Beitrag zur Berechnung von Integralen mit gebrochenen Potenzen

Beitrag zur Berechnung von Integralen mit gebrochenen Potenzen

von FRANCIS DUBOIS, Le Petit Mont s/Lausanne

Die über einen positiven Halbkreis genommenen Integrale

$$\int_{-r}^{+r} \sqrt{y}\, dx = \int_{-r}^{+r} y^{\frac{1}{2}}\, dx$$

(Halbpotenz-Integral) und

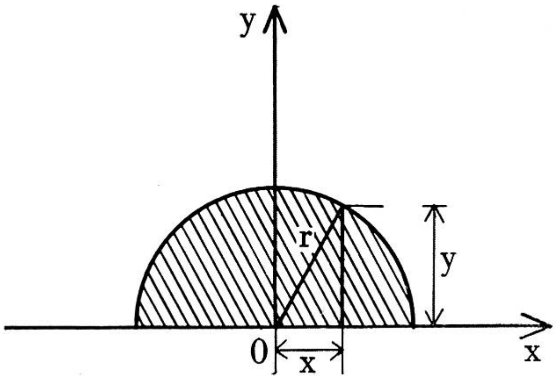
$$\int_{-r}^{+r} (\sqrt{y})^3\, dx = \int_{-r}^{+r} y^{\frac{3}{2}}\, dx$$

(Dreizweitelpotenz-Integral) spielen bei der Justierung der Quadratwurzel-Planimeter, bzw. Dreizweitelpotenz-Planimeter, eine praktische Rolle.

Im Band XVIII, Jahrgang 1942—43, S. 270 u. ff. dieser «Mitteilungen» hat Verfasser für die numerische Auswertung obiger Integrale zwei Methoden angegeben, die eine durch gliedweise Integration einer schlecht konvergierenden Potenzenreihe unter Heranziehung einer geeigneten Restformel, die andere durch Überführung in viel besser konvergierende elliptische Integrale.

Es ist inzwischen dem Genannten gelungen, eine dritte, mathematisch exakte Methode ausfindig zu machen, die direkt auf bekannte, geschlossene Funktionen (hypergeometrische Funktionen) führt. Diese soll nachstehend erläutert werden.

1. HALBPOTENZ-INTEGRAL



Für den positiven Halbkreis (Fig.) ist mit

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad \frac{x}{r} = \mathfrak{z}$$

das Quadratwurzel-Integral

(1) $$I = \int_{-r}^{+r} \sqrt{y}\, dx = r^{\frac{3}{2}}\, 2 \int_{0}^{1} \sqrt[4]{1 - \mathfrak{z}^2}\, d\,\mathfrak{z}$$

Durch binomische Entwicklung der 4. Wurzel und gliedweise Integration wird vorab für das unbestimmte Integral bis auf den konstanten Beiwert $r^{\frac{3}{2}}\, 2$:

(2) $$\int_{0}^{\mathfrak{z}} \sqrt[4]{1 - \mathfrak{z}^2}\, dx = \frac{\mathfrak{z}}{1} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{1!}\frac{\mathfrak{z}^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}+1\right)}{2!}\frac{\mathfrak{z}^5}{5}$$
$$+ \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}+1\right)\left(-\frac{1}{4}\quad 2\right)}{3!}\frac{\mathfrak{z}^7}{7} + \ldots\ldots$$

Wir betrachten zunächst die exponentgebundenen Faktoren der integrierten Potenz von $\mathfrak{z}$ für sich allein.

Potenz $\equiv \mathfrak{z}^1;\ \mathfrak{z}^3;\ \mathfrak{z}^5;\ \mathfrak{z}^7;\ \ldots\ldots$

Faktor $\equiv 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7};\ \ldots\ldots$

Diese lassen sich identisch wie folgt darstellen:

$$\equiv 1;\ \frac{1}{3};\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5};\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7};\ \ldots\ldots$$

$$\equiv 1;\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)};\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)};\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)};\ \ldots\ldots$$

Mithin wird, bei Vorklammerung der gemeinsamen Potenz $\mathfrak{z}^1$:

$$(3)\qquad \int_0^{\mathfrak{z}} \sqrt[4]{1-\mathfrak{z}^2}\, d\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\left[1 + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\mathfrak{z}^2}{1!} + \right.$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)} \frac{\mathfrak{z}^4}{2!} +$$

$$\left.\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}+1\right)\left(-\frac{1}{4}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)} \frac{\mathfrak{z}^6}{3!} + \ldots\ldots \right]$$

In der Summe in der eckigen Klammer rechts erkennt man sofort die Reihenentwicklung der hypergeometrischen Funktion.[1]

$$(4)\qquad F\left(\alpha, \beta, \gamma, q\right) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}\frac{q}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{q^2}{2!} + $$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{q^3}{3!} + \ldots\ldots$$

mit

$$(5)\qquad \alpha = -\frac{1}{4};\ \beta = +\frac{1}{2};\ \gamma = +\frac{3}{2};\ q = \mathfrak{z}^2$$

und mithin ist:

$$(6)\qquad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int_0^{\mathfrak{z}} \sqrt[4]{1-\mathfrak{z}^2}\, d\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\cdot F\left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, \mathfrak{z}^2\right)}$$

Zu diesem Ergebnis kann man auf die umgekehrte Art gelangen.
Bekanntlich erfüllt die hypergeometrische Funktion F ( ) die Differenzialgleichung[1]

---

[1] Siehe z. B.:
— C. F. GAUSS: Disquisitiones circa seriem infmitan, etc. (1812) und Ges. Werke, Bd. 3.
— RIEMANN-WEBER: Die partiellen Differentialgleichungen der methematischen Physik. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, Bd. II, 1. Abschnitt, § 4—5.
— A. ANGST: Complément de mathématiques. Paris 1949, Editions de la Revue d'Optique, Cap. 6, § 2, 11, pag. 282—283.

$$q\,(1-q)\frac{d^2F}{d\,q^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,q\right]\frac{d\,F}{d\,q}-\alpha\,\beta\,F=0 \tag{7}$$

d. h. mit α, β, γ, q gemäss (5)

$$q\,(1-q)\frac{d^2F}{d\,q^2}+\left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)q\right]\frac{d\,F}{d\,q}-\left(-\frac{1}{4}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)F=0$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{q\,(1-q)\frac{d^2F}{d\,q^2}+\left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)q\right]\frac{d\,F}{d\,q}+\frac{1}{8}\,F=0} \tag{8}$$

Es lässt sich in der Tat zeigen, dass, wegen (6)

$$U=\frac{1}{\mathfrak{z}}\int_0^{\mathfrak{z}}\sqrt[4]{1-\mathfrak{z}^2}\,d\,\mathfrak{z}\ \text{ mit } \mathfrak{z}^2=q$$

der Differentialgleichung (8) Genüge leistet.

Mit

$$\mathfrak{z}^2=q;\ \mathfrak{z}=\sqrt{q};\ d\,\mathfrak{z}=\frac{d\,q}{2\sqrt{q}}$$

wird zunächst

$$U=\frac{1}{\sqrt{q}}\int\sqrt[4]{1-q}\,\frac{d\,q}{2\sqrt{q}}=q^{-\frac{1}{2}}\int\frac{(1-q)^{\frac{1}{4}}\,q^{-\frac{1}{2}}}{2}\,dq \tag{10}$$

sodann mit der Kurzbezeichnung

$$\int|....|\,dq=\int\frac{(1-q)^{\frac{1}{4}}\,q^{-\frac{1}{2}}}{2}\,dq$$

$$\frac{dU}{dq}=-\frac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{2}-1}\int|....|\,dq+q^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dq}\left(\int|....|\,dq\right)$$

ausgerechnet

$$=\left\{-\frac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{2}-1}\int|....|\,dq\right\}+\left\{\frac{1}{2}\,\frac{(1-q)^{\frac{1}{4}}}{q}\right\}$$

ferner

$$\frac{d^2U}{dq^2}=\frac{d}{dq}\left[\left\{-\frac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{2}-1}\int|....|\,dq\right\}+\left\{\frac{1}{2}\,\frac{(1-q)^{\frac{1}{4}}}{q}\right\}\right]$$

und nach Ausrechnung und Zusammenziehung

$$=+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,q^{-\frac{1}{2}-2}\int|....|\,dq+\frac{(1-q)^{\frac{1}{4}}\,q^{-2}}{2}\left[-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}(1-q)^{-1}\,q\right]$$

Lässt man wieder U für $q^{-\frac{1}{2}} \int |....| \, dq$ auftreten, so ist

$$(11) \quad \frac{dU}{dq} = -\frac{1}{2} q^{-1} U + \frac{1}{2} (1-q)^{\frac{1}{4}} q^{-1}$$

$$(12) \quad \frac{d^2U}{dq^2} = +\frac{1}{2}\frac{3}{2} q^{-2} U + \frac{1}{2} (1-q)^{\frac{1}{2}} q^{-2} \left[-\frac{3}{2} - \frac{1}{4} (1-q)^{-1} q \right]$$

Bildet man aus den mit $2q$ bzw. $2q^2$ multiplizierten beiden Gleichungen (11) und (12)

$$2q.(11) = (13) \quad 2q \frac{dU}{dq} = -U + (1-q)^{\frac{1}{4}}$$

$$2q^2 \cdot (12) = (14) \quad 2q^2 \frac{d^2U}{dq^2} = +\frac{3}{2} U + (1-q)^{\frac{1}{4}} \left[-\frac{3}{2} - \frac{1}{4} (1-q)^{-1} q \right]$$

die lineare Kombination

$$\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4} (1-q)^{-1} q \right] \cdot (13) + 1 \cdot (14)$$

so entsteht schliesslich nach Wegstreichung sich aufhebender Elemente und Umgruppierung

$$(15) \quad 2q^2 \frac{d^2U}{dq^2} + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4} (1-q)^{-1} q \right] 2q \frac{dU}{dq} + \frac{1}{4} (1-q)^{-1} q U = 0$$

Diese mit $\frac{1-q}{2q}$ multiplizierte letzte Gleichung (15) ist nichts anderes als die frühere Gleichung (8):

$$(16) \equiv (8) \quad q(1-q) \frac{d^2U}{dq^2} + \left[\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) q \right] \frac{dU}{dq} + \frac{1}{8} U = 0$$

Die auf zweierlei Art abgeleitete Beziehung (6) liefert auf kürzestem Wege das gewünschte Endergebnis.
In unserem Falle ist die obere Integrationsgrenze $\mathfrak{z} = 1$ und somit

$$(17) \quad \int_0^1 \sqrt[4]{1-\mathfrak{z}^2} \, d\mathfrak{z} = 1 \cdot F\left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, 1 \right)$$

Für die hypergeometrische Funktion mit dem Argument $q = \mathfrak{z}^2 = 1$ gilt die elegante Formel von Gauss[2]

$$(18) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

---

[2] GAUSS: Disquisitiones ..., loc. cit.

wobei Γ ( ) die EULER'sche Gammafunktion ist.[3]
Hier mit den α-, β-, γ-Werten gemäss (5) wird:

$$\int_0^1 \sqrt[4]{1-\mathfrak{z}^2}\, d\,\mathfrak{z} = 1 \cdot \frac{\Gamma\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\cdot\Gamma\left(+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)} \tag{19}$$

$$= 1 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\Gamma(1)}$$

$$= 1 \cdot \frac{\Gamma(1{,}5)\cdot\Gamma(1{,}25)}{\Gamma(1{,}75)\cdot\Gamma(1)}$$

Die Γ ( )-Werte sind aus den Funktionstafeln von JAHNKE und EMDE[4] direkt abzugreifen. Es ergibt sich nach Wiederanfügung des Beiwertes $r^{\frac{3}{2}} \cdot 2$ nach (1)

$$I = r^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \times 1 \cdot \frac{0{,}8862 \times 0{,}9064}{0{,}9191 \times 1} = r^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \times 0{,}87396 \tag{20}$$

$$\underline{= 1{,}74792 \cdot r^{\frac{3}{2}}}$$

in vollkommener Übereinstimmung mit S. 272 und 274 der «Mitteilungen», Bd. XVIII.

2. DREIZWEITELPOTENZ-INTEGRAL

Die Ableitung hat eine weitgehende Ähnlichkeit mit den Entwicklungen für das Halbpotenz-Integral, nur mit dem Unterschied, dass jetzt anstelle des Bruches ½ und seiner Kombinationen der Bruch $^3/_2$ und seine entsprechenden Umwandlungen auftreten. Wir können uns daher ziemlich kurz fassen.

---

[3] Siehe z. B.:
J. A. SERRET, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 5. Aufl., Leipzig, B. G. Teubner 1911, II. Bd., Kap. 4, S. 196—230.

[4] JAHNKE u. EMDE: Funktionstafeln. Leipzig, B. G. Teubner 1908 und folgende Auflagen.

Der Vergleichbarkeit halber tragen die nachfolgenden Gleichungen alle die um 20 erhöhte Numerierung der Vorstehenden.

Für den positiven Halbkreis gilt ähnlich wie (1)

$$\text{(21)}\quad I = \int_{-r}^{+r} y^{\frac{3}{2}}\,dx = r^{\frac{5}{2}} \cdot 2 \int_0^1 (1-\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{4}}\,d\mathfrak{z};\ \mathfrak{z} = \frac{x}{r}$$

Nach Reihenentwicklung und gliedweiser Integration ergibt sich, bei Unterdrückung des Beiwertes $r^{\frac{5}{2}} \cdot 2$, entsprechend (2)

$$\text{(22)}\quad \int_0^{\mathfrak{z}} (1-\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{4}}\,d\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{z}}{1} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{\mathfrak{z}^3}{3}}{1!} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+1\right)\frac{\mathfrak{z}^5}{5}}{2!} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+1\right)\left(-\frac{3}{4}+2\right)\frac{\mathfrak{z}^7}{7}}{3!} + \ldots\ldots$$

Die exponentabhängigen Faktoren der integrierten $\mathfrak{z}$-Potenzen sind dieselben wie vorstehend. Wir können sie von Seite 2 fertig übernehmen und erhalten auf gleiche Art wie oben

$$\text{(23)}\quad \int_0^{\mathfrak{z}} (1-\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{4}}\,d\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\left[1 + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{\mathfrak{z}^3}{1!} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)}\frac{\mathfrak{z}^4}{2!} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+1\right)\left(-\frac{3}{4}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)}\frac{\mathfrak{z}^6}{3!} + \ldots\ldots\right]$$

d. h. wieder die mit $\mathfrak{z}$ multiplizierte Reihenentwicklung einer hypergeometrischen Funktion

$$\text{(24)}\quad F(\alpha, \beta, \gamma, q) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}\frac{q}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{q^2}{2!} + \ldots\ldots$$

nur hier mit den Parametern

$$(25)\quad \alpha = -\frac{3}{4};\ \beta = +\frac{1}{2};\ \gamma = +\frac{3}{2};\ q = \xi^2$$

also

$$(26)\quad \underbrace{\int_0^{\xi} (1-\xi^2)^{\frac{3}{4}}\, d\,\xi = \xi \cdot F\left(-\frac{3}{4}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, \xi^2\right)}$$

Der umgekehrte Beweis, dass der Ausdruck $\frac{1}{\xi}\cdot(26)$

$$\frac{1}{\xi}\cdot(26)\ V = \frac{1}{\xi}\int (1-\xi^2)^{\frac{3}{4}}\, d\,\xi \text{ mit } \xi^2 = q$$

auch der Definitionsgleichung der hypergeometrischen Funktion

$$(27)\quad q\,(1-q)\frac{d^2F}{dq^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)\,q]\frac{dF}{dq} - \alpha\beta F = 0$$

d. h. hier mit (25)

$$(28)\quad q\,(1-q)\frac{d^2V}{dq^2} + \left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)q\right]\frac{dV}{dq} + \frac{3}{8}V = 0$$

genügt, lässt sich ebenfalls mit Leichtigkeit erbringen. Ähnliche Entwicklungen wie (9), (10), (11), (12) vorstehend, führen zu (ausgerechnet):

$$(33)\quad 2\,q\frac{dV}{dq} = -V + (1-q)^{\frac{3}{4}}$$

$$(34)\quad 2\,q^2\frac{d^2V}{dq^2} = +\frac{3}{2}V + (1-q)^{\frac{3}{4}}\left[-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}(1-q)^{-1}q\right]$$

Die etwas abgeänderte lineare Kombination

$$\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{4}(1-q)^{-1}q\right]\cdot(33) + 1\cdot(34)$$

liefert schliesslich nach Vereinfachungen, Umgruppierung und Multiplizierung des Ergebnisses mit $\frac{1-q}{2q}$

$$(36)\equiv(28)\quad \underbrace{q\,(1-q)\frac{d^2V}{dq^2} + \left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)q\right]\frac{dV}{dq} + \frac{3}{8}V = 0}$$

oder

$$q\,(1-q)\frac{d^2V}{dq^2} + \left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1\right)q\right]\frac{dV}{dq} - \left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)V = 0$$

d. h. tatsächlich die Differentialgleichung (27), welcher der Ausdruck $\frac{1}{\mathfrak{z}}\cdot(26)$ für die α, β, γ, q gemäss (25) gehorchen soll.

Mit Benutzung der Formel von GAUSS[5] wird jetzt aus (26):

$$(39)\quad \int_0^1 (1-\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{4}}\, d\,\mathfrak{z} = 1\cdot\frac{\Gamma\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(+\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(+\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\cdot\Gamma\left(+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\cdot\Gamma(1)}$$

$$= 1\cdot\frac{\Gamma(1{,}5)\cdot\Gamma(1{,}75)}{\Gamma(2{,}25)\cdot\Gamma(1)}$$

i. e. mit den Tabellenwerten von JAHNKE und EMDE[6] und nach Wiedereinsetzung des Beiwertes $r^{\frac{5}{2}}\cdot 2$ lt. (31):

$$(40)\quad I = r^{\frac{5}{2}}\cdot 2\times 1\cdot\frac{0{,}8862\times 0{,}9191}{1{,}1330\times 1} = r^{\frac{5}{2}}\cdot 2\times 0{,}71889$$

$$= 1{,}43778\cdot r^{\frac{5}{2}}$$

genau wie auf S. 277 und 278 der «Mitteilungen», Band XVIII, auf andere Art ermittelt.

[5] GAUSS: Vide S. 279 ante.
[6] JAHNKE u. EMDE: Vide S. 280 ante.