desselben $\frac{F_0S_0 + F_1S_1}{2}$ ist bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung $\cong HH' \cong GG' = ad\varphi$. Der Inhalt der Elementarfläche über der krummen Abszissenaxe ist also $HH' \cdot F_1H = ad\varphi \cdot b \sin\delta$.

[21]) Die Aequivalenz der beiden letzten Trapeze folgt aus der Flächengleichheit der kleinen, horizontal schraffierten Dreiecke $F_0F_0'S_0$ und $F_1F_1'S_1$. Auf den strengen Beweis sei hier nicht eingegangen; die Gleichheit ist aber einleuchtend, sobald der $\sphericalangle\, \delta$ sehr klein wird, denn es sind dann die kleinen Dreiecke zwischen eng beieinanderliegenden Parallelkreisbogen und Sekanten gleicher Schräge eingeschlossen.

Auch diese dritte, rein planimetrische, auf den Nullkreis fußende Betrachtung führt also für die außenliegenden Flächenkonturen K auf den gleichen Ausdruck $b \int a \, d\varphi \cdot \sin \delta$ wie die Gleichungen (1) und (2) der geometrischen und der trigonometrischen Dreieck-Theorie [22]). Sie bringt aber ein neues Dreieck, das Projektionsdreieck GF_1H nach der Gelenkkreistangente zum Vorschein, welches die Funktion des Linearplanimeters und seiner Erweiterungen, der Momentenplanimeter, beherrscht.

Im Museum Allerheiligen sind ausgestellt:

Eines der ersten J. Amsler-Polarplanimeter mit verstellbarer Fahrarmlänge für verschiedene Figurenmaßstäbe, entsprechend einem wählbaren b in den Formeln (1), (1') und (2), (2') ante. [23]) Abb. 13.

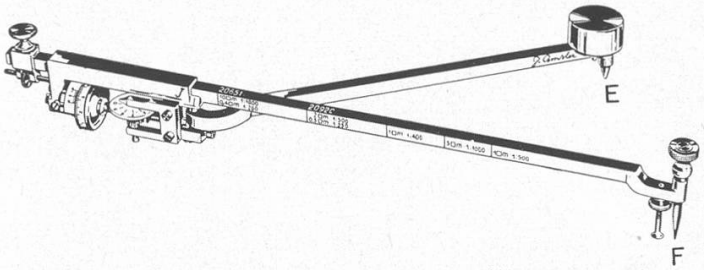


Abb. 13. Polarplanimeter mit verstellbarem Fahrarm.

Eines der ersten J. Amsler'schen, kleinen Polarplanimeter mit unveränderlicher Fahrarmlänge (nur 1 Maßstab). Abb. 14.

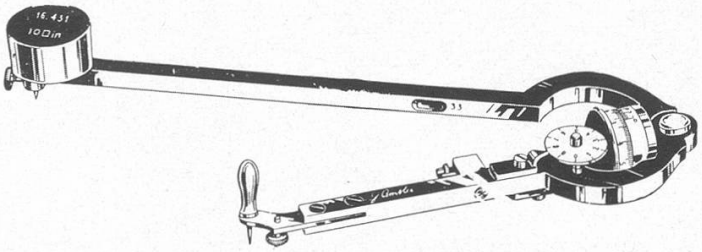


Abb. 14. Polarplanimeter mit unverstellbarem Fahrarm.

Eines der ersten J. Amsler-Polarplanimeter zur Auswertung von Dampfmaschinen-Indikatordiagrammen. Die 2 Stahlspitzen erlauben die Länge des Fahrarms b (Gleichungen (1) und (2)) auf die Diagrammlänge

[22]) In dieser letzten Form ist die Funktionserklärung des Polarplanimeters eng verwandt mit der von Prof. H. Stohler, Basel, im 69. Jahrbuch des Vereins schweiz. Gymnasiallehrer, 1942, gegebenen.

[23]) Das älteste heute auf der Welt existierende J. Amsler'sche Polarplanimeter befindet sich im Deutschen Museum in München.

so einzustellen, daß die mittlere Diagrammhöhe direkt an der Rolle abgelesen werden kann. Abb. 15.

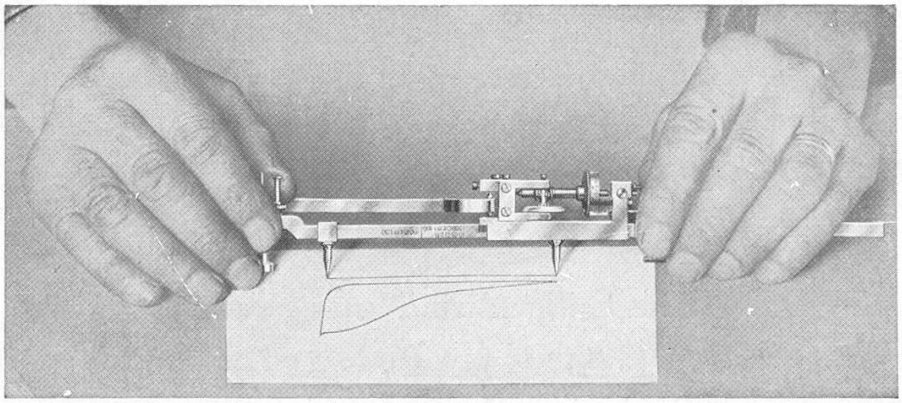


Abb. 15. Polarplanimeter mit Spitzen zur Auswertung von Dampfmaschinen-Indikatordiagrammen.

Die erste unmittelbarste Abart des Polarplanimeters ist eine solche, bei welcher der Fahrstift eine in ihrer Größe für die Auswertung ungeeignete Figur nicht selber umfährt, sondern die vermittelst Umzeichnungsmechanismus ins Große oder ins Kleine übersetzte Figur, nämlich:

Uebersetzung ins Große: Pantographisches Planimeter zur Ausmessung von sehr kleinen Flächen (z. B. in Katasterplänen) mit großer Genauigkeit; der Vergrößerungspantograph betätigt das eigentliche Planimeter. Abb. 16. Photographie im Museum.

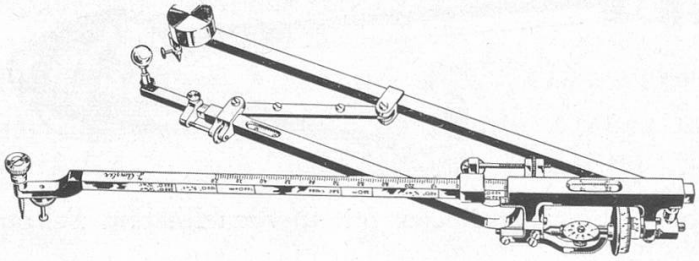


Abb. 16. Pantographenplanimeter.

Uebersetzung ins Kleine: Lederplanimeter zum Ausmessen von Tierhäuten, Fellen; Kombination vom Polarplanimeter mit Nürnberger Schere, welche als Verkleinerungspantograph das (einen Teil der Schere bildende) Planimeter betätigt. Abb. 17. Photographie im Museum.

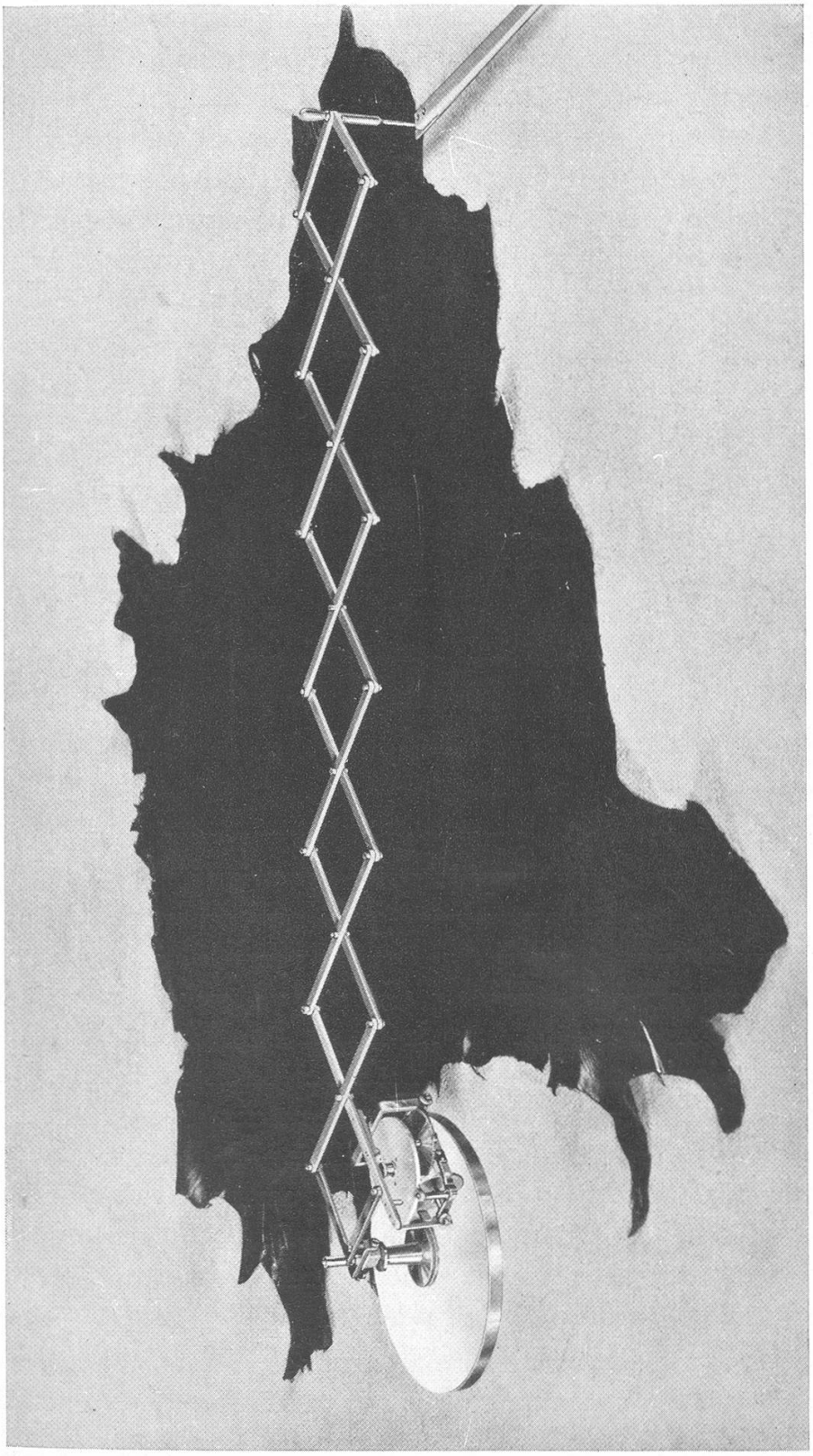


Abb. 17. Lederplanimeter.

Eine zweite Abart des Polarplanimeters nach einer andern Richtung hin ist diejenige, bei welcher, statt wie vorher die zu umfahrende Figur, jetzt der Abwicklungsweg der Integrierrolle

vergrößert wird. Ein konisches Vollrad, dessen Rand beim Umfahren der Figur auf der Zeichnungsebene rollt, überträgt seine Rotation durch Zahnräder auf eine am Polarm drehbar angeordnete, papierüberzogene, waagrechte Scheibe. Die Integrierrolle, welche sich auf dieser Papierscheibe bewegt, ist am Ende eines im Gelenkpunkt senkrecht zum Fahrarm gerichteten Nebenarmes angebracht; ihre Ebene ist wie vorher nach dem

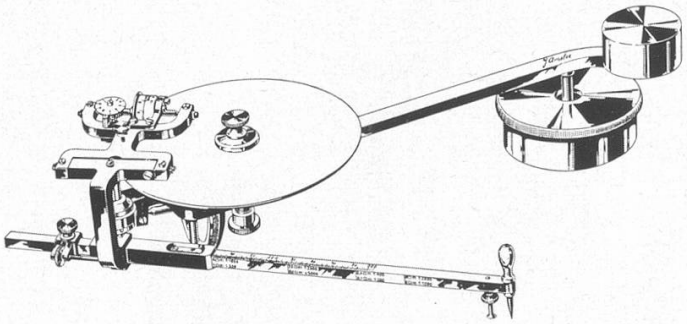


Abb. 18. Scheiben-Polarplanimeter.

Gelenkpunkt gerichtet (Abb. 18). Es ist also hier am Polarplanimeter vom vorbekannten Wetli-Gonella'schen Scheibenintegrator (Seite 213) Anwendung gemacht. Die Funktionsabhängigkeit des senkrechten Rollenabstandes vom Scheibendrehpunkt ist aber nicht einfach wie dort linear, sondern entspricht einem Sinusgesetz: die Konstruktion verwirklicht den sin δ der Formeln (1) und (1') auf Seite 227.

Oder anders ausgedrückt: Es kommt der Lehrsatz, daß der Inhalt der planimetrierten Gesamtfläche gleich dem Produkt aus Fahrarmlänge $\times$ Summe der Projektionen des Gelenkweges nach der Integrierrolle ist, wieder zur Geltung, indem die Integrierrolle nur in der eigenen Richtung, d. h. senkrecht zum Fahrarm, parallel verschoben ist und tatsächlich wieder die Komponenten der übersetzten Gelenkwege nach ihrer Schneide abtastet.[24])

Photographie im Museum.

Die dritte Abart des Polarplanimeters ist schließlich die, bei welcher die Polarmlänge $a = \infty$ gemacht, der Gelenkkreis

[24]) Außer der Vergrößerung der Rollenablesung pro Flächeneinheit, wodurch eine größere Ablesegenauigkeit erzielt wird, hat die Verlegung des Gelenkweges auf eine rotierende Scheibe zur Folge, daß die Abwicklung der Integrierrolle vollkommen unabhängig vom Zustand und der Ebenheit der Zeichnungsfläche ist. Dies sind die 2 Vorteile des Polarplanimeters mit Scheibe gegenüber dem einfachen Instrument.

zum ∞-großen Kreis, d. h. zur Geraden = Abszissenaxe wird. Das Gelenk wird durch Wagen und Schiene der x-Axe entlang-geführt. Hier ist die Nullkreis-theorie des Polarplanimeters die nächstliegende. Denn in diesem Fall deckt sie sich mit der un-mittelbaren Funktionserklärung des Linearplanimeters, welche höchst elementar ist. Ist nämlich $y = b \sin \delta$ die Ordinate, $F = \int y \cdot dx = \int b \sin \delta \cdot dx$ (Abb. 19) der Flächeninhalt der umfahrenen Kontur, so leuchtet es sofort ein, daß $dx \cdot \sin \delta$ die in die Richtung der Kante der Integrierrolle fallende Kompo-nente der Fahrarmtranslation dx, also $\int dx \cdot \sin \delta$ die Rollen-abwicklung ist.

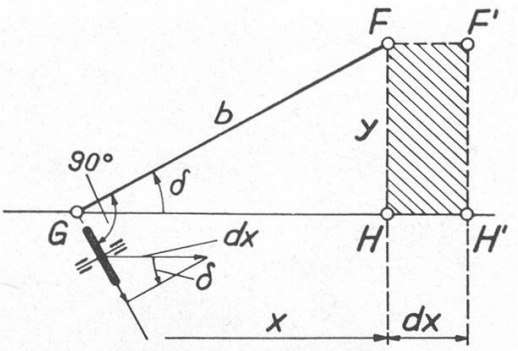


Abb. 19. Linearplanimeter, Begründung der Arbeitsweise.

Abb. 20 stellt das gewöhnliche Linearplanimeter dar, spe-ziell für langgestreckte Diagrammstreifen geeignet — Photo-graphie im Museum, — Abb. 21 dasselbe Planimeter mit

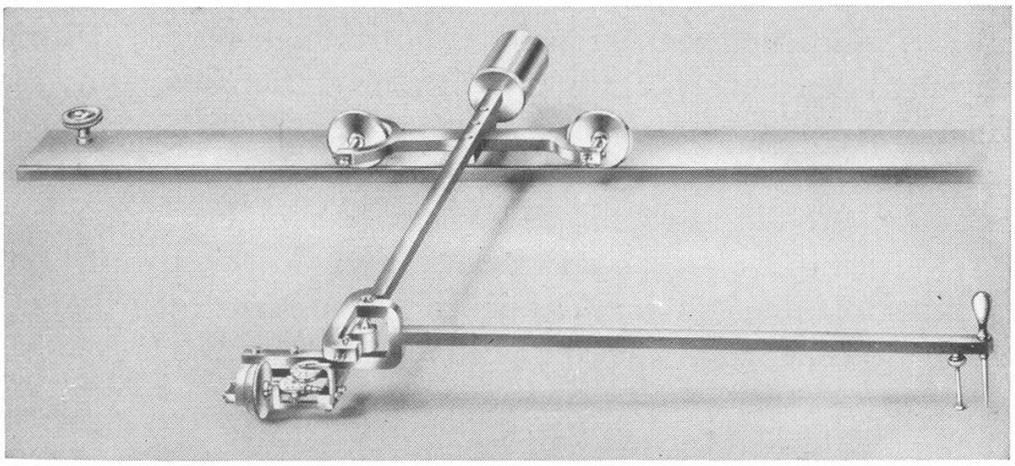


Abb. 20. Einfaches Linearplanimeter.

dx-angetriebener rotierender Scheibe (Scheibenlinearplanimeter), das Aequivalent des Scheibenpolarplanimeters. Photographie im Museum.

Das Linearplanimeter ist eine rein konstruktive Abart des Polarplanimeters, stellt also gegenüber diesem gedanklich nichts Neues dar, ist aber als Uebergangsglied zwischen dem Polar-planimeter und den nachfolgenden Momentenintegratoren von prinzipieller Bedeutung.

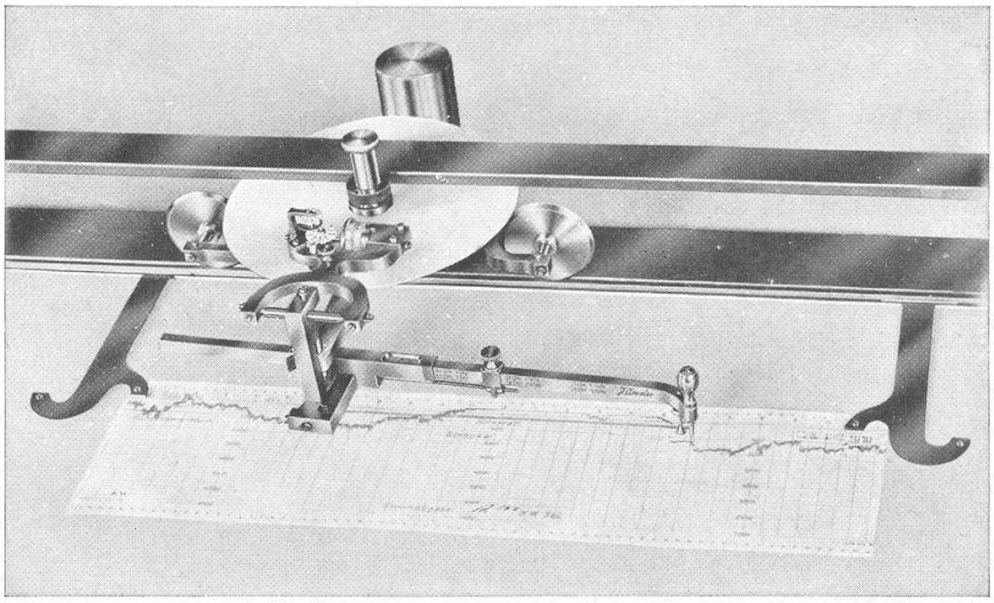


Abb. 21. Scheiben-Linearplanimeter.

b) *Die Amsler'schen Momenten-Planimeter, eine Erweiterung des Linearplanimeters.*

Unter 3 a) ist darauf hingewiesen worden, daß das Polarplanimeter einen trigonometrischen Hintergrund besitzt. Dank der fast unbegrenzten Transformationsfähigkeit der trigonometrischen Formeln für sin und cos von Summen und Vielfachen von Winkeln erwächst daraus die Möglichkeit, welche Jakob Amsler sofort erkannt und angewandt hat, das Linearplanimeter auf die mechanische Auswertung von Potenzintegralen zu erweitern. Der trigonometrische y-Ausdruck $y = b \sin \delta$ des Linearplanimeters im Verein mit den bekannten Formeln für die Potenzen der sinus-Funktion:

$$\sin^2\delta = \frac{-\cos 2\delta + 1}{2}$$

$$\sin^3\delta = \frac{-\sin 3\delta + 3\sin \delta}{4} \tag{3}$$

$$\sin^4\delta = \frac{+\cos 4\delta - 4\cos 2\delta + 3}{8}$$

erlaubt die in der Technik wiederholt vorkommenden höheren Flächenmomente [25]):

[25]) Das Moment 4. Ordnung kommt vor: bei Aufgaben der Schiffsstabilität, siehe F. Redtenbacher, Der Maschinenbau, Mannheim, Friedr. Bassermann, Verlag, 1865, Bd. III, S. 145—148; bei Aufgaben der Dynamik des rotierenden Körpers und der Ballistik, so z. B. bei der konischen Pende-

$$\text{Statisches Moment} \quad M = \int \frac{1}{2} y^2 \cdot dx = \int \frac{b^2}{2} \sin^2 \delta \cdot dx$$

$$(4) \quad \text{Trägheitsmoment} \quad J = \int \frac{1}{3} y^3 \cdot dx = \int \frac{b^3}{3} \sin^3 \delta \cdot dx$$

$$\text{Moment 4. Ordnung} \quad P = \int \frac{1}{4} y^4 \cdot dx = \int \frac{b^4}{4} \sin^4 \delta \cdot dx$$

mittels eines Linear-Mehrfachplanimeters zu bestimmen, dessen verschiedene Integrierrollen durch Zahnräder mit den Uebersetzungen 1:1, 1:2,... usw. bis 1:4, um das 1-, 2-... bis 4-fache des Fahrarmwinkels gegenüber der Ausgangsrichtung gedreht werden. Die Ablesungen an den Meßrollen sind entsprechend den in $1 \cdot \delta$, $2 \cdot \delta$... bis $4 \cdot \delta$ mehrgliedrigen trigonometrischen Formeln für $\sin^2 \delta$ etc. bis $\sin^4 \delta$ nach Koeffizient und Vorzeichen passend in mehrgliedrige Sammelausdrücke einzusetzen. Darin besteht der vielverbreitete Jakob Amsler'sche Momentenintegrator, dessen Theorie und Beschreibung so bekannt ist, daß sie hier übergangen wird.[26])

Abb. 22 stellt den Amsler'schen Integrator für Momente bis zur 2. Ordnung (Fläche und Statisches Moment) dar. Interessant

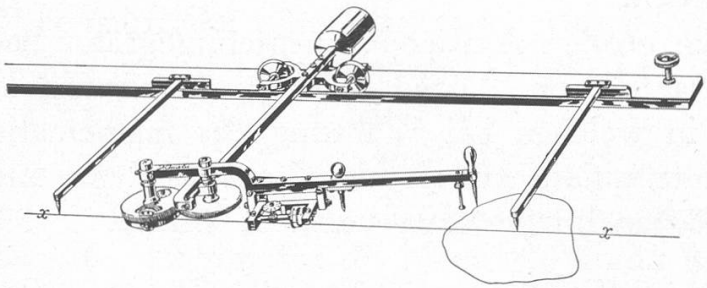


Abb. 22. Kleiner J. Amsler-Integrator für Fläche und statisches Moment.

ist die Verzweifachung des Winkels δ durch ein Planetengetriebe. Photographie im Museum.

Abb. 23 veranschaulicht den großen Amsler-Integrator für Momente bis zur 4. Ordnung mit Vervielfachung des Winkels δ bis zu 4:1 mittels Stirnräder mit örtlich fester Achse. (Instrument im Museum.) Beide Instrumente in neuzeitlicher Aus-

lung der Geschoße, siehe: Dubois, Bulletin Technique de la Suisse Romande, 27. Februar 1926, S. 53/55, Détermination du moment centrifuge d'une surface au moyen de l'intégrateur; 23. Oktober 1926, S. 261/265, Détermination des moments d'inertie polaires d'un corps de révolution au moyen de l'intégrateur; Dubois, Schweizerische Monatsschrift für Offiziere aller Waffen, August 1913, Bestimmung der polaren Trägheitsmomente eines Geschosses mittels des Integrators.

[26]) Siehe z. B. Galle, Mathematische Instrumente, Seiten 118—121.

führung entsprechend der Jakob Amsler'schen Originalkonstruktion, nur in den Details von Alfred Amsler leicht verbessert.

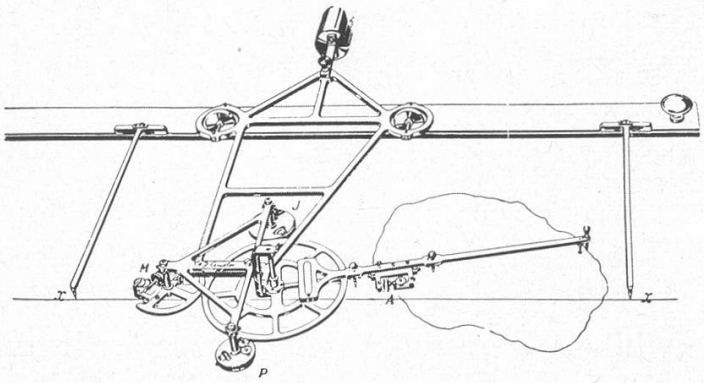


Abb. 23. Großer J. Amsler-Integrator für Momente bis zur 4. Ordnung.

Es ist der Vollständigkeit halber noch darauf hinzuweisen, daß Prof. Jakob Amsler in seiner berühmten Originalabhandlung vom Jahre 1856 die Verzweifachung, bezw. Verdreifachung des Winkels δ in Gleichungen (3) statt mit Zahnrädern mittels gleichseitiger Dreiecke (z. B. äußerer Spitzenwinkel $= 2 \times$ innerer Basiswinkel) angegeben hat. Diese Konstruktion ist in der Folge von andern Firmen als die Firma Amsler gelegentlich angewendet worden.

Von dem großen Amsler-Momentenintegrator bestehen zwei hochinteressante, von Alfred Amsler stammende konstruktive Varianten, in welchen bei Wahrung des mathematischen Prinzips die Integration mittels der konstruktiven Elemente der Rotationsflächen-Integratoren versucht wurde.

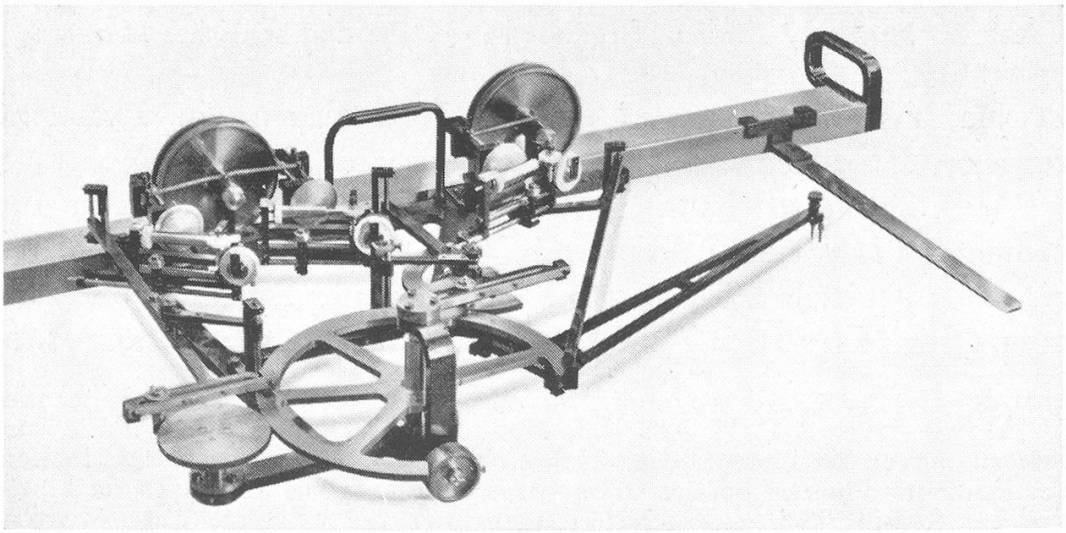


Abb. 24. A. Amsler-Integrator für Momente 1. bis 3. Ordnung mit Kugelkalotten-Integrationsvorrichtung.

Die eine im Jahre 1893 entstandene Variante ist in Abb. 24 ersichtlich. Sie macht Gebrauch von den Coradi'schen Kugel-kalotten-Integratoren. Das Instrument ist für die Momente bis zur 3. Ordnung, also Fläche, statisches Moment und Trägheits-moment, bestimmt. Für jede Ordnung n wird zunächst mittels Stirnräder der Winkel $n\,\delta$, $1 \cdot \delta$ am Fahrarm selbst, gebildet und für die 1. und 3. Ordnung sin $n\,\delta$, für die 2. Ordnung cos $n\,\delta$ mit Hilfe von Kurbelscheiben und Kurbelwarzen verwirklicht. Sin und cos werden mit Kurbelschleifen abgegriffen und durch Gelenkparallelogramme auf horizontale, um ihre Achse drehbare Integrierzylinder [27]) übertragen, welche die senkrecht stehenden Kugelkalotten No. 1—3 entlang ihrem größten Horizontalkreise unter Federdruck berühren. Die Winkelabstände der Berüh-rungspunkte von den Kalottendrehachsen sind somit für die 1. und 3. Ordnung arc sin (sin $n\,\delta$), für die 2. Ordnung arc sin (cos $n\,\delta$); die senkrechten Abstände der Berührungspunkte von den Kalottendrehachsen, m. a. W. die Rotationshalbmesser der Integrierzylinder-Mitnahme, sind sin $1 \cdot \delta$, sin $3 \cdot \delta$, bezw. cos $2 \cdot \delta$ proportional. Angetrieben sind die Kugelkalotten No. 1 (rechts), 2 (Mitte) und 3 (links) durch Ritzel, welche in den gezahnten Rand der Wagenlaufräder eingreifen, also proportional dx. Die Potenzintegration gemäß Gleichungen (3) und (4) ist also da-mit erreicht. Photographie im Museum.

Die andere, auf das Jahr 1892 zurückgehende Variante, Abb. 25, bezieht sich auf einen Momentenintegrator für rein ballistische Zwecke, also nur für die Momente 2. und 4. Ordnung. Die Potenzintegration gemäß Gleichungen (3) und (4) wird hier mittels Scheibenintegrators, also ähnlich wie beim einfachen Scheibenlinearplanimeter vollzogen. Die Winkel $2\,\delta$ bezw. $4\,\delta$ werden mittels Stirnräder 1 :2, bezw. 1 : 4 gebildet, wovon das größere Ausgangsrad seine Bewegung δ mittels Gelenkparallelo-grammes vom Fahrarm erhält. Die kleineren Zahnräder tragen die Integrierrollen für cos $2\,\delta$ bezw. cos $4\,\delta$ entsprechend der 1. und 3. der Gleichungen (3). In der Ausgangslage ($\delta = 0$) des Fahrarms sind die Drehachsen der Integrierrollen nach dem Mittelpunkt der Drehscheibe, ihre Schneiden senkrecht zur Ver-bindungslinie: Zentrum Drehscheibe - Zentrum Zahnräder 1 : 2

[27]) Diese Zylinder stellen die Integrierrollen dar: sie sind nichts anderes als die beidseitig der Rollenebene über dieselbe hinaus verlängerte Rollen-Mantelfläche, also eine rein konstruktive Maßnahme.

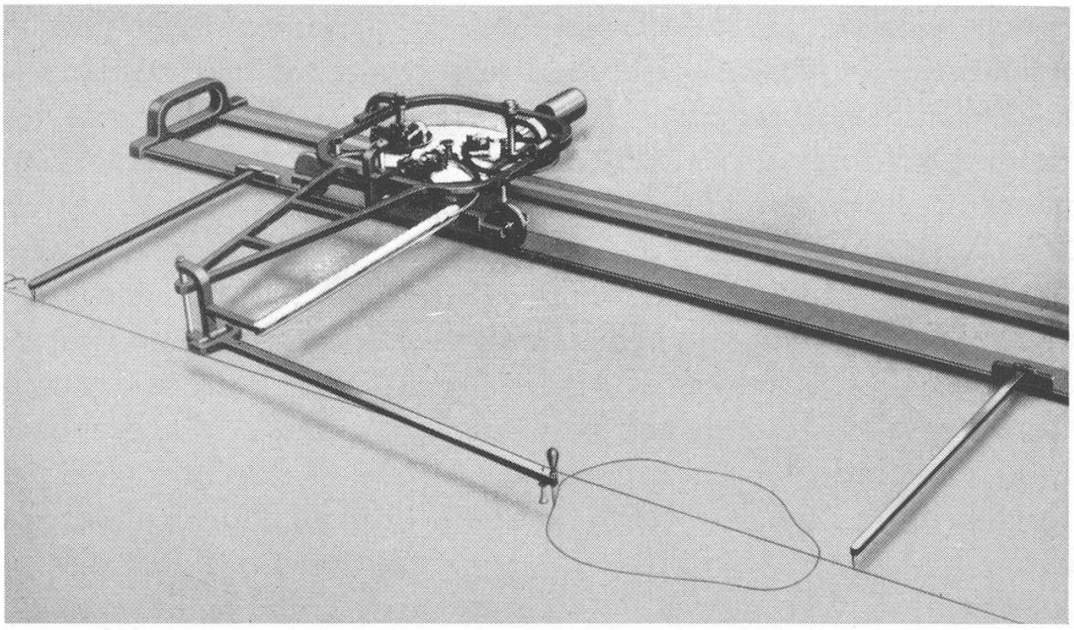


Abb. 25. A. Amsler-Integrator für Momente 2. und 4. Ordnung mit Sinus-Scheibenintegrationsvorrichtung.

und 1:4, gerichtet[28]); dadurch entsteht die cos-Wirkung der 2. und 4. Gleichung (3). Die papierüberzogene Drehscheibe wird durch einen mit der Zahnung an der Kante des Führungslineals kämmenden Ritzel in Rotation versetzt. Photographie im Museum.

Die beiden zuletzt beschriebenen Integratoren von Alfred Amsler wurden nur ein einziges Mal ausgeführt. Sie stellen mathematisch beachtenswerte Konkurrenzlösungen zu der Originalkonstruktion Jakob Amsler's dar, sind dafür aber auch verwickelter als diese. Das ist wohl der Grund dafür gewesen, daß Alfred Amsler diese Linie nicht weiter verfolgt und sich nur noch damit begnügt hat, die ursprüngliche Konstruktion seines Vaters zu verfeinern.

---

[28]) Die für die Integrierrollenabwicklung maßgebenden, senkrechten Abstände der Kanten der Integrierrollen vom Scheibenmittelpunkt sind $e_2 = c \cos 2\delta - r$, resp. $e_4 = c \cos 4\delta - r$, c = Abstände Mitte Drehscheibe — Mitte Zahnräder 1:2, 1:4, r = Entfernung der Meßrollenkanten von Zahnrädermitten. Es entstehen also außer den nützlichen Integralen in $\cos 2\delta \cdot dx$ und $\cos 4\delta \cdot dx$ Parasitintegrale in $r \cdot dx$, welche bei Rückkehr zum Anfangspunkt nach Konturumfahrung verschwinden.

Die Parasitintegrale, welche in der ganzen Theorie des Polarplanimeters und seiner Abarten eine sekundäre, aber für die exakte mathematische Behandlung wichtige Rolle spielen, sind in diesem Aufsatz anschaulichkeitshalber unerwähnt geblieben. Siehe darüber u. a. Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen, Jahrgang 1942/43, Dubois, Planimeter für gebrochene Potenzen, Seiten 263, 266 und 269.

Schließlich sei des mathematischen Zusammenhanges wegen an dieser Stelle auf die nach Angaben des Verfassers von der Firma Amsler ausgeführten Planimeter für gebrochene Potenzen hingewiesen. (Auswertung von Integralen $\int y^{\frac{n}{2}} \cdot dx = \int b^{\frac{n}{2}} \cdot \sin^{\frac{n}{2}} \delta \cdot dx$, n = ganzzahlig, vermittelst Linearplanimeters mit $1\frac{\delta}{2} \ldots$ bis $n\frac{\delta}{2}$ ausschlagenden Integrierrollen = Analogon des J. Amsler'schen Momentenplanimeters.) Siehe Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen, Jahrg. 1942/1943 (Fußnotiz 28).

c) *Das stereographische Planimeter von Alfred Amsler.*

Durchaus in der Linie der Erweiterungen des Polarplanimeters liegt das stereographische Planimeter von Alfred Amsler. Dieses in einem einzigen Exemplar konstruierte, hochinteressante Instrument dient dazu, aus einer Erdkarte in stereographischer Projektion Länderflächen trotz der Kartenverzerrung in ihrer wahren Größe auf der Erdkugel zu planimetrieren.

Bei der stereographischen Kartenprojektion werden die Punkte der nördlichen Halbkugel vom Südpol auf eine durch den Nordpol gelegte Tangentialebene, die Punkte der südlichen Halbkugel vom Nordpol auf eine durch den Südpol gelegte Tangentialebene konisch projiziert. Diese Projektionsart gewährt eine lokal winkeltreue Projektion, d. h. die elementaren Länderteile sind ihrer stereographischen Projektion ähnlich, dagegen verändert sich das Aehnlichkeitsverhältnis und mit ihm der Kartenmaßstab von Punkt zu Punkt[29]).

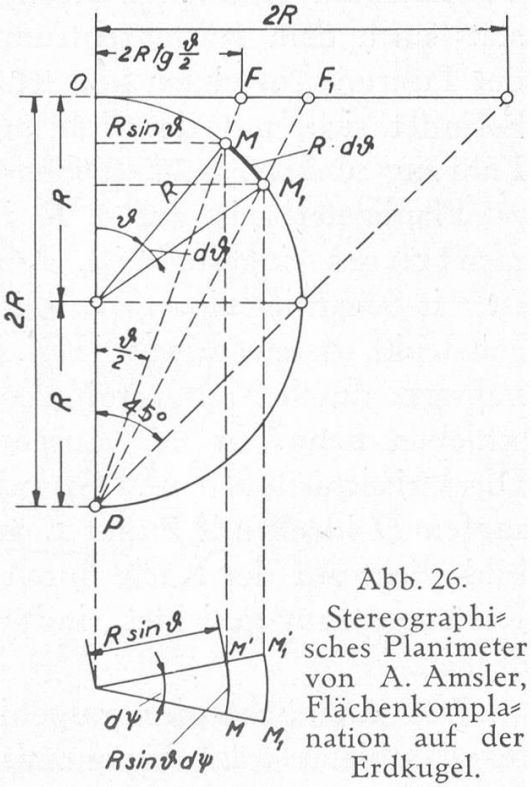


Abb. 26. Stereographisches Planimeter von A. Amsler, Flächenkomplanation auf der Erdkugel.

Der Inhalt eines kleinen Flächenelementes auf der Kugeloberfläche ist, Abb. 26,

$$dd F = R \sin\vartheta \, d\psi \cdot R \, d\vartheta$$

(R = Erdradius, ϑ = vom

[29]) Im Gegensatz zu der ebenfalls viel verwendeten Lambert'schen Projektion, welche genau flächentreu, dafür aber nicht winkeltreu ist.

Nordpol aus gemessene geographische Breite, ψ = geographische Länge) und somit der Inhalt eines ganzen Landes:

$$F = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \int_{0}^{\psi} R \sin\vartheta \, d\psi \cdot R d\vartheta = R^2 \cos\vartheta_0 \int_{\phi} d\psi - R^2 \int_{\phi} \cos\vartheta \, d\psi$$

Bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt nach Beschreibung der ganzen Landeskontur, ohne Umfahrung des Pols, ist $\int_{\phi} d\psi = 0$ und daher:

$$(5) \qquad \underset{Kontur}{F} = -R^2 \int_{\phi} \cos\vartheta \, d\psi$$

Um die nach $\cos\vartheta \, d\psi$ verlaufenden wahren Flächenelemente zu planimetrieren, muß also das Spezialplanimeter aus den nach $2 R \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ verlaufenden Radiusvektoren der stereographischen Karte den Breitenwinkel ϑ zurückkonstruieren.

Das stereographische Planimeter von Alfred Amsler (Abb. 27) besteht aus einer im Zentrum O der Halbkugelkarte (Fußpunkt des zur Projektionsebene senkrechten Erddurchmessers) drehbar eingehängten radialen Führung. In dieser Führung gleitet der stets nach dem Kartenzentrum gerichtete Fahrarm OF. Hinter der Führung, in einem konstruktiv bedingten Abstand $OE = a$, befindet sich, mit der Führung ein Ganzes bildend, eine zur Führung senkrechte, ausziehbare Grundschiene ES, deren Länge = Planimeterbasis auf $2 R$ im Maßstab des Kartenzentrums eingestellt ist. Am unteren Endpunkt S desselben ist mit Scharnier eine geradlinige, drehbare Direktrixschiene DS angelenkt, deren äußerer Teil sich in einer orientierbaren, vom Fahrarm durch Zapfen mitgenommenen, kleinen Hülse frei verschieben kann. In der Ausgangslage des Planimeters würden Direktrixschiene DS und Grundschiene ES sich decken (Hülsenzapfen D ideell mit Punkt E zusammenfallend). Das ganze Gebilde liegt auf der Karte durch Rollen, deren Achsen nach dem Kartenzentrum gerichtet sind; auf diesen kann es sich um O drehen.

Der zum Scharnier ausgebildete untere Endpunkt der Direktrixschiene trägt einen mit dem Scharnier konzentrischen Zahnsektor, welcher sich mit einem kleineren, die Integrierrolle tragenden Zahnrad mit Uebersetzung 1:2 ins Schnelle verzahnt.

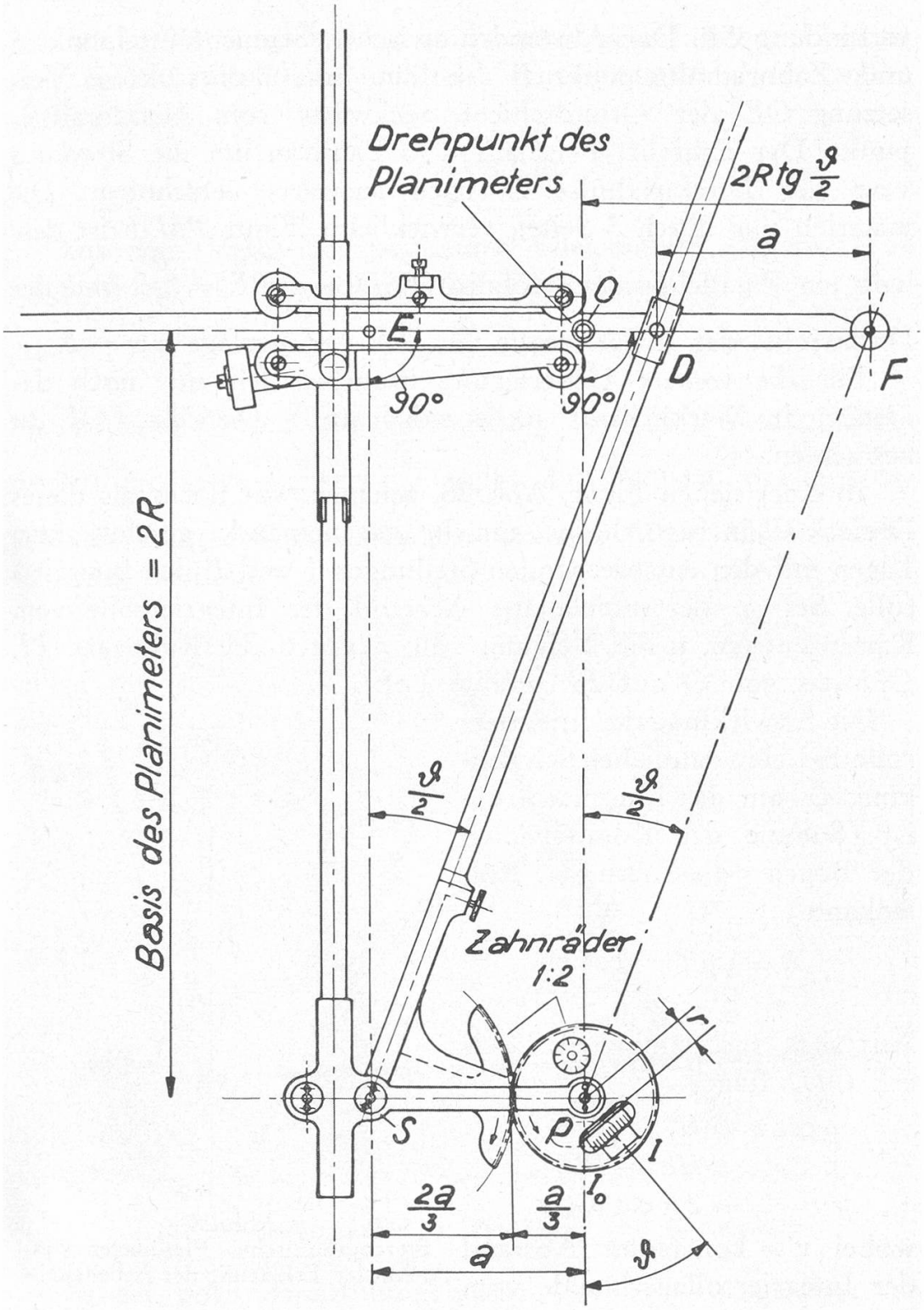


Abb. 27.
Stereographisches Planimeter von A. Amsler, Skizze und Bezeichnungen.

Die Integrierrolle hat cos-Stellung (wie die Rollen 2. und 4. Ordnung des großen Momentenintegrators), d. h. ihre Achse geht durch das Zentrum *P* ihres Zahnrades hindurch und in der Ausgangslage ist die Rollenschneide parallel zu der Zentren-

verbindung SP. Der Abstand a zwischen Segmentmittelpunkt S und Zahnradmittelpunkt P bestimmt die konstruktive Versetzung OE der Grundschiene rückwärts vom Kartenmittelpunkt. Der Fahrstift F ist auf dem Fahrarm um die Strecke a vor der Direktrixhülse D nach auswärts verschoben. Die materiell nur durch 3 Seiten verwirklichte Figur $PSDF$ ist deshalb ein Parallelogramm, folglich $\widehat{ESD} = \widehat{OPF} = \frac{\vartheta}{2}$, und der Drehwinkel der Integrierrolle von der Anfangslage aus $= \vartheta$.

Für die weitere Ueberlegung brauchen wir nur noch das ideelle, in Wirklichkeit nicht existierende Dreieck POF zu betrachten.

In einer neuen Figur, Abb. 28, zeichnen wir nochmals dieses Dreieck allein für sich, in 2 um $d\psi$ gegeneinander geschwenkten Lagen mit den entsprechenden Stellungen I und I' der Integrierrolle. Sei ϱ der momentane Abstand der Integrierrolle vom Kartenzentrum, u die Neigung von ϱ gegen die Rollenaxe PI, OH das von O auf PI gefällte Lot.

Die Abwicklung der Integrierrolle bei einer endlichen Schwenkung ψ um das Kartenzentrum ist (Summe der Komponenten der Bögen $\varrho\, d\psi$ nach der Rollenkante)

$$A = \int_{\emptyset} \varrho\, d\psi \cdot \cos u$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OHI folgt

$$\begin{aligned} \varrho \cos u &= HI \\ &= HP + PI \\ &= 2R\cos\vartheta + r \end{aligned}$$

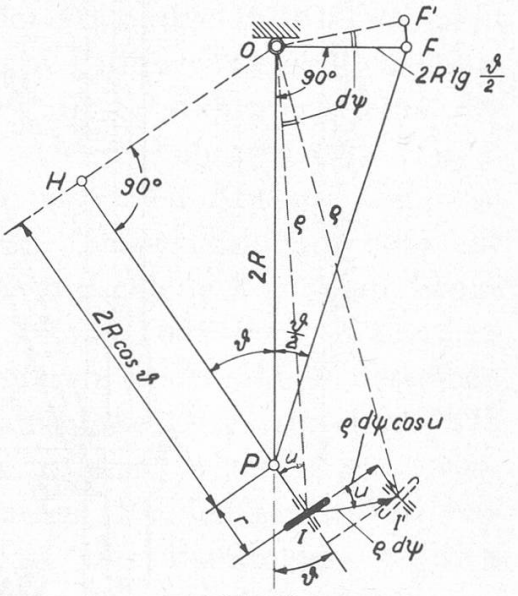


Abb. 28.
Stereographisches Planimeter von A. Amsler, Erklärung der Arbeitsweise.

wobei r = konstanter Abstand der Integrierrollenschneide vom Zahnradmittelpunkt P. In obige Integralformel eingesetzt, gibt

$$\begin{aligned} A &= \int_{\emptyset} (2R\cos\vartheta + r)\, d\psi \\ &= 2R \int_{\emptyset} \cos\vartheta\, d\psi + r \int_{\emptyset} d\psi \end{aligned}$$

Bei Rückkehr zum Anfangspunkt nach geschlossener Umfahrung einer Landeskontur fällt das Parasitintegral $\int_{\emptyset} d\psi$ heraus und es bleibt:

$$A = 2R \int_{\emptyset} \cos\vartheta \, d\psi \tag{6}$$

Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen (5) und (6) folgt schließlich (abgesehen vom Vorzeichen)

$$F = \frac{R}{2} \cdot A \tag{7}$$

Mit andern Worten: die Abwicklung der Integrierrolle multipliziert mit dem Beiwert $\frac{R}{2}$ ergibt, im Maßstab des Kartenzentrums ausgedrückt, die wahre krumme Oberfläche des umfahrenen Landes.

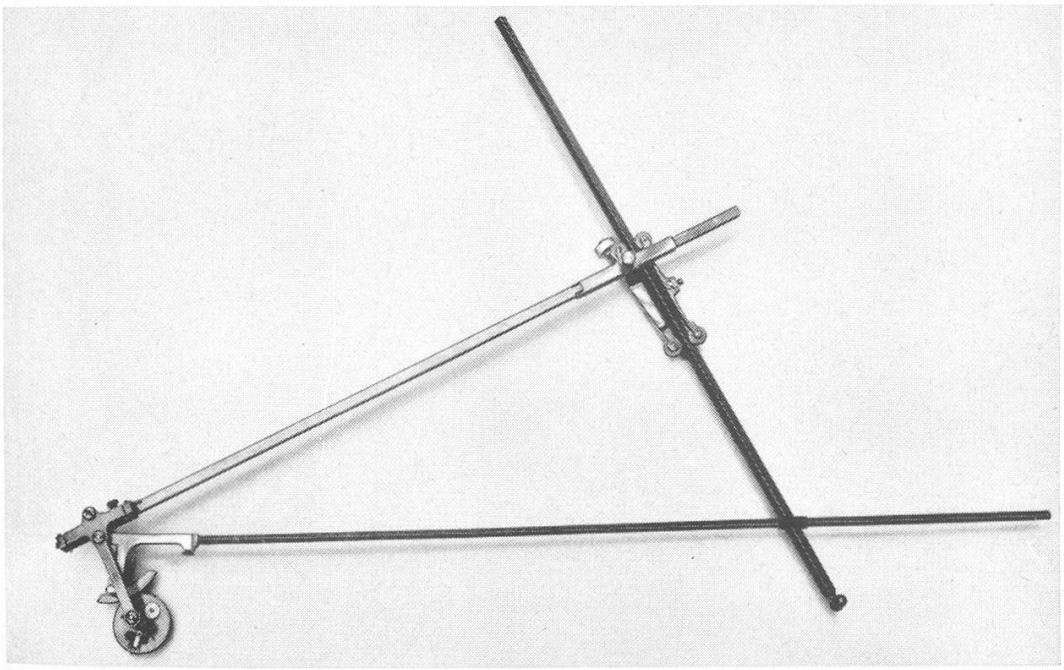


Abb. 29. Stereographisches Planimeter von A. Amsler.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Länge $2R$, auf welche die Basis des Planimeters einzustellen ist, nichts anderes ist als der Radius eines Halbkugelkreises auf der Weltkarte. Siehe Abb. 26.

Das einzige ausgeführte Exemplar des stereographischen Planimeters von Alfred Amsler, Abb. 29, vielleicht sogar das einzige dieser Art auf der Welt, wurde nicht verkauft und fand

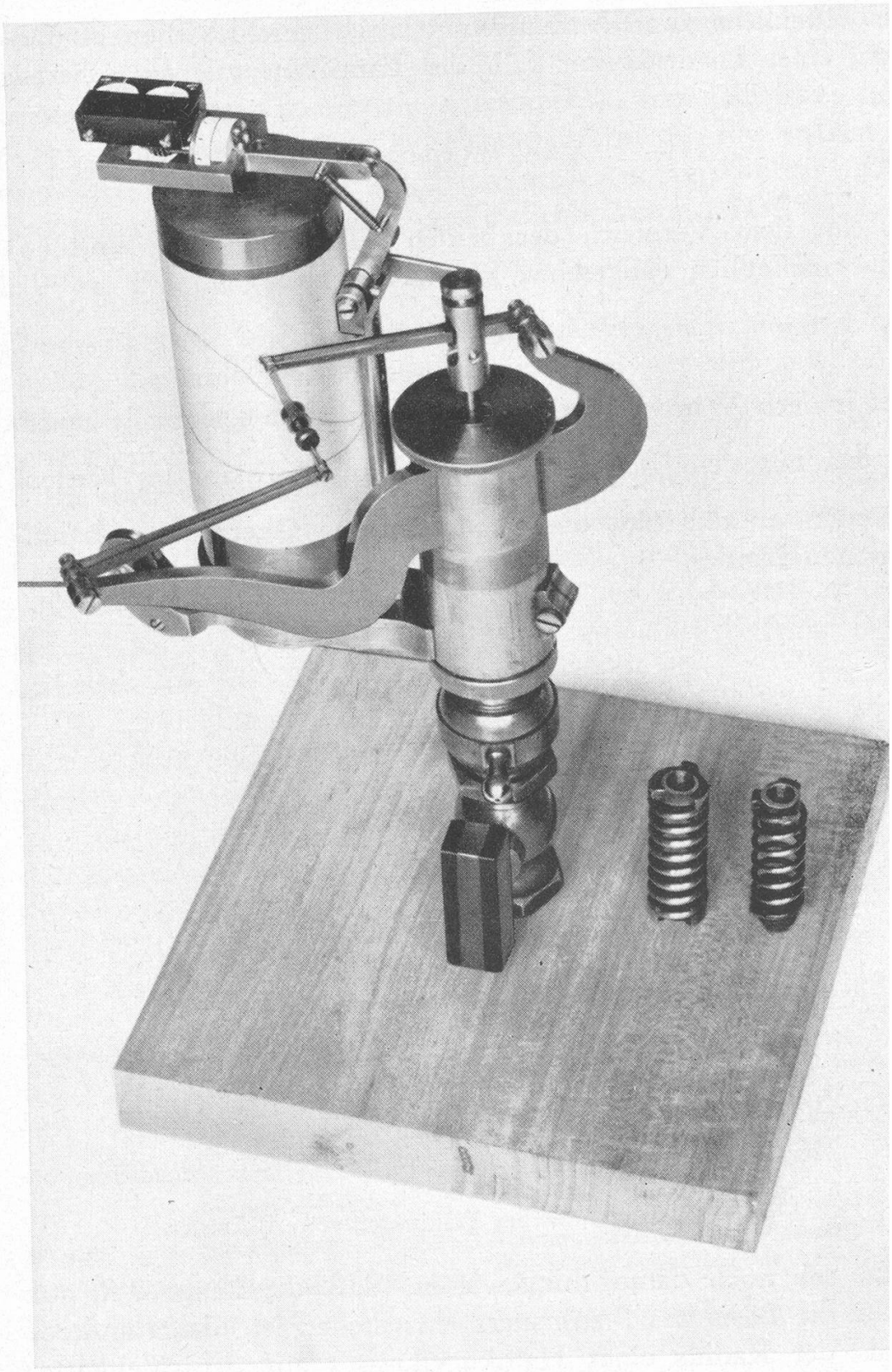


Abb. 30. Integrierender Dampfmaschinen-Indikator mit einfachem Scheibenintegrator.

sich beim Sammeln von Ausstellungsobjekten für das technologische Museum in der Dachkammer der Fabrik Amsler auf dem Ebnat vor. Es hat seinen würdigen Ruheplatz im Museum Allerheiligen gefunden.

4. Der integrierende Dampfmaschinen-Indikator.

Als Abschluß des Kapitels über die Amsler'schen Integrationsapparate soll noch der integrierende Dampfmaschinen-Indikator zur Sprache kommen.

Die Anbringung einer fortlaufenden Integriervorrichtung am Watt'schen Dampfmaschinen-Indikator ist eine altbekannte Sache, die auf alle Fälle aus der Zeit vor Jakob Amsler stammt. Es bestehen aber verschiedene Konstruktionen aus dem Hause Amsler, bei welchen für dieselbe Aufgabe verschiedene nicht-Amsler'sche und Amsler'sche Integrationsprinzipien zur Anwendung kamen und deshalb interessant sind.

Abb. 30 stellt eine Ausführung an einem alten Indikator von Crosby mit Lemniskoïden-Gradführung des Schreibstiftes dar; hier liegt der einfachste Scheibenintegrator von Wetli-Gonella zu Grunde. Die Bewegung des Indikatorkolbens wird vom obersten Punkt der Kolbenstange abgenommen und mittels Winkelhebels proportional auf die entlang einem Radius der Indikatortrommel bewegte Integrierrolle (mit angebautem Zähler) übertragen. Die Stirnfläche der vom Dampfmaschinen-Kreuzkopf aus durch Schnurlauf hin- und hergedrehten Papiertrommel ist zur Integratorscheibe ausgebildet. Apparat im Museum.

Abb. 31 zeigt eine Konstruktion von Alfred Amsler aus dem Jahre 1914 an einem modernen Indikator von Rosenkranz. Hier wird wieder vom Scheibenintegrator Gebrauch gemacht, aber nicht mehr in der Wetli-Gonella'schen Form mit radial geführter Integrierrolle, sondern in der J. Amsler'schen Form mit nach einem Sinus-Gesetz über der Trommelstirnfläche geschwenkter Integrierrolle, genau wie beim Amsler'schen Scheibenpolar- und Scheibenlinearplanimeter, Abb. 18 und 21 ante.

Die dampfdruckproportionale Bewegung wird bei dieser Ausführung vom Schreibstift selbst abgenommen und mittels Ellipsenlenkers in einen verhältnisgleichen sin δ umgewandelt. Der Winkel wird mittels konischer Zahnräder 1:1 schließlich auf den Integrierrolle und Zählwerk tragenden Rahmen übertragen, welcher im Azimut um $\delta = \text{arc sin}\,(\text{Kte} \times \text{Dampfdruck})$

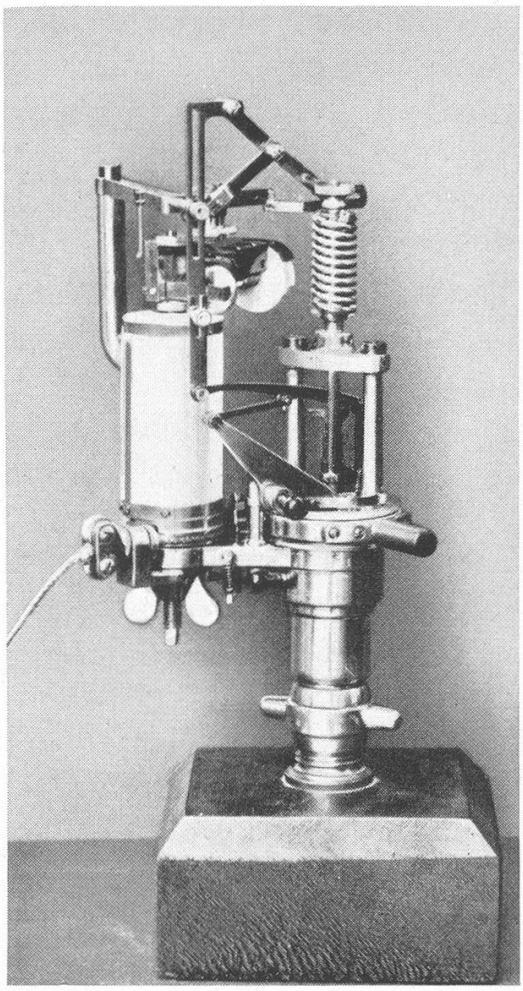


Abb. 31.
Integrierender Dampfmaschinen-Indikator, Konstruktion von A. Amsler mit Sinus-Scheibenintegrator.

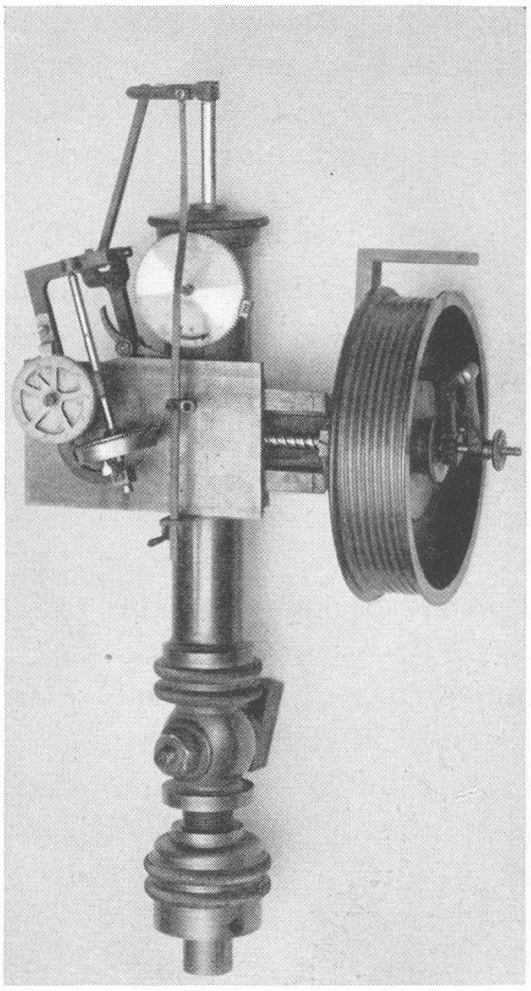


Abb. 32.
Integrierender Dampfmaschinen-Indikator, Konstruktion von J. Amsler mit polarplanimeterähnlichem Integrator.

über der Trommelstirn gedreht wird. Die Nullage der Integrierrolle ist nach der Trommelachse hin gerichtet. Diese mit verhältnismäßig wenig Massenbewegung des Zählwerks verbundene, angulare Schwingung der Integrierrolle hat die in dynamischer Hinsicht nicht ganz einwandfreie Ableitung der Integratorbewegung vom Schreibstift aus erträglich gemacht. Photographie im Museum.

Als letztes Glied des Gedankenganges veranschaulicht Abb. 32 einen von Jakob Amsler etwa 1885 in allen Teilen konstruierten Dampfmaschinen-Indikator mit Integriervorrichtung nach Polarplanimeter-Prinzip. Hinten ist der Indikatorzylinder mit innenliegender Meßfeder, rechts der Schnurtrommelantrieb vom Dampfmaschinenkreuzkopf her. Statt der klassischen Registrier-

trommel wird eine rechteckige Platte mit aufgespanntem Papierblatt durch Schraubenspindel von der Schnurtrommel in einer horizontalen Schlittenführung geradlinig hin- und hergeschoben. Der Schreibstift wird direkt, d. h. ohne Amplifikation, vom oberen Endpunkt der Kolbenstange durch einen vertikalen Schreibarm auf und ab bewegt.

Ebenfalls vom oberen Endpunkt der Kolbenstange erfolgt der Antrieb des Polarplanimeters mit hinter der Registrierplatte befindlichem Pol, während das Kolbenstangenende den Fahrstift darstellt. Die Integrierrolle drückt gegen die bewegte Registrierplatte. Erwähnenswert ist die Merkwürdigkeit, daß hier die Integrierrolle nicht am eigentlichen Fahrarm, sondern am Polarm angebracht ist, was nur dem Umstand, daß Fahrarm und Polarm gleich lang sind und der ideelle Fahrstift auf einer festen, durch den Pol hindurchgehenden Geraden geführt wird, zu verdanken ist. Der Berührungspunkt der Integrierrolle mit der Registrierplatte fällt sogar genau mit dem Pol zusammen, so daß eine Bewegung des Dampfkolbens ohne gleichzeitige Hin- und Herschwingung der Registrierplatte keine Abwicklung der Integrierrolle zur Folge hat. Das Instrument verhält sich als Integrimeter, d. h. zeigt jederzeit ohne Rückkehr zum Ausgangspunkt den wahren Wert des Integrals an. Apparat im Museum.

II. DERIVATIONSAPPARATE

Für die mechanische Bildung des Differentialquotienten besteht ein technisches Bedürfnis, vor allem für die Derivation nach der Zeit, in der Form von Geschwindigkeitsmessern (Geschwindigkeit $= \frac{\mathrm{d\,(Weg)}}{\mathrm{d\,(Zeit)}}$) oder Durchflußmengenmessern (sekundliche Durchflußmenge $= \frac{\mathrm{d\,(totale\ Menge)}}{\mathrm{d\,(Zeit)}}$).

Differentialquotient $D = \frac{\mathrm{d}(\quad)}{\mathrm{d}x}$ und Integral $J = \int y \cdot \mathrm{d}x$ stehen in einem Umkehrungsverhältnis: es ist nämlich $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x} = y$. Damit ist die Möglichkeit gegeben, bei umgekehrter Anwendung eines Integrators den Differentialquotienten einer Funktion mechanisch zu ermitteln.

Das Arbeitsschema ist folgendes:

Beim Integrator geht man einerseits mit dem Differential dx andererseits mit der Funktion y in das Instrument hinein, kombiniert diese auf multiplikativem Wege und erhält als Ausgang an der Integrierrolle das Integral als Summe von Differentialen dJ.

Beim Derivator, umgekehrt, wird das Instrument auf einer Seite nach wie vor nach dx angetrieben; man geht an der (bisherigen Integrier-) Rolle mit einem dJ hinein und erhält aus der sich zwangsläufig daraus ergebenden Stellung des Funktionsmechanismus den gesuchten Differentialquotienten y; denn diese Stellung muß eine solche sein, daß das Instrument, als Integrator rückwärts wirkend, jederzeit dem aufgedrückten dJ nachkommt, und das ist nur dann der Fall, wenn $y = \frac{dJ}{dx}$ *ist.*

Dafür eignen sich allerdings nur die Rotationsflächen-Integratoren.

Schon vor oder während der Zeit Jakob Amsler's haben Geschwindigkeitsmesser als Umkehrung des einfachen Wetli-Gonella'schen Scheibenintegrators bestanden [30]). Bei diesen wird die große Drehscheibe zeitlich konstant angetrieben. Die (bisherige Integrier-) Rolle erhält von einer Welle einen Antrieb proportional der zu differenzierenden Bewegung (Weg). Sie sitzt aber nicht fest auf ihrer Welle, sondern in der Art einer Mutter auf einem auf der Welle geschnittenen Schraubengewinde. Sie nimmt infolgedessen selbsttätig einen solchen radialen Abstand von Scheibenmitte ein, bei welchem die Rollenwälzung auf der Drehscheibe pro Zeitelement d*t* gleich ist dem ihr durch die Antriebswelle erteilten Peripherialweg; wäre dies nicht der Fall, so würde sich die fremd angetriebene Rolle als Schraubenmutter auf ihrem Gewinde herein- oder herausschrauben, bis Gleichgewicht herrscht. [31]) [32])

Dieser Mechanismus scheint Jakob und Alfred Amsler beschäftigt zu haben, denn es liegt ein (vielleicht in Zusammenarbeit beider entstandener) nie ausgeführter Entwurf Alfred Amsler's aus dem Jahre 1901 von einem Kegelderivator vor

---

[30]) Die älteste dem Verfasser bekannte derartige Mitteilung, die wohl nicht die erste sein dürfte, befindet sich in „Stahl und Eisen", 4. Jahrgang, No. 10, Oktober 1884, S. 614—615: Suvreker, „Ueber eine neue Methode zur direkten Messung von Geschwindigkeiten".

[31]) Genaueres siehe Galle, Mathematische Instrumente, Seiten 59—61.

[32]) Der differenzierende Scheiben-Geschwindigkeitsmesser wird bis in die Gegenwart in zeitgemäßer Ausführung hin und wieder verwendet. Siehe z. B. eine Anwendung in Verbindung mit einer großen Gasuhr zur Registrierung der sekundlichen Gasentnahme in einem Gaswerk: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 6. Jan. 1940, S. 2—10: W. Wunsch, „Fortschritt in der Technik der Gasfernversorgung", Abb. 10, S. 10.

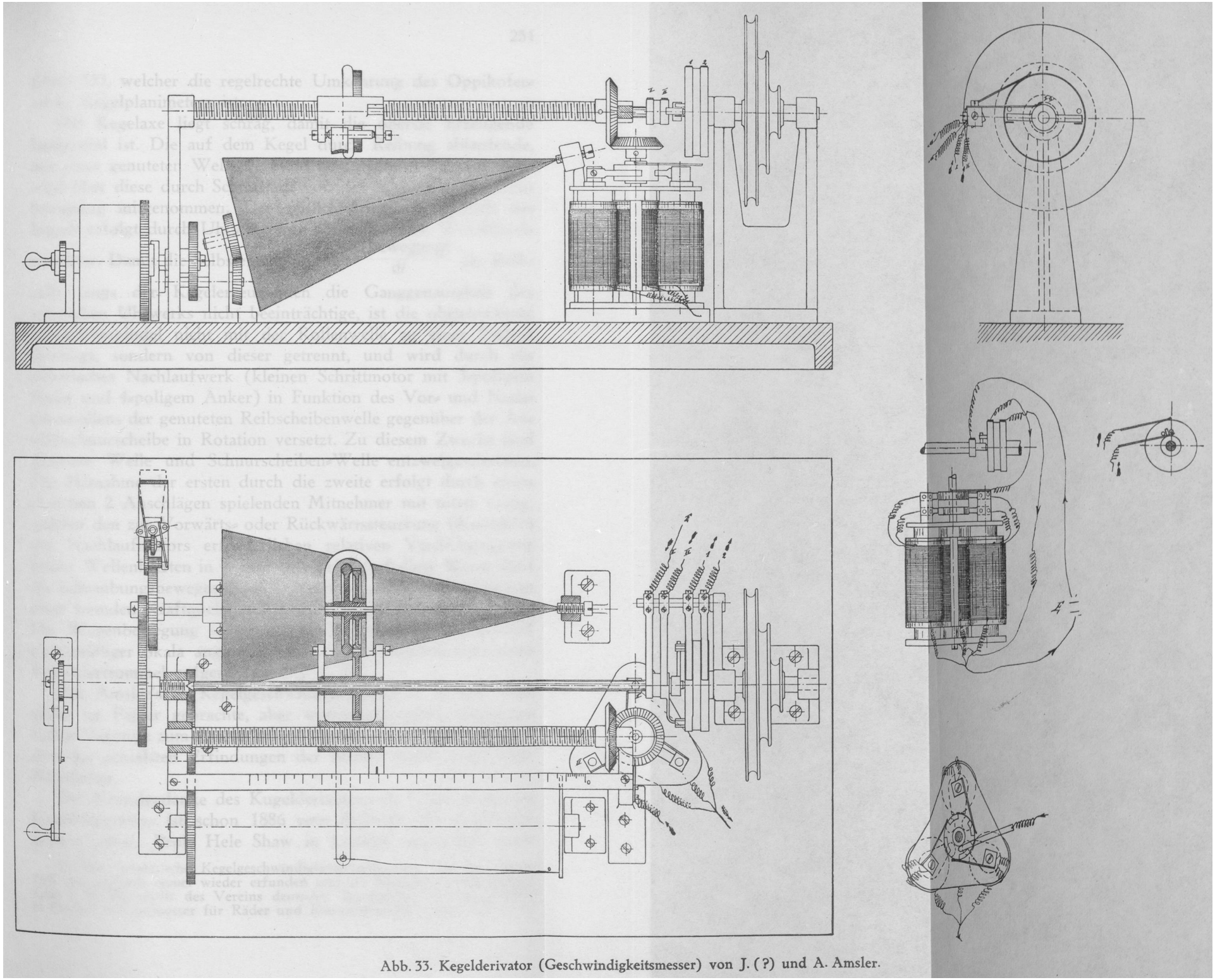


Abb. 33. Kegelderivator (Geschwindigkeitsmesser) von J. (?) und A. Amsler.

(Abb. 33), welcher die regelrechte Umkehrung des Oppikofer-schen Kegelplanimeters ist.

Die Kegelaxe liegt schräg, damit die oberste Erzeugende horizontal ist. Die auf dem Kegel durch Reibung ablaufende, mit einer genuteten Welle verbundene Integral-Differentialrolle wird über diese durch Schnurlauf von der zu messenden Drehbewegung mitgenommen. Der zeitlich konstante Antrieb des Kegels erfolgt durch Uhrwerk mit Foucault'schem Windflügelregulator. Damit die Selbsteinstellung $= \frac{d\,(\text{Bewegung})}{dt}$ der Reibrolle längs der Kegelerzeugenden die Ganggenauigkeit des schwachen Uhrwerks nicht beeinträchtige, ist die obenerwähnte Schraubenspindel nicht mit der Rollenwelle zu einer Einheit vereinigt, sondern von dieser getrennt, und wird durch ein elektrisches Nachlaufwerk (kleinen Schrittmotor mit 3-poligem Stator und 4-poligem Anker) in Funktion des Vor- und Nacheilenwollens der genuteten Reibscheibenwelle gegenüber der Antriebschnurscheibe in Rotation versetzt. Zu diesem Zwecke sind genutete Welle und Schnurscheiben-Welle entzweigeschnitten. Die Mitnahme der ersten durch die zweite erfolgt durch einen zwischen 2 Anschlägen spielenden Mitnehmer mit totem Gang, welcher den zur Vorwärts- oder Rückwärtssteuerung (Kontakt!) des Nachlaufmotors erforderlichen relativen Verdrehungsweg beider Wellenhälften in + und — zuläßt. Auf diese Weise wird die Schraubungsbewegung des Differentialquotientenwagens von einer fremden Kraftquelle statt vom Zeitantrieb hervorgebracht. Die Wagenbewegung = gemessene Geschwindigkeit wird auf gleichmäßiger Skala angezeigt, bezw. auf uhrwerkangetriebener Registriertrommel aufgezeichnet.[33])

Der Amsler'sche Kegelgeschwindigkeitsmesser ist die zwar später zu Papier gebrachte, aber womöglich schon vorher erdachte Vorstufe zum Amsler'schen Kugelgeschwindigkeitsmesser, eine der genialsten Erfindungen der beiden Amsler und ihrer Mitarbeiter.

Der Grundgedanke des Kugelderivators als Umkehrung des Kugelintegrators ist schon 1886 vom Erfinder des Kugelintegrators selbst, Prof. Hele Shaw in London, angegeben wor-

[33]) Der Amsler'sche Kegelgeschwindigkeitsmesser wird seit dem Jahre 1901 von anderen immer wieder erfunden und als Neuigkeit veröffentlicht. Siehe z. B. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 14. August 1937, H. Freese, „Schlupfmesser für Räder und Kettenfahrzeuge", spez. Abb. 2—6.

den [34]), aber scheinbar nicht von diesem weiterverwertet; seine konstruktive Gestaltung zum brauchbaren Geschwindigkeits-messer war das Werk der beiden Amsler.

Kehren wir zur Abbildung des Kugelintegrators in Amsler-scher Ausführung, Abb. 5 auf Seite 220, zurück, so steht vorn im Bild die zeitlich angetriebene dt-Rolle, in der Mitte die Kugel mit durch tg α -Mechanismus funktionseingestelltem Aequatorial-rahmen, hinten die Integrier ($\int dJ$)-Rolle. Die sinngemäße Um-kehrung des Apparates im Lichte der auf Seite 250 angestellten Betrachtung ergibt sofort:

Bei konstantem Zeitantrieb der dt-Rolle (vorn) und Ein-führung der zu differenzierenden Bewegung s in die (ehe-malige Integrier-) Rolle (hinten), nimmt die Kugel eine solche

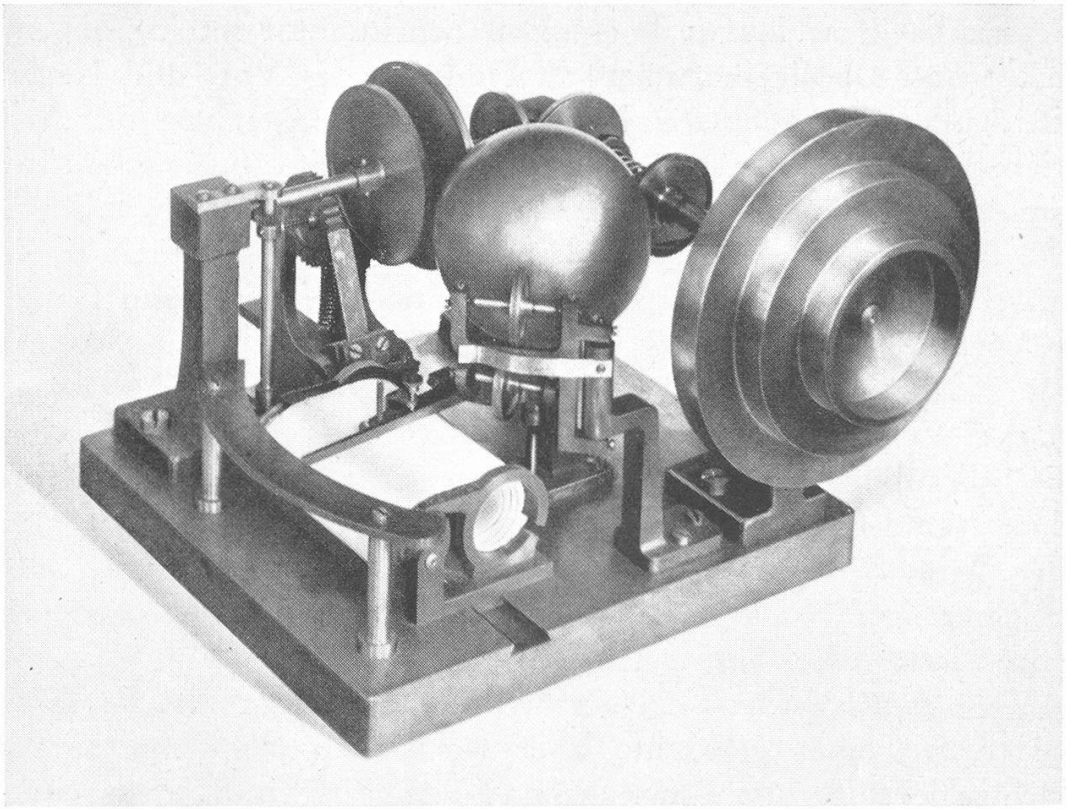


Abb. 34. Kugelderivator (Geschwindigkeitsmesser) von J. Amsler, Erstlingsausführung.

Bewegung an, daß ihre Momentandrehaxe die der funktionellen Bedingung tg $\alpha = \frac{ds}{dt}$ entsprechende augenblickliche Neigung α erhält.

[34]) Galle, Mathematische Instrumente, Seiten 54 und 62.

Aufgabe der Amsler'schen Konstruktion war es, diesen Winkel abzutasten und passend weiterzuverwerten. In der Erstlingsausführung Jakob Amsler's (1892), Abb. 34, welche sich in Natura im Museum Allerheiligen befindet, ist, noch in engster Anlehnung an den Integrator der Abb. 5, hinten der konstante Zeit (dt)-Antrieb, rechts der Weg (ds)-Antrieb durch abgestufte Riemenscheibe ersichtlich. Die beiden entsprechenden Rollen mit horizontaler Achse sind deutlich hinter der Kugel erkennbar. Die Kugel wird am Platz gehalten durch eine Andruckrolle (vorn, auf der Höhe des horizontalen Kugel-Größtkreises), welche zudem durch Federdruck die Kugel stark gegen die dt- und ds-Rolle anpreßt und für kräftige Mitnahme sorgt. Die Abtastung des maßgebenden Winkels α erfolgt vermittelst 2 unter 45° diametral entgegengesetzten, kleineren Tasterrollen, welche in einem um den vertikalen Kugeldurchmesser drehbaren Rahmen gelagert sind. Die Tasterrollen suchen sich stets in diejenige Aequatorialebene zu stellen, welche zur momentanen Drehachse der Kugel senkrecht steht. (In Abb. 34 ist eine der Tasterrollen in halber Höhe unterhalb der Kugelmitte sichtbar.)

Beim Erstlingsapparat begnügte sich J. Amsler damit, den Azimut des Tasterrahmens, also den Winkel α selbst, durch Zeiger und Schreibstift direkt auf Zifferblatt und zeitlich bewegter Registriertrommel (im Bilde links vorn) anzuzeigen, bezw. aufzuzeichnen, was für das Zifferblatt eine nach $\operatorname{tg} \alpha$ verlaufende Bezifferung mit ungleich weit abstehenden Teilstrichen, für das Diagramm einen ungleichmäßigen Geschwindigkeits-Maßstab zur Folge hatte. Konstruktiv interessant ist, nebenbei, die Erzeugung des zeitlich konstanten dt-Antriebs, welcher von dem variablen, dafür aber genug kräftigen s-Antrieb durch Friktionsgetriebe mit veränderlichem Schlupf und selbsteinstellender, friktionsregulierender Nacheilschraubenmutter erfolgte [35]). Absolutes Vergleichsorgan (Sollgeschwindigkeit) für den Friktionsregulator war die bekannte Hipp'sche Vibrationsfeder mit Einfallrad.

Weiter kam Jakob Amsler nicht. Immerhin wurde sein Kugelgeschwindigkeitsmesser in dieser Form auf einer Anzahl Amsler-

[35]) Beim Nacheilen zieht die Mutter die Friktion mehr an, beim Voreilen lockert sie sie.

schen Eisenbahndynamometerwagen während der Jahre 1901 bis 1910 verwendet.

Seinem Sohne Alfred und einem von dessen Mitarbeitern [36]) war es, etwa 1912, beschieden, den noch nicht ganz vollständigen J. Amsler'schen Kugelgeschwindigkeitsmesser durch Verwirklichung der genau gleichmäßigen Geschwindigkeitsskala zur Vollkommenheit zu bringen. Diese kamen auf den Gedanken, den abgetasteten Winkel α in den mit diesem nach tg α verlaufenden Differentialquotienten vermittelst Zahnräder mit lokal veränderlichem Eingriffsradius umzuwandeln. So entstand der Amsler'sche Geschwindigkeitsmesser in seiner heutigen Form, mit Umsetzung von α in tg α vermittelst geraden Zahnzylinders und mit diesem kämmender krummer Zahnstange von Polargleichung $r = \frac{\text{Konstante}}{\cos^2 \alpha}$, α von der aufsteigenden Vertikalen aus gemessen. Die krumme Zahnstange besitzt in $\alpha = 0$ eine horizontale Tangente, in $\alpha = 35^0 15'$ einen Wendepunkt und in $\alpha = 90^0$ eine ∞-ferne, horizontale Tangente, hat also eine flache S-Form. [37])

In seiner modernsten Ausführung sieht der Kugelderivator, wie auf einer großen Anzahl von neuzeitlichen Amsler-Dynamometerwagen als Geschwindigkeits- und PS-Messer in Gebrauch, nach Abb. 35 aus. Zu beachten ist der Uebergang von der liegenden Anordnung der Abb. 34 zur stehenden Anordnung (dt- und ds-Rolle je unter 45^0 zum Horizont mit Axen in einer vertikalen Ebene durch Kugelmittelpunkt), sowie der elegante Zeitantrieb durch Elektromotor und regulierte Friktionskupplung mit schlupfsteuerndem Zentrifugalpendel. Betreffend die

---

[36]) M. Blanz, gegenwärtiger Betriebsleiter der Firma Amsler.

[37]) Der Krümmungsradius (in Polarkoordinaten) $R = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\alpha^2}}$

springt plötzlich von $+\infty$ zu $-\infty$, d. h. es findet eine Inflexion statt für $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\alpha^2} = 0$, d. h. mit:

$$r = C \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \qquad \frac{dr}{d\alpha} = C \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}; \qquad \frac{d^2 r}{d\alpha^2} = C \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha \, (1 + 2 \sin^2 \alpha)}{\cos^6 \alpha}$$

für (ausgerechnet)

$$\frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{\cos^6 \alpha} = 0; \qquad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774; \qquad \alpha = 35^0 15'$$

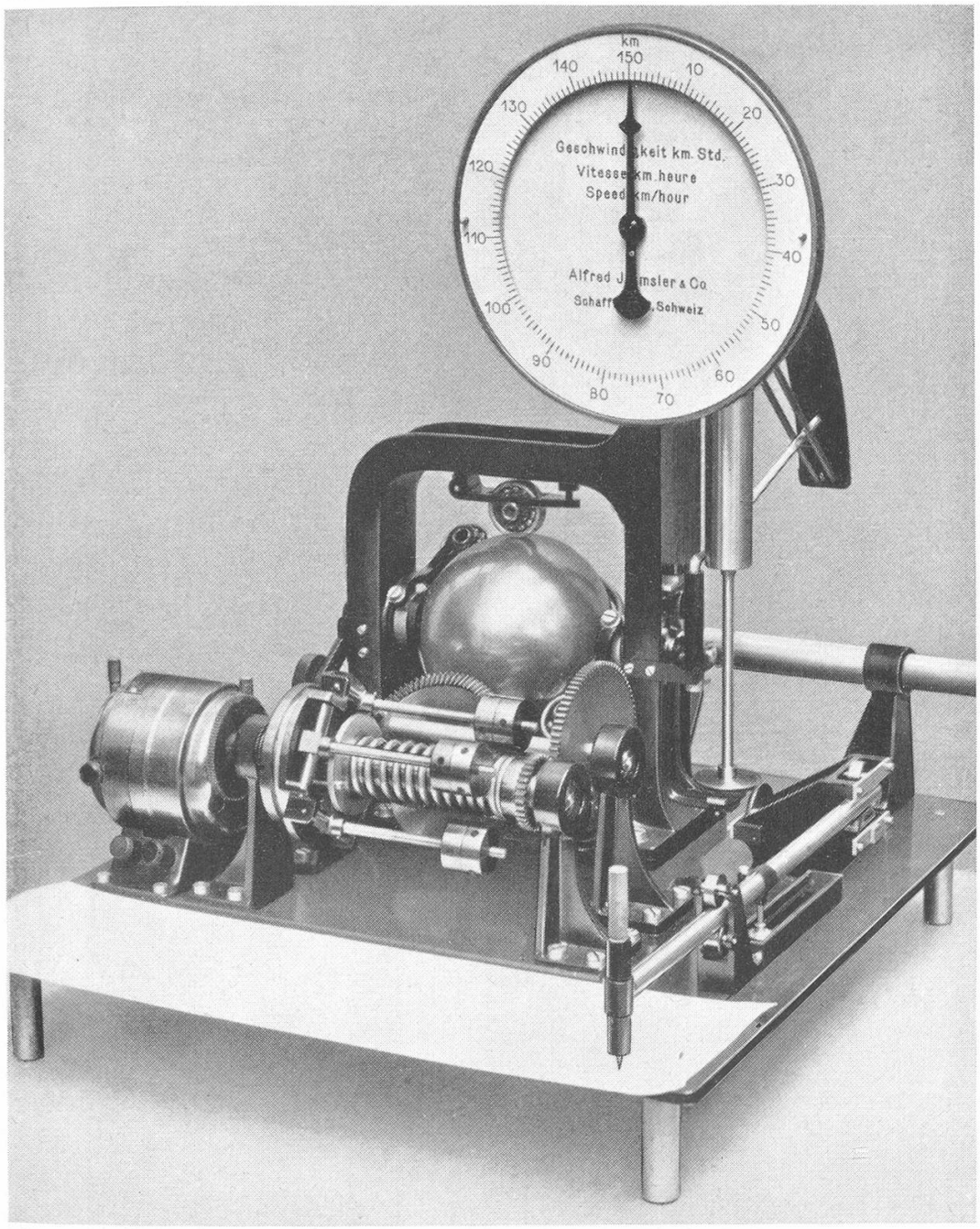


Abb. 35. Kugelderivator (Geschwindigkeitsmesser) von J. Amsler, durch A. Amsler und Mitarbeiter vervollkommnete, endgültige Ausführung.

eingehendere Theorie dieses Geschwindigkeitsmessers sei auf die bekannten Dynamometerwagenbeschreibungen verwiesen [38]).

Abb. 36 zeigt den Apparatentisch eines modernen Amsler-schen Eisenbahndynamometerwagens mit 2 Kugelintegratoren (für Arbeit am Zughaken, bezw. Arbeit der Beschleunigungs- und Gefällskraft) und 2 Kugelderivatoren (für die Geschwin-

[38]) Schweizerische Bauzeitung 1914 und Bulletin Technique de la Suisse Romande 1924, siehe Fußnotiz [13]), Seite 221.

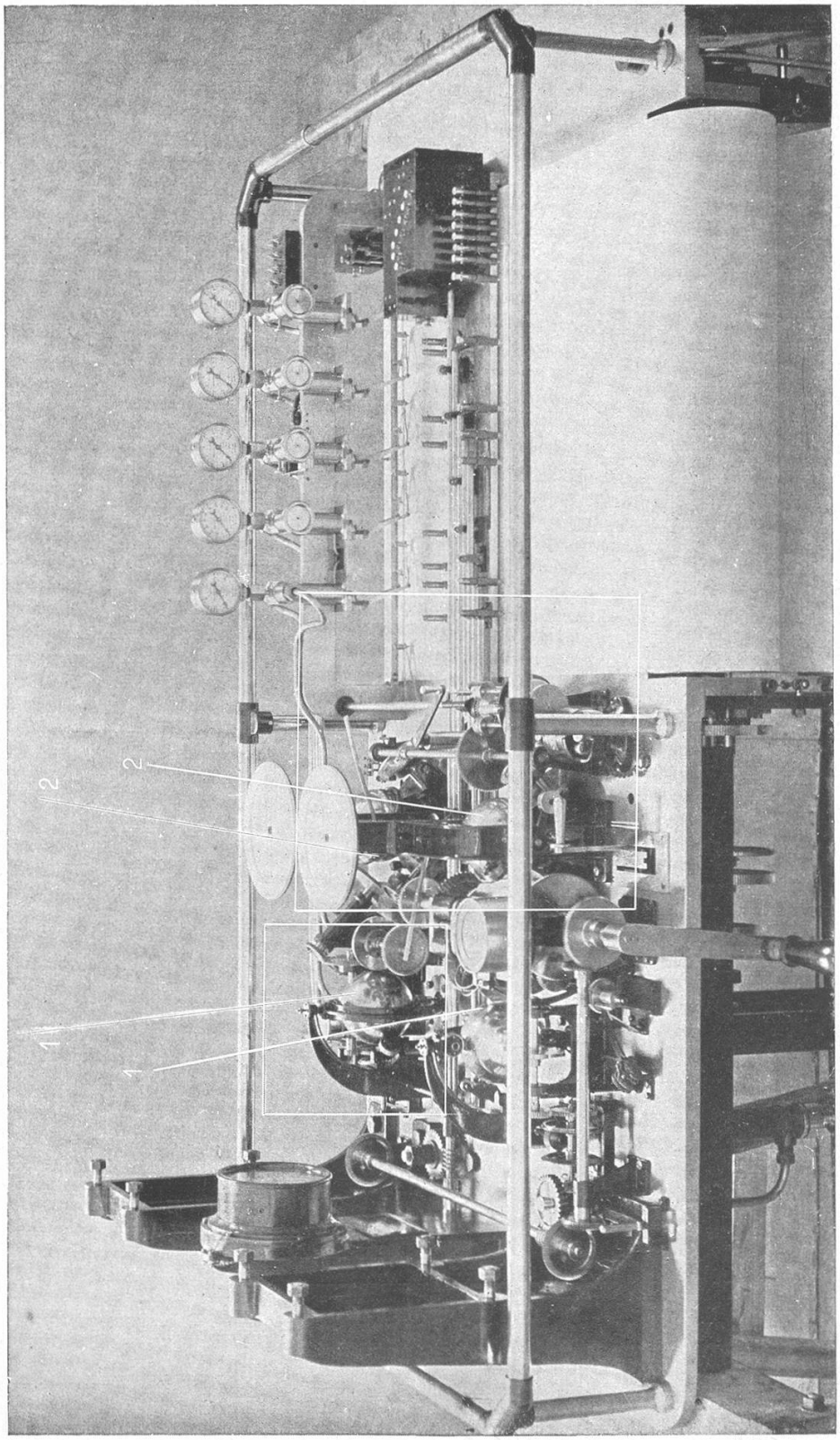


Abb. 36. Apparatentisch eines Amsler'schen Dynamometerwagens mit 2 Kugelintegratoren (1) und 2 Kugelderivatoren (2).

digkeit $= \frac{d\,(\text{Weg})}{d\,(\text{Zeit})}$ und Leistung in PS am Zughaken $\frac{d\,(\text{Arbeit})}{d\,(\text{Zeit})}$) mit Registrierung dieser 4 Funktionen auf ablaufendem Diagrammstreifen.

III. KURVIMETER

Kurvimeter in der handelsüblichen Form sind längst bekannte, sehr primitive Instrumente. Es besteht aber eine interessante Spezialkonstruktion von Alfred Amsler zur genauen Längenmessung von sehr kleinen Kurven, wie Schriftzügen, anatomischen Schnitten oder Hirnwindungen (u. a. von kleinen Tieren, wie Mäusen etc. in naturgetreuen Abbildungen, oder von größeren Säugetieren auf ungenügend großen photographischen Aufnahmen).

Das Instrument, Abb. 37, ist eine Kombination der Kurvimeterrolle mit einem Vergrößerungspantographen. Die kleinen Schriftzüge etc. werden unter Lupe *F* beobachtet, während die in *R* befindliche Kurvimeterrolle die pantographisch vergrößerte Aehnlichkeitsfigur zum Urbild umfährt. Dabei war die Aufgabe zu lösen, daß die Kurvimeterrolle jederzeit den für das Auge nicht sichtbaren, vergrößerten Kurvenzug in tangentialer Richtung beschreibt. Die Aufgabe wurde bewältigt vermittelst einer zwischen Lupenfassung *F* und Tragscheibe *Q* der Kurvimeterrolle den Pan-

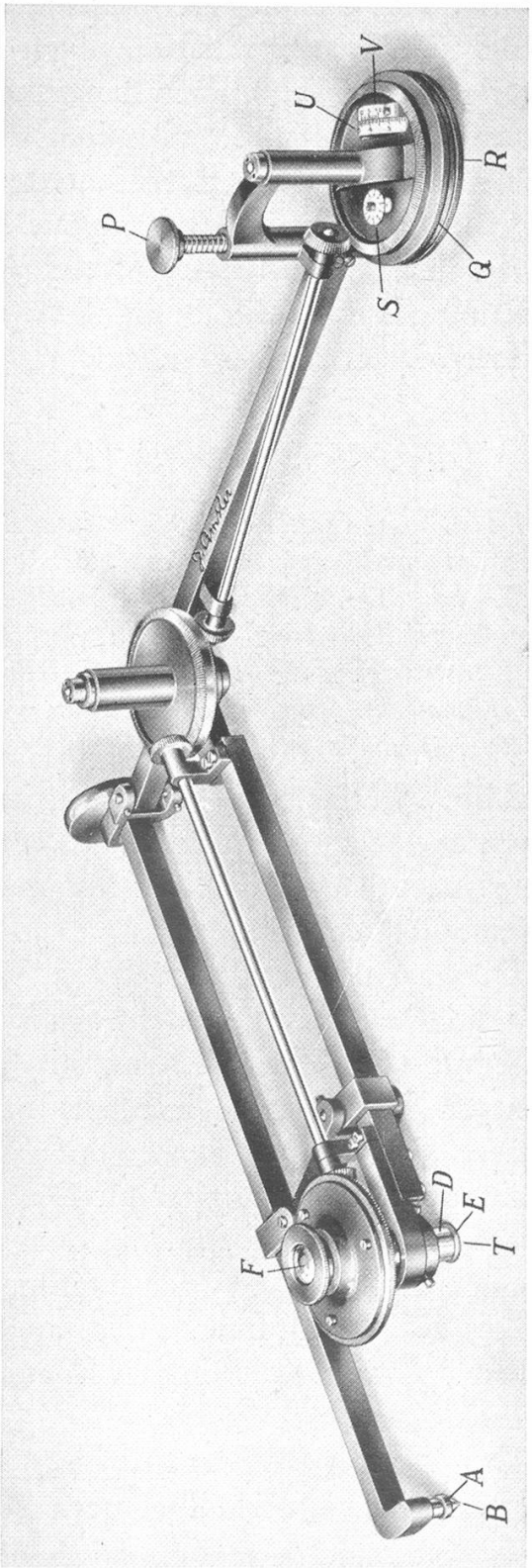


Abb. 37. Kurvimeter.

tographengliedern entlang angeordneten Gleichlaufvorrichtung, welche die von Hand eingestellte tangentiale Berührung des Lupenfadenkreuzes mit dem Originalkurvenzug, unbeeinflußt von der Deformation des Pantographen, parallel auf den Azimut der Kurvimeterrolle überträgt.

Bei den ersten Ausführungen von Alfred Amsler war die Rotationsübertragung von Fadenkreuz auf Schneide der Kurvimeterrolle vermittelst Stahlsaiten durchgeführt, etwa ähnlich der Parallelführung der Reißschiene der modernen Zeichenmaschinen. Bei den neueren Ausführungen vom Jahre 1924 an wurden durch einen Mitarbeiter Alfred Amsler's[39]) die Saitenläufe in eleganter Weise durch Wellen und konische Zahnräder in Differentialanordnung ersetzt.

IV. HYDRAULISCHE APPARATE

Das Wesen der Flüssigkeitsmessung besteht darin, daß in einem Flüssigkeitsstrom durch eine künstliche Störung des Verlaufs der Stromfäden eine Druck- oder Gefällsabnahme herbeigeführt wird, welche mit der sekundlichen Durchflußmenge in einem gesetzmäßigen Verhältnis steht. Aufgabe der Konstrukteure ist es, diese Gefällsabnahme durch einen Funktionsmechanismus in Durchflußmenge zu verwandeln und erforderlichenfalls letztere zeitlich zu integrieren.

Abb. 38, das Meß- und Registrierwerk eines Rohrleitungs-Wassermessers von Alfred Amsler veranschaulichend, stellt eines der glänzendsten Beispiele der materialisierten Mathematik auf diesem Gebiete dar.

Dieser für die Philadelphia Water Works, U. S. A., 1911 konstruierte Apparat besteht aus 2 Töpfen *A* und *B*, welche eine Roberval'sche Waage bilden, mit Gewichtspendel als Richtkrafterzeuger. Die Töpfe sind teils mit Quecksilber und teils mit Wasser gefüllt und durch einen biegsamen Gummischlauch *C* miteinander kommunizierend. Die Töpfe *A* und *B* stehen durch andere Gummischläuche mit dem Anfangs- bezw. dem engsten Querschnitt eines in der Leitung eingebauten Venturi-Rohrstückes in Verbindung. *A* ist an dem niederen (engster Querschnitt), *B* an dem höheren Wasserdruck (Anfangsquerschnitt) angeschlossen.

Das Wasser mit dem höheren Druck dringt in den Topf *B* und treibt das Quecksilber nach *A*, bis die Niveaudifferenz des

[39]) M. Blanz.

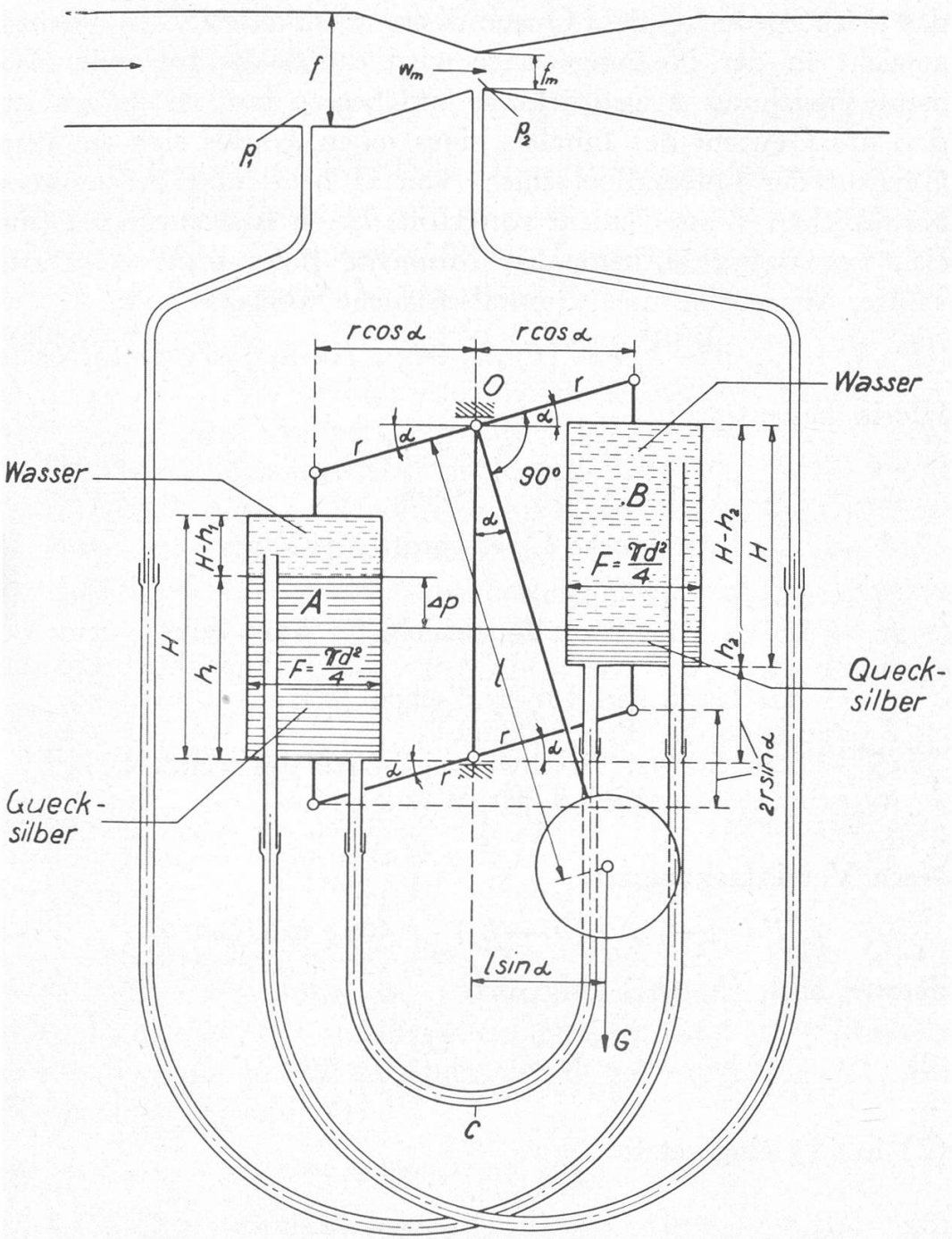


Abb. 38. Rohrleitungswassermesser von A. Amsler, Schema.

Quecksilbers in den beiden Töpfen gleich dem Druckgefälle Δp am Venturirohr ist, und es gilt, Ab. 38:

(1) $\Delta p = h_1 - h_2 - 2r\sin\alpha.$ Δp in cm Hg-Säule.

Infolge des Ueberdruckes rechts steht das Quecksilber in A höher als in B, der Topf wird daher schwerer und die Waage neigt sich so weit nach links, bis das ausgelenkte Pendelgewicht G

das Uebergewicht des Quecksilbers ausgleicht. Das Gleichgewicht an der Neigungswaage wird durch die folgende Momentengleichung ausgedrückt, in welcher zu berücksichtigen ist, daß das Gewicht des Inhaltes eines jeden Topfes sich aus dem Gewicht der Quecksilberschicht von Höhe h und der darüber befindlichen Wasserschicht von Höhe $H-h$ zusammensetzt (die sich gegenseitig aufhebenden Momente links und rechts der Töpfe, Waagarme und Gummischläuche weggelassen):

$$\{[F\gamma_q h_1 + F\gamma_w \cdot (H-h_1)] - [F\gamma_q h_2 + F\gamma_w (H-h_2)]\} \cdot r\cos\alpha = Gl\sin\alpha$$

Hierin bedeuten:

γ_q	=	spez. Gewicht des Quecksilbers	kg/cm³
γ_w	=	spez. Gewicht des Wassers	kg/cm³
F	=	$\frac{\pi d^2}{4}$, der innere Querschnitt der Töpfe	cm²
H	=	ganze Topfhöhe	cm
h_1	=	Höhe der Quecksilberschicht im Topf links	cm
h_2	=	„ „ „ „ „ rechts	cm
r	=	Armlänge der Roberval'schen Waage	cm
l	=	Länge der Pendelstange	cm
G	=	Gewicht der Beschwerungsmasse des Pendels	kg
α	=	Ausschlagswinkel der Waage.	

Nach Vereinfachungen:

$$F(\gamma_q - \gamma_w) \cdot (h_1 - h_2) \cdot r \cos\alpha = Gl\sin\alpha,$$

daraus, nach $(h_1 - h_2)$ aufgelöst:

$$h_1 - h_2 = \frac{Gl}{(\gamma_q - \gamma_w)Fr} \operatorname{tg}\alpha \tag{2}$$

(2) in (1) eingesetzt:

$$\Delta p = \frac{Gl}{(\gamma_q - \gamma_w)Fr} \operatorname{tg}\alpha - 2r\sin\alpha \tag{3}$$

Bei der praktischen Ausführung des Wassermessers wurden den Instrumentendimensionen absichtlich nachstehende spezielle Zahlenwerte gegeben:

$$\gamma_q = 13{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/cm}^3 \qquad r = 10{,}0\ \text{cm}$$
$$\gamma_w = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/cm}^3 \qquad l = 30{,}0\ \text{cm}$$
$$F = \frac{\pi\,(9{,}5\ \text{cm})^2}{4} = 70{,}9\ \text{cm}^2 \qquad G = 5{,}9\ \text{kg}.$$

Mit diesen Werten nahm Gleichung (3), ausgerechnet, folgende zahlenmäßige Gestalt an:

$$(3) \qquad \Delta p = 20 \operatorname{tg}\alpha - 20 \sin\alpha = 20 (\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha) \qquad \text{cm Hg-Säule.}$$

In der besonderen Wahl der Dimensionen, welche die Ueberführung der Koeffizienten von tg α und sin α in Gleichung (3) in zwei gleiche Zahlenelemente zur Folge hatte, liegt zunächst einmal ein gelungener Kunstgriff Alfred Amsler's vor, denn wegen $\lim\limits_{\alpha=0} |\operatorname{tg}\alpha| = \lim\limits_{\alpha=0} |\sin\alpha| = \alpha$ bleibt die Differenz tg α — sin α für verhältnismäßig große Winkel, bis ca. 15°, noch sehr klein. Um geringen Druckdifferenzen Δp im Venturirohr das Gleichgewicht zu halten, sind also gemäß (3) schon recht erhebliche Neigungswinkel der Waage erforderlich. M. a. W. die Differentialdruckwaage ist äußerst empfindlich. Dies ist wieder ein Ausführungsbeispiel des bei Alfred Amsler beliebten, bei seinen Materialprüfmaschinen und Meßdosen wiederholt angewendeten Prinzips der hydraulischen Amplifikation sehr kleiner Größen. [40])

Die sekundliche Wasserdurchflußmenge im Venturirohr ist:

$$Q^{m^3/sec} = f_m \cdot w_m = \frac{f_m}{\sqrt{1-\left(\frac{f_m}{f}\right)^2}} \cdot \sqrt{2g\frac{(p_1-p_2)}{\gamma}} = \text{Konstante} \cdot \sqrt{\Delta p}$$

(f_m = engster Querschnitt des Venturirohrs, f = voller Querschnitt der Rohrleitung, w_m = Wassergeschwindigkeit im engsten Querschnitt, g = Erdbeschleunigung, p_1 und p_2 = Wasserdrücke vor und im engsten Querschnitt, γ = spez. Gewicht des Wassers), d. h. mit (3):

$$(4) \qquad Q^{m^3/sec} = \text{Konstante} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$$

Es handelt sich jetzt darum, aus dem allein greifbaren Neigungswinkel α den Q-proportionalen Ausdruck $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$ mechanisch zu verwirklichen, zwecks Anzeige und Registrierung der Durchflußmenge in einer genau linearen Skala mit gleichmäßiger Teilung. Dazu bediente sich A. Amsler wieder der schon beim Kugelgeschwindigkeitsmesser angewendeten Zahnräder mit lokal veränderlichem Eingriffsradius.

---

[40]) Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen, Jahresbericht 1941, A. Uehlinger und F. Dubois: „Alfred Amsler, sein Leben — sein Werk", S. XIX.

Mit der Drehachse O der Waage ist (Abb. 39) eine gekrümmte Zahnstange F starr verbunden, welche mit einer gezahnten, vertikalen Trommel E im Eingriff steht. Die Achse der Trommel und die Drehachse des Zahnsegmentes schneiden sich unter 90°. Die Entfernung des Zahnes des Segmentes, welcher gerade mit der Zahnung der Trommel E sich kämmt, von der Achse O, sei ϱ. Für eine unendlich kleine Neigungszunahme $d\alpha$ der Waage dreht sich die Oberfläche der Trommel E um den Betrag $\varrho\, d\alpha$, für den ganzen Winkel α also insgesamt um $\int_0^\alpha \varrho\, d\alpha$. Die Bedingung, daß der Drehwinkel der Trommel der sekundlichen Durchflußmenge Q proportional sei, verlangt also

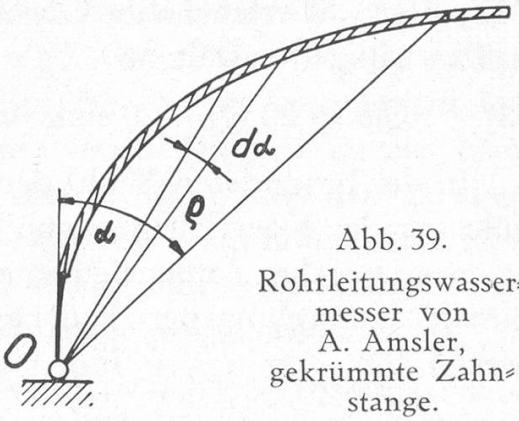


Abb. 39. Rohrleitungswassermesser von A. Amsler, gekrümmte Zahnstange.

$$\int_0^\alpha \varrho\, d\alpha = \text{Konstante } \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$$

Daraus durch Derivation:

(α von der aufsteigenden Vertikalen aus gemessen)

$$(5) \qquad \varrho = \text{Konstante} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}\right) = \text{Konstante} \frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \cos\alpha}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}}$$

Dies ist die polare Gleichung der krummen Zahnstange, welche die Messung der sekundlichen Durchflußmenge in linearem Maßstab ermöglicht. An ihrem oberen Ende trägt die Zahntrommel E ein Zahnrädchen, welches eine mit Schreibstift versehene gerade Zahnstange der horizontalen Registriertrommel entlang verschiebt. Die Registriertrommel wird durch Uhrwerk in Funktion der Zeit angetrieben.

An der Zahnstange ist ferner ein Index angebracht, welcher die Größe der Schiebung und damit der sekundlichen Wassermenge an einer Skala anzeigt.

Bei der Durchflußmenge $Q = 0$, $\alpha = 0$, nimmt der Radiusvektor ϱ der krummen Zahnstange, Gleichung (5), den

Wert $\frac{0}{0}$ = unbestimmt an. Die Unbestimmtheit wird behoben durch Anwendung des Satzes über unbestimmte Werte:

(6)
$$\lim_{\alpha=0} |\varrho| = \frac{\text{Konstante}}{2} \cdot \frac{\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \cos\alpha\right)}{\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}\right)} =$$

$$= \text{ausgerechnet}\,\frac{\text{Konstante}}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha} + \sin\alpha\right) \cdot 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \cos\alpha}$$

Für $\alpha = 0$ verschwinden Zähler und Nenner des obigen Quotienten beide wieder, wobei aber der Nenner mit α^2, der Zähler mit $\alpha \cdot \sqrt{\alpha^3} = \alpha^{21/2}$ nach 0 geht, also rascher als der Nenner. Der wahre Wert des Quotienten und somit des Radiusvektors für $\alpha = 0$ ist daher 0 und die Zahnstange geht (wenigstens theoretisch) durch den Drehpunkt der Waage hindurch. In Wirklichkeit muß wegen der hier sehr ungünstig werdenden Verzahnung ein kleines Stück der Zahnstange in der Nähe des Drehpunktes weggelassen werden. Das Instrument zeigt in der Nähe von 0 die Wassermenge nicht an.

Es interessiert noch die geometrische Form der Zahnstange. Dieselbe ist nicht ohne weiteres aus der komplizierten Polargleichung (5) ersichtlich. Am besten kommt man zum Ziel mittels Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen, nämlich:

$$\varrho = K^{te} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \cos\alpha}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}}$$

$$= \frac{K^{te}}{2} \cdot \frac{\left(1 + \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 + \frac{17}{45}\alpha^6 + \ldots\right) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^6}{720} + \ldots\right)}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 + \ldots\right) - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} \ldots\ldots\right)}}$$

(7)
$$= \frac{K^{te}}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{5}{8}\alpha^4 + \ldots\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{1}{8}\alpha^5 + \ldots}} = \frac{K^{te}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\alpha^{\frac{1}{2}} + \ldots\right)$$ [41])

[41]) Gleichung (7) ergibt sich übrigens auch aus der vorstehenden Interpretation der Gleichung (6).

Geht man mit:

$$x = \varrho \sin\alpha = \text{für } \alpha \text{ klein} \sim \varrho\,\alpha\,; \qquad y = \varrho \cos\alpha = \text{für } \alpha \text{ klein} \sim \varrho$$

zu rechtwinkligen Koordinaten über, so ist

$$y \cong \frac{K^{te}}{2} \cdot \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots\right)$$

oder:

$$y^3 \cong \left(\frac{K^{te}}{2} \cdot 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 x + \ldots \tag{8}$$

die angenäherte, cartesische Gleichung der krummen Zahnstange in der Nähe des Nullpunktes. Diese Gleichung stellt eine kubische Parabel mit horizontaler Axe dar.

In Gleichung (8) kommt ein zweiter glücklicher Vorzug zum Ausdruck, welchen A. Amsler bewußt oder unbewußt mit seiner Konstruktion erreicht hat. Die Benützung einer Neigungswaage mit tg α — sin α-Charakteristik als Differentialdruckmesser hat zur Folge, daß die krumme Zahnstange als kubische Parabel sich zunächst der vertikalen Ausgangstangente eng anschmiegt und dann bei verhältnismäßig kleinen Winkeln α ziemlich rasch in die mehr horizontale Richtung umbiegt, was für einen günstigen Eingriff der in ihrer Verlängerung alle durch den Nullpunkt 0 gerichteten Sektorzähne mit der gezahnten Trommel vorteilhaft ist.

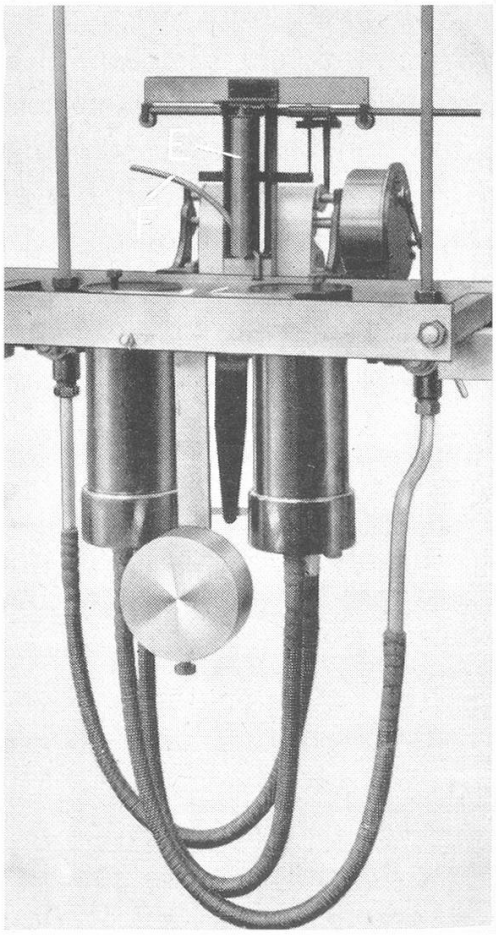


Abb. 40. Rohrleitungswassermesser von A. Amsler, Ansicht von hinten.

Hätte A. Amsler als Differentialdruckmesser irgend ein Gerät mit reiner sin α- oder tg α-Charakteristik (ähnlich wie die im Museum Allerheiligen in Natura oder im Lichtbild ausgestellten Pendelkraftmesser zu seinen hydraulischen Materialprüfmaschinen) gewählt, so hätte

die Quadratwurzelausziehung mittels krummer Zahnstange und Zahntrommel gemäß Verzahnungsgesetz (Gleichung 5)

$$\varrho = K^{te} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right) \text{ bezw. } \varrho = K^{te} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

zu der Zahnstangenform

$$\varrho = C \cdot \frac{\cos\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}} \text{ bezw. } C \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$$

geführt. Dies sind hyperbelähnliche Kurven mit einem unendlichen Ast in $\alpha = 0$, also für die konstruktive Ausführung durchaus unbrauchbar. Der mathematische Kunstgriff der Umwandlung der Druckdifferenz in eine α-Funktion (tg — sin), deren Verzahnungsgesetz in $\alpha = 0$ eine Singularität der Gattung Null statt der Gattung ∞ wie die einfache sin- oder tg-Funktion besitzt, war neben den oben erwähnten Vorteilen dieser Anordnung an sich schon eine ganz bemerkenswerte gedankliche Leistung.

Abb. 40 ist ein Lichtbild des Apparates. Eine Integriervorrichtung nach der Zeit, die ohne weiteres möglich gewesen wäre, wurde nicht angebracht. Photographie im Museum.

*

Eine zweite, mathematisch einfachere Lösung von A. Amsler und späteren Mitarbeitern (etwa 1925—1930) des ähnlichen Problems für offene Wasserläufe hat in der Hydraulik eine weit größere Verbreitung gefunden. Es ist dies der sogenannte integrierende Pegel. Dieser dient dazu, die sekundliche Durchflußmenge im Ablauf- oder Zulaufkanal einer Wasserturbinenanlage fortlaufend zu messen und nach der Zeit zu integrieren. Voraussetzung für die Anwendbarkeit des integrierenden Pegels ist allerdings eine eindeutige Beziehung zwischen der Durchflußmenge und der Wasserhöhe vor einem im Turbinenkanal eingebauten Meßorgan. Als solches kommt in Betracht:

In Ablaufkanälen: offener Ueberfall ohne oder mit Seitenkontraktion, Venturi-ähnliche Einschnürung (sogen. Venturikanal).

In Zulaufkanälen: Vielfach der Kanal mit rechteckigem oder halbkreisrundem Querschnitt und Sohlengefälle selber, vermöge des natürlichen Gefällsverlustes durch Wandreibung,

und zwar nur bei freier Nachströmung hinter der Meßstelle (also ohne Rückstau oder Betrieb mit sogen. überflutetem Ueberfall).

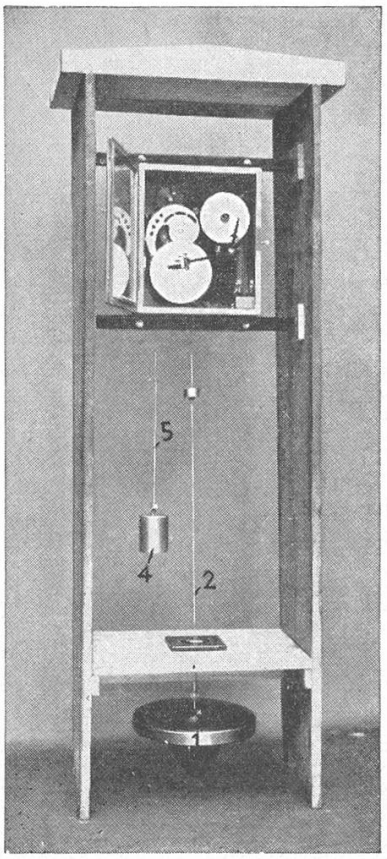


Abb. 41. Integrierender Pegel.

Die von der sekundlichen Durchflußmenge Q eindeutig abhängige Wassertiefe h im Kanal vor der Meßstelle wird durch einen Schwimmer erfaßt und mittels einer spiraligen Herzscheibe, die vom Schwimmerseil über Zahnräder in Rotation versetzt wird, in einen der Durchflußmenge proportionalen sin α umgeformt. Der Winkel α wird von einem sich gegen den Rand der Spirale lehnenden Fühlerhebel mit Kontaktrolle abgegriffen. Eine von diesem durch Winkelarm im Azimut um α ausgelenkte Planimeterrolle drückt gegen eine dahinter befindliche, durch Uhrwerk angetriebene, vertikale Integrierscheibe; bei der Wassermenge $= 0$, $\alpha = 0$, ist die Schneide der Integrierrolle nach dem Mittelpunkt der Zeitscheibe gerichtet. Die Integration $\int Q \, dt$ findet also gemäß dem sinusabhängigen Scheibenintegrator statt, ähnlich wie beim Jakob Amsler'schen Scheibenpolar- bezw. Scheibenlinearplanimeter. Die sekundliche Wassermenge kann gleichzeitig auf einer rotierenden Papierscheibe als Kreisdiagramm in Funktion der Zeit registriert werden, mit (wegen der sin α-Abhängigkeit) nicht genau proportionalem Q-Maßstab.

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen ist die Durchflußmenge dem Produkt aus der Potenz $\frac{3}{2}$ der Oberwasserhöhe h und einem hydraulischen Koeffizient μ, selber

Funktion von h, proportional. Z. B. beim einfachen rechteckigen Ueberfall:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \cdot h^{\frac{3}{2}} \qquad \text{m}^3/\text{sec},$$

worin h = Ueberfallhöhe m, b = Ueberfallbreite m, g = Erdbeschleunigung m/sec², μ = hydraul. Koeffizient nach Freese, Hegly, S. I. A. etc.[42]) Die Form des Leitherzes ist daher, roh angenähert, eine semi-kubische parabolische Spirale, $\varrho = c_1 + c_2 \varphi^{\frac{3}{2}}$ c_1, c_2 = Konstanten. In Wirklicheit wird nicht nur die Sinus-Beziehung, sondern auch der h-abhängige hydraulische Koeffizient μ in die Form der Spirale mit einbezogen.

Betreffend Ausführlicheres über die Theorie des integrierenden Pegels sei auf die bezüglichen Publikationen der Firma Amsler verwiesen.[43])

Abb. 41 gibt eine Gesamtansicht des integrierenden Pegels. Unten, unterhalb des Betonhäuschens, ist der breitrandige Schwimmer ersichtlich. Im Instrumentenkasten sind links oben das spiralige Leitherz mit Winkelhebel und Tasterrolle, links unten die Integriervorrichtung und rechts oben die Schreibvorrichtung erkennbar; letztere beide vom Winkelhebel betätigt. Photographie im Museum.

V. BESCHLEUNIGUNGSMESSER

Als letztes charakteristisches Beispiel der Amsler'schen mathematischen Instrumente soll der rotierende Beschleunigungsmesser von Alfred Amsler angeführt werden.

Dieser Beschleunigungsmesser wurde 1910 im Dynamometerwagen der ehemaligen Bayrischen Staatsbahnen, einem der schön-

---

[42]) Siehe: Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte"; statt, Forchheimer: „Hydraulik", Leipzig, G. B. Teubner.

Normen für Wassermessungen vom Schweiz. Ingenieur- und Architektenverein, 1924.

[43]) Schweizerische Technische Zeitschrift, No. 14/15, 12. April 1928, Seiten 184—187, „Integrierender Pegel der Firma Alfred J. Amsler & Co., Schaffhausen".

Journal of Scientific Instruments, Cambridge University Press, London, Vol. V, No. 10, Oktober 1928, „The Amsler Integrating Water Gauge".

Génie Civil, Paris, 5. Mai 1928, „Limnigraphe intégrant".

Mémoires du Congrès International de Mécanique Générale, Liège, Imprimerie Georges Thone, 1930, Vol. III, pages 113—118, „Le principe et l'usage du limnigraphe intégrant".

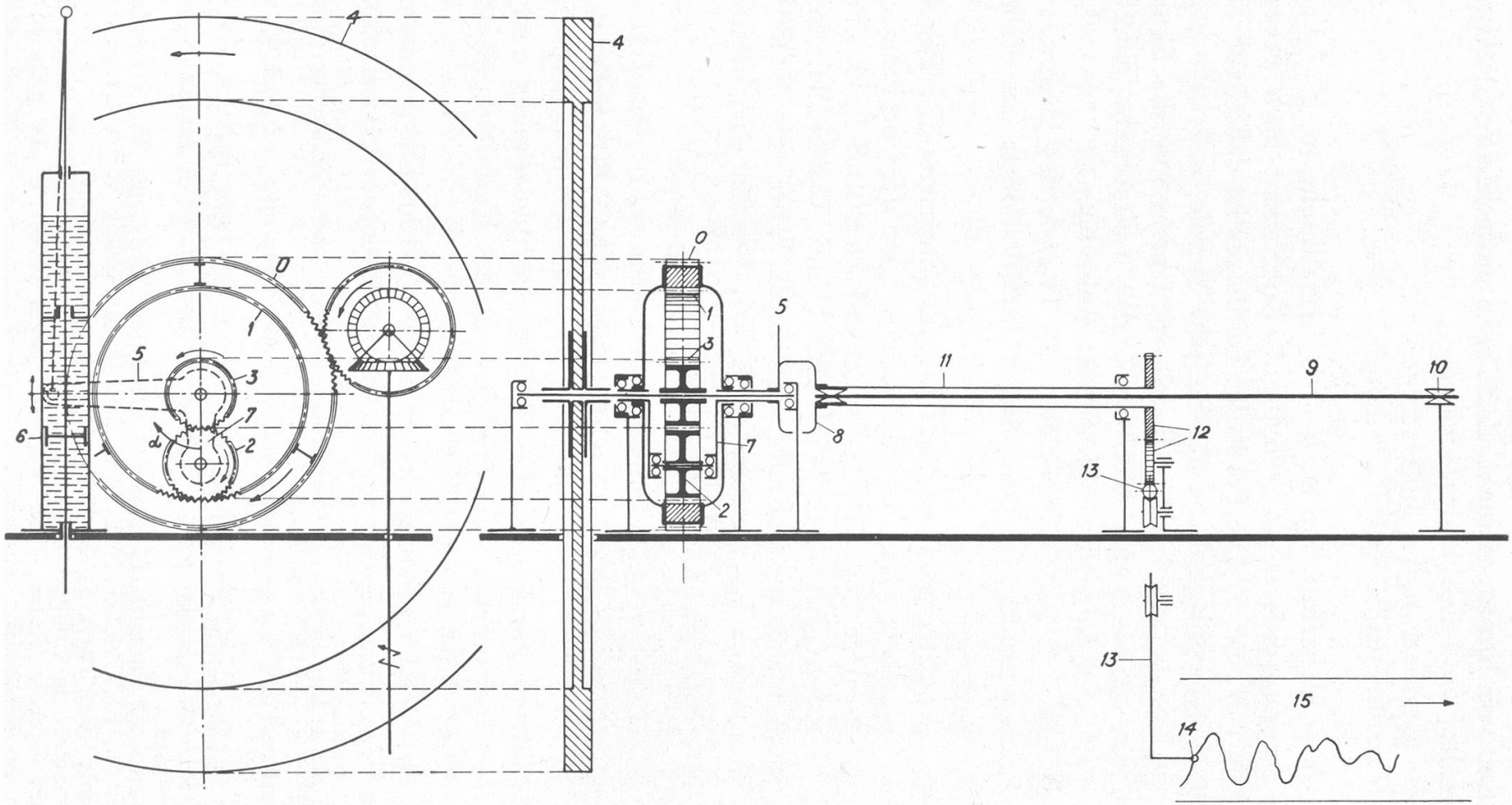


Abb. 42. Rotierender Beschleunigungsmesser von A. Amsler, Schema.

sten von A. Amsler ausgerüsteten Meßwagen, eingebaut.[44]) Er dient zur Messung der augenblicklichen Beschleunigung bezw. Verzögerung des Zuges. Der Apparat ist im Prinzip ein Drehmomentmesser, welcher mittels eines auf Torsion beanspruchten Federstabes das Drehmoment mißt, erforderlich um eine Schwungscheibe von bekanntem polarem Trägheitsmoment in ihrer Rotation zu beschleunigen bezw. zu verzögern.

Das Zahnrädergehäuse 0, Abb. 42, ist durch seinen gezahnten Kranz und eine Zahnräderübersetzung mit der Antriebwelle des Apparatentisches vom Wagenrad aus gekuppelt; es dreht sich also mit einer der Zuggeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ proportionalen Winkelgeschwindigkeit ω_1. Im Gehäuse 0 wird durch Innenverzahnung 1, Planetenrad 2 und Sonnenrad 3 die Geschwindigkeitsänderung des Zuges auf die Schwungscheibe 4 übermittelt, welche auf der Achse des Sonnenrades 3 sitzt.

Das als Jakob Amsler'scher Zahndruckdynamometer ausgebildete Planetenrad 2 ist in der Waage 7 gelagert und überträgt das Beschleunigungs- (bezw. Verzögerungs-) Moment der Schwungscheibe auf den Einspannkopf 8 und damit auf die darin eingespannte, an ihrem anderen Ende 10 festgehaltene Torsionsfeder 9, welche sich proportional zur Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ des Zuges verdreht. Die Verdrehung der Torsionsfeder wird durch ihr Schutzrohr 11 und die Zahnräder 12 auf die Zahnstange 13 mit Schreibstift 14 übertragen. 15 ist der ablaufende Registrierstreifen.

Seien, Abb. 43, r_1, r_2, r_3 die wirksamen Radien, bezw. ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten in Bezug auf die Apparatenaxe vom inneren Zahnkranz 1, Waage des Planetenrades 2 und Sonnenrad 3. Da im Gleichgewichtszustand das Planetenrad 2 als reines Transportrad zwischen 1 und 3 wirkt, sind die Umfangsgeschwindigkeiten $v_1 = r_1 \omega_1$ und $v_3 = r_3 \omega_3$ auf der Peripherie von 1 und 3 einander gleich und mithin

$$\omega_3 = \frac{r_1}{r_3} \cdot \omega_1 \tag{1}$$

[44]) Ein kurzer Hinweis auf die Amsler-Apparatur im ehemal. Bayrischen Meßwagen mit Abbildung des Apparatentisches ist im Aufsatz von H. Nordmann und W. Weber in Glaser's Annalen, Bd. 121, Heft 11, 1. Dez. 1937, „Meßwagen zur Untersuchung von Dampflokomotiven", auf S. 170—173, enthalten.

Das Beschleunigungsmoment der Schwungscheibe 4 ist:

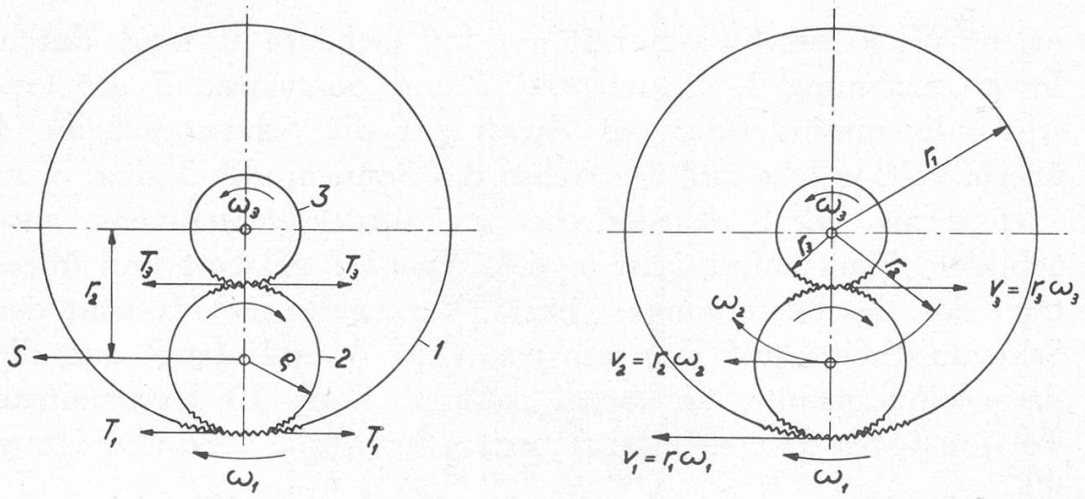
$$(2) \qquad M_3 = J_p \cdot \frac{d\omega_3}{dt} = \text{mit (1):} \quad J_p \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt},$$

wobei J_p = polares Trägheitsmoment der Schwungscheibe.

Diesem Beschleunigungsmoment hält, Abb. 43 a, das Moment des Tangentialdruckes T_3 am Planetenrad 2 das Gleichgewicht, also

$$T_3 \cdot r_3 = M_3$$

$$(3) \qquad T_3 = \frac{M_3}{r_3} = \text{mit (2):} \quad \frac{J_p}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt}$$



(a) (b)

Abb. 43. Rotierender Beschleunigungsmesser; zur mathematischen Theorie.

Der Kraftausgleich am Gehänge des Planetenrades als Zahndruckdynamometer verlangt (S = Ablenkungskraft des Gehänges):

$$S = T_1 + T_3$$

und da T_1 und T_3 die einzigen, das Rad 2 mit Radius ϱ auf Drehung beeinflussenden Kräfte sind, also $T_1 \cdot \varrho = T_3 \cdot \varrho$, $T_1 = T_3$, schließlich

$$S = 2 \cdot T_3$$

d. h. wegen (3)

$$(4) \qquad S = 2 \cdot \frac{J_p}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt}$$

Zuletzt ist der Verdrehungswinkel α des Torsionsstabes proportional dem auf ihn durch Gehänge übertragenen Dreh-

moment $S \cdot r_2$ vom Zahndruckdynamometer, d. h. mit C als Torsionskonstante des Meßstabes

$$C \cdot \alpha = r_2 \cdot S = r_2 \cdot 2 \frac{J_p}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} \tag{5}$$

Erinnert man sich, daß die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Rädergehäuses proportional der Zugsgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$, also $\frac{d\omega_1}{dt}$ = proportional $\frac{d^2x}{dt^2}$ ist, so ist die Gleichung (5) letzten Endes gleichbedeutend mit:

Verdrehungswinkel des Torsionsstabes = proport. $\frac{d^2x}{dt^2}$

(6) = proport. Zugsbeschleunigungs-, bezw. -Verzögerung.

Dies ist die verblüffend leichte Theorie dieses in seiner Originalität höchst einfachen Beschleunigungsmessers.

In Wirklichkeit sind die Vorgänge etwas weniger elementar, denn die Waage des Planetenrades 2 bleibt effektiv nicht in Ruhe, wie angenommen, sondern schlägt bei jeder Beschleunigungsänderung des Zuges um den an sich nicht beträchtlichen Torsionswinkel α des Meßstabes aus. Dadurch kommt in den Bewegungszustand des Apparates eine weitere Komponente hinein, welche das Schlußresultat nicht unwesentlich entstellt.

Kehren wir zur Abb. 42 zurück, so besitzt die Waage des Planetenrades 2 bei einer endlichen Auslenkung α eine eigene Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = \frac{d\alpha}{dt}$, das Zentrum von 2 eine Umfangsgeschwindigkeit $v_2 = \omega_2 \cdot r_2$. Die Beziehung zwischen den effektiven Eingriffs-Geschwindigkeiten am Planetengetriebe erhält man auf die anschaulichste Art, indem man, Abb. 43 b, das Planetenrad 2 als Flaschenzug auffaßt, bei welchem Weg und Geschwindigkeit der Flaschenzugrolle algebraischer Mittelwert sind der Wege bezw. Geschwindigkeiten der beiden auflaufenden Seile, also:

$$v_2 = \frac{v_1 - v_3}{2}$$

$$r_2\, \omega_2 = \frac{r_1 \omega_1 - r_3 \omega_3}{2}$$

woraus statt (1):

$$(1') \qquad \omega_3 = \frac{r_1}{r_3}\,\omega_1 - 2\,\frac{r_2}{r_3}\,\omega_2 = \frac{r_1}{r_3}\,\omega_1 - 2\,\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

Mit (1') gehen nunmehr Gleichung (2) bis (5) über in:

$$(2') \qquad M_3 = J_p\cdot\left(\frac{r_1}{r_3}\cdot\frac{d\omega_1}{dt} - 2\,\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$

bezw.

$$(3') \qquad T_3 = \ldots\ldots$$

$$(4') \qquad S = \ldots\ldots$$

$$(5') \qquad C\cdot\alpha = r_2\cdot 2\,\frac{J_p}{r_3}\left(\frac{r_1}{r_3}\cdot\frac{d\omega_1}{dt} - 2\,\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$

oder, anders gruppiert:

$$(5''),\ (6') \quad 4\,\frac{J_p}{r_3^2}\,r_2\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{C}{r_2}\cdot\alpha = 2\,\frac{J_p}{r_3^2}\cdot r_1\cdot\frac{d\omega_1}{dt} = \text{prop.}\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

Die Gleichungen (5'') und (6') unterscheiden sich also in Wirklichkeit von den vereinfachten Gleichungen (5) und (6) durch das Hinzutreten, linkerhands, eines Gliedes in $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, mit anderen Worten: der Beschleunigungsmesser ist effektiv ein schwingungsfähiges Gebilde mit Eigenschwingungsdauer

$$2\pi\sqrt{\frac{4\,J_p}{C}\cdot\frac{r_2^2}{r_3^2}}$$

und mit der zu messenden Zugsbeschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ als Störungsfunktion. Das registrierte Diagramm wäre somit die Ueberlagerung der wahren Zugsbeschleunigung und der Eigenschwingung des Apparates. Eine richtige Beschleunigungsanzeige ist daher nur möglich bei Unterdrückung der Eigenschwingung durch genügende Dämpfung des Instrumentes (= Hinzufügung eines weiteren Gliedes in $\frac{d\alpha}{dt}$ links in Gleichung (5'') und (6')).

Diese Erkenntnis scheint A. Amsler erst nach Erfindung seines sinnreichen Accelerometers gekommen zu sein, denn die ersten Zeichnungen des Apparates enthalten noch keine Dämpfungsvorrichtung. Bei der endgültigen Ausführung wurde als Dämpfer eine von der Planetenradwaage 7 über Hebel 5 mitgenommene Oelbremse 6, Abb. 42, eingebaut.

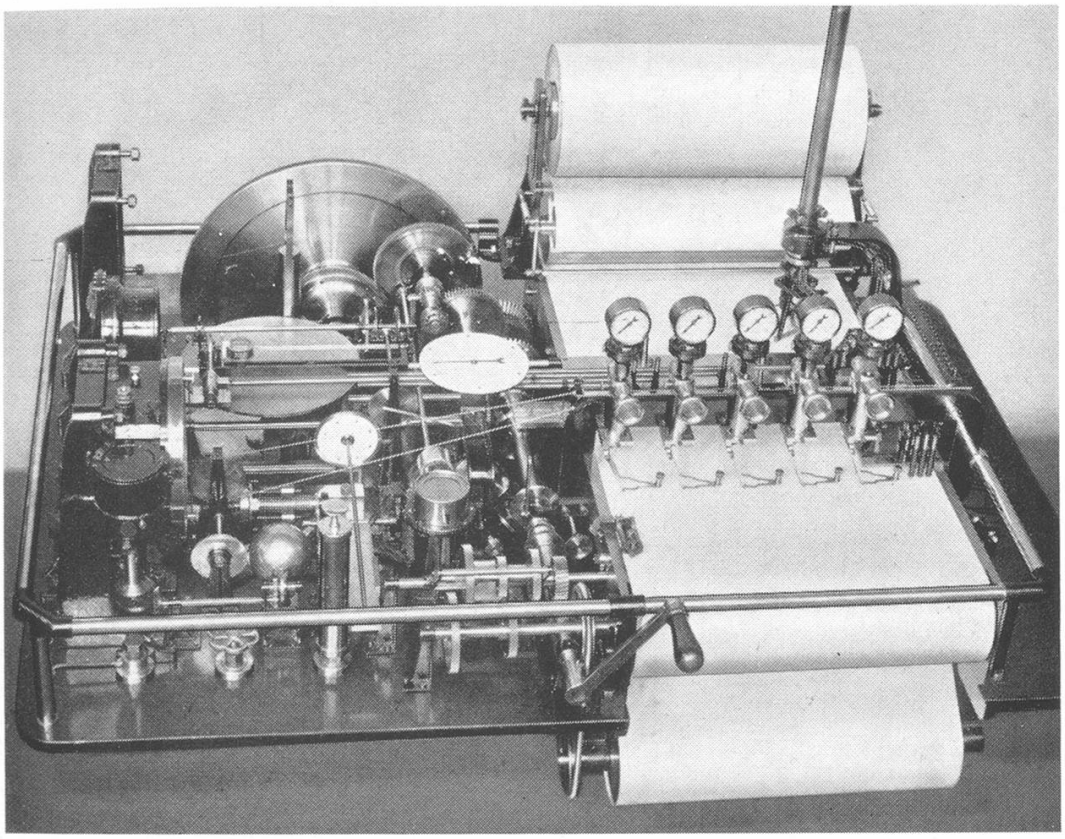


Abb. 44. Amsler-Dynamometerwagen der Bayrischen Staatsbahnen mit A. Amsler'schem rotierendem Beschleunigungsmesser.

Die Abb. 44 ist eine Aufnahme des Apparatentisches des ehemaligen Bayrischen Dynamometerwagens; in der Mitte hinten sind Antrieb, Planetenrädergehäuse und Schwungscheibe des Rotationsbeschleunigungsmessers ersichtlich, in Front davon, die Tischplatte etwa in ihrem Drittel durchquerend, der kalibrierte Torsionsstab, und links vom Planetenradgehäuse die Oelbremse mit vertikalem Zylinder. Photographie im Museum.

(Manuskript eingegangen: 4. Mai 1944)