Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1931-1934)

Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs

Autor: Chuard, Jules

Kapitel: 1: Les réseaux

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

et XLI du Mémorial des Sciences mathématiques qui donnent un aperçu très complet sur l'état de la question au moment de leur publication. Le second, en particulier, mentionne 43 auteurs et 53 travaux sur le problème des quatre couleurs. Il nous dispensera de faire d'autres citations.

4. A. Sainte-Lagüe: *Les Réseaux.* Fascicule XVIII. 1926.
5. A. Sainte-Lagüe: *Géométrie de situation et jeux.* Fascicule XLI. 1929.

§ 1. Les Réseaux.

Nous avons défini antérieurement ce que l'on entend par *configuration linéaire*[1] ou *réseau.* Rappelons-en brièvement les fondements.

Une *arête* est un segment linéaire, soit un *arc de courbe de Jordan,* ou encore un lien *simple ouvert.* Elle est limitée à ses extrémités par deux points appelés *sommets.* Les sommets font partie de l'arête qu'ils limitent, mais ils sont dits *points extérieurs,* par opposition aux autres points de l'arête, lesquels sont dits *points intérieurs.*

Tout ensemble d'arêtes, en nombre fini, tel qu'un point intérieur de l'une n'appartienne jamais à une autre arête de l'ensemble, constitue ce que l'on nomme une *configuration linéaire,* un *réseau* ou un *assemblage* (*graph,* en anglais).

Nous désignerons par α_1 le nombre de ses arêtes et par α_0 celui de ses sommets. Le réseau est alors dit *d'ordre* α_0.

On entend par *degré* d'un sommet, le nombre des arêtes du réseau qui aboutissent à ce sommet. Un sommet de degré 1 sera dit *sommet libre.* Il sera dit de *liaison,* lorsque son degré est supérieur à 1. Nous conviendrons encore de nommer *bifurcation* un sommet (de liaison) dont le degré est égal à 3.

Si tous les sommets d'un réseau ont le même degré, le réseau est dit *homogène.* Un réseau homogène du premier degré est appelé réseau *linéaire.* Il ne renferme que des sommets libres. Il est donc représenté par un certain nombre d'arêtes isolées. Et puisque chaque arête a pour frontière deux sommets, on a l'égalité

$$\alpha_0 = 2\,\alpha_1$$

[1] J. Chuard: *Loc. cit.* 3.

Un réseau homogène du second degré est un réseau *quadratique*. Chacun de ses sommets sert de liaison à deux arêtes du réseau. Celui-ci comporte ainsi un ou plusieurs contours fermés, isolés les uns des autres. Il est tel que l'on a l'égalité:

$$\alpha_0 = \alpha_1$$

Un réseau homogène du troisième degré est dit *cubique*. Chacun de ses sommets est une bifurcation. On a ainsi l'égalité:

$$3\,\alpha_0 = 2\,\alpha_1$$

Un réseau homogène d'ordre α_0 et de degré k, décomposable en deux réseaux de même ordre α_0 et de degrés m et n, tels que l'on ait $m + n = k$, est nommé *réductible*. Dans le cas contraire, il est *irréductible* ou *primitif*.

Disons encore qu'un réseau est dit *connexe* si, étant donnés deux sommets quelconques de celui-ci, il est possible de trouver un certain nombre d'arêtes du réseau telles que l'on puisse, en suivant ces arêtes, passer de l'un des sommets considérés à l'autre. Si cette opération n'est pas réalisable, le réseau est dit: *non connexe*.

D'après Petersen, une *feuille* est une partie d'un réseau maintenue en connexion avec l'ensemble par une arête unique, laquelle est alors appelée *isthme*.

Il est intéressant de mentionner le théorème suivant, connu sous le nom de *théorème de Petersen*, dont la démonstration se trouve dans plusieurs des ouvrages cités par M. Sainte-Lagüe. Nous l'admettrons donc sans autre.

Un réseau cubique irréductible possède au moins trois feuilles.

De ce théorème, on déduit le suivant, d'une portée tout aussi générale, et d'une application plus immédiate:

Un réseau cubique, sans feuille, est toujours réductible.

Ajoutons enfin que la réductibilité d'un réseau cubique s'opère de manière à faire apparaître, d'une part un réseau linéaire, et de l'autre un réseau quadratique. Parfois le réseau quadratique est lui-même réductible en deux réseaux linéaires. Si cela est, le réseau cubique initial est alors réductible en trois réseaux linéaires. Cette dernière propriété est connue sous le nom de *théorème de Tait*.

Il est utile de définir quatre types de *configurations linéai-*

res connexes qui se rencontrent dans les réseaux et dont nous ferons un grand usage.

a) *Contour fermé. Un contour fermé est un réseau quadratique connexe.*

Le nombre des arêtes d'un contour fermé est égal à celui de ses sommets. Ce nombre sera au minimum égal à 2, car nous admettrons qu'une arête a toujours ses deux extrémités distinctes. On pourrait concevoir un contour fermé qui ne serait constitué que par une seule arête dont les extrémités seraient confondues en un sommet unique. Si nous ne le faisons pas, c'est que nous n'y voyons aucun avantage et que, par contre, un inconvénient se révèlerait dans l'emploi des matrices que nous définissons plus loin.

b) *Contour ouvert. Si d'un contour fermé, on supprime une ou plusieurs arêtes reliées les unes aux autres, on obtient un contour ouvert.*

Un contour ouvert de $n - 1$ arêtes renferme n sommets.

c) *Arbre linéaire. Un arbre linéaire est une configuration linéaire connexe qui ne renferme aucun contour fermé.*

Un arbre linéaire comprend $n - 1$ arêtes reliant entre eux n sommets donnés. Ces $n - 1$ arêtes constituent un nombre minimum d'arêtes nécessaires à la liaison des n sommets.

Bien souvent on désigne brièvement un arbre linéaire sous le nom d'*arbre*.

Un contour ouvert est un arbre d'une forme spéciale, caractérisée par la présence de deux sommets libres et de $n - 2$ sommets de liaison qui sont tous de degré 2. En général, un arbre a plusieurs sommets libres et des sommets de liaison d'un degré supérieur à 2.

Rappelons en passant la proposition suivante, qui est bien connue :

Il est possible de transformer en un arbre linéaire un réseau connexe de α_0 sommets et de α_1 arêtes, par la suppression de μ arêtes convenablement choisies,

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 .$$

d) *Contour bouclé. Une configuration linéaire connexe ayant un égal nombre de sommets et d'arêtes, et qui n'est pas un contour fermé, est un contour bouclé.*

Un contour bouclé résulte de l'association d'un contour fermé et d'un ou plusieurs arbres linéaires, à la condition bien entendu, que la soudure de ces différents types de configurations linéaires, n'entraîne pas la formation d'un second contour fermé.

§ 2. La matrice A.

Il est possible de caractériser un réseau à l'aide d'une certaine matrice, introduite par M. Veblen[1] sous le nom de *matrice A*.

Soit un réseau comprenant α_0 sommets et α_1 arêtes. Les frontières de chacune des α_1 arêtes sont constituées par deux sommets pris parmi les α_0 sommets considérés. Numérotons sommets et arêtes dans un ordre arbitraire et désignons:

les sommets par $a_1^0, a_2^0, \ldots\ldots, a_i^0, \ldots\ldots, a_{\alpha_0}^0$

et les arêtes par $a_1^1, a_2^1, \ldots\ldots, a_j^1, \ldots\ldots, a_{\alpha_1}^1$.

Soit maintenant η_{ij}^1 un nombre qui est égal à 1 si le sommet a_i^0 est frontière de l'arête a_j^1 et qui est nul dans tous les autres cas. Rangeons ces nombres en un tableau rectangulaire de α_0 lignes et α_1 colonnes en admettant que la ligne de rang i corresponde au sommet a_i^0, tandis que la colonne de rang j correspond à l'arête a_j^1. Le tableau ainsi formé est la *matrice A*.

L'on peut remarquer que dans cette matrice:

1° chaque colonne renferme deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1 et deux seulement, car elle correspond à une arête qui a par définition ses extrémités distinctes.

2° la quantité de nombres η_{ij}^1 égaux à 1 que renferme une ligne indique le degré du sommet correspondant, soit le nombre d'arêtes qui aboutissent à ce sommet. Ainsi la ligne qui correspond à un sommet libre ne contient qu'un seul nom-

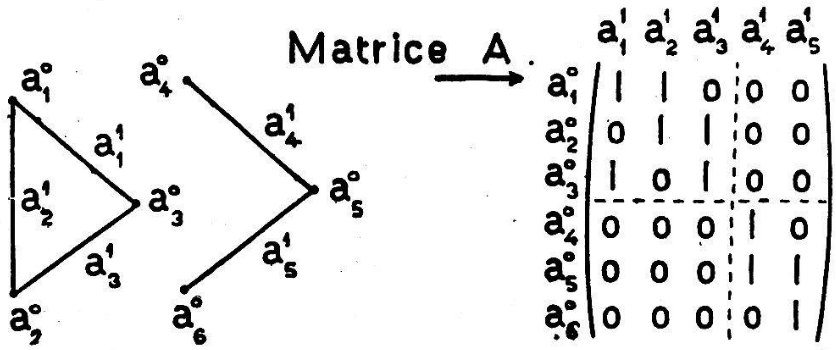

FIG. 1. — Réseau non connexe.

[1] O. VEBLEN : *Loc. cit.* 1.