Über ein Kurveninterval aus der Theorie der Planimeter

Autor(en): **Kreyszig, Erwin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen**

Band (Jahr): **30 (1973-1976)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-585464

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über ein Kurvenintegral aus der Theorie der Planimeter

von ERWIN KREYSZIG, Universität Karlsruhe

Anlässlich der wohlgelungenen 147. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft vom 29. September bis 1. Oktober 1967 in Schaffhausen wurde ich auf eine Arbeit von Herrn Francis Dubois über Integrale mit gebrochenen Potenzen aufmerksam, die in Band XXVIII (Jahrgang 1963|67) der Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen erschienen ist.

Die nachstehenden Ausführungen wurden durch diese Arbeit angeregt und betreffen eine etwas einfachere Auswertung der genannten Integrale und deren Verallgemeinerung.

Herr Dubois betrachtet die Kurvenintegrale

$$(1) \qquad F_{1/2} = \int_C y^{1/2}\, dx \quad \text{und} \quad F_{3/2} = \int_C y^{3/2}\, dx,$$

die bei der Justierung gewisser Planimeter eine Rolle spielen. Integriert wird dabei von $-r$ nach r längs des Halbkreises $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geqq 0$, in der oberen xy-Halbebene. Diese Integrale sind Sonderfälle des Integrals

$$(2) \qquad F_a = \int_C y^a\, dx \qquad (a \geqq 0)$$

mit C wie zuvor.

Insbesondere gilt also für die von Herrn Dubois [1] betrachteten Integrale

$$(5) \qquad F_{1/2} = r^{3/2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1,25)}{\Gamma(1,75)}$$

und

$$(6) \qquad F_{3/2} = r^{5/2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1,75)}{\Gamma(2,25)}$$

Wegen $\sqrt{\pi} = \Gamma(0{,}5) = 2\Gamma(1{,}5)$ ist dies identisch mit (19), (20) bzw. (39), (40) in [1].

Zahlenwerte von F_a gewinnt man aus (4) mit Hilfe einer Tafel der Gammafunktion (vgl. [2] oder [3]).

Für $a = 2n + 1$, $n = 0, 1, \ldots,$ lässt sich F_a sogar elementar berechnen. Es ist nämlich gemäss (4)

$$F_{2n+1} = r^{2n+2} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) / \Gamma(n+2).$$

Mit $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ folgt

$$\Gamma\left(\frac{2n+3}{2} \right) = \frac{(2n+1)\,(2n-1)\ldots 3 \,.\, 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}\,.$$

Wegen $\Gamma(n+2) = (n+1)\,!$ gilt also

$$(7) \qquad F_{2n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)\, \pi\, r^{2n+2} / 2^{n+1} (n+1)\,!\,.$$

Literatur

[1] F. Dubois, Beitrag zur Berechnung von Integralen mit gebrochenen Potenzen. Mitt. Naturforsch. Ges. Schaffhausen XXVIII (1963|67), 275—283

[2] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 3rd. ed., J. Wiley, New York, 1972

[3] Jahnke — Emde — Lösch, Tafeln höherer Funktionen, 7. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1966

Um (2) auszuwerten, setzen wir $x = r \cos p$ und $y = r \sin p$. Dann wird $dx = -r \sin p \, dp$ auf C, und wir erhalten

$$F_a = -r^{a+1} \int_{\pi}^{0} \sin^{a+1} p \, dp = r^{a+1} \int_{0}^{\pi} \sin^{a+1} p \, dp.$$

Setzen wir weiterhin $p = q + \pi/2$, also $q = p - \pi/2$, so ergibt sich $\sin p = \cos q$ und

$$F_a = r^{a+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{a+1} q \, dq = 2r^{a+1} \int_{0}^{\pi/2} \cos^{a+1} q \, dq.$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit Hilfe der Eulerschen Betafunktion $B(s; t)$ auswerten (vgl. z. B. [2], Seite 830): Es ist

$$B(s; t) = \int_{0}^{1} u^{s-1} (1-u)^{t-1} \, du = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

und $B(s; t) = B(t; s)$. Setzen wir $u = \sin^2 q$, so folgt $1 - u = \cos^2 q$ und $du = 2 \sin u \cos u \, du$.

Demnach erhalten wir

$$B(s; t) = 2 \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2s-1} q \cos^{2t-1} q \, dq.$$

Für $2s - 1 = b$ und $2t - 1 = 0$ ergibt sich speziell

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^{b} q \, dq = (1/2) \, B(0{,}5; 0{,}5b + 0{,}5). \tag{3}$$

Mit $b = a + 1$ folgt hieraus

$$F_a = r^{a+1} B(0{,}5; 0{,}5a + 1)$$

oder wegen $\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}$ auch

$$F_a = r^{a+1} \frac{\Gamma(0{,}5)\Gamma(0{,}5a+1)}{\Gamma(0{,}5a+1{,}5)} = r^{a+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(0{,}5a+1)}{\Gamma(0{,}5a+1{,}5)} \tag{4}$$

Damit ist Integral (2) ausgewertet.