Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 4 (1931-1934)
Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs
Autor: Chuard, Jules
Kapitel: 3: Les propriétés de la matrice A
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

bre η_{ij}^1 différent de zéro; celle qui correspond à un sommet de degré 2 en contient deux, etc.

Si d'une part, à un réseau correspond une matrice A, de l'autre, à une matrice A qui renferme des nombres zéro et un, et qui satisfait à la condition 1° ci-dessus, correspond un réseau bien déterminé. Une matrice A peut donc servir à définir un réseau.

Lorsqu'un réseau n'est pas connexe, il est possible de numéroter ses éléments, sommets et arêtes, de telle façon que la matrice A correspondante apparaisse aussi comme formée de matrices séparées. Nous nous bornerons à mettre ce fait en évidence à l'aide de l'exemple fig. 1.

§ 3. Les propriétés de la matrice A.

Nous disons qu'un déterminant est extrait de la matrice A, s'il est formé de certaines colonnes et d'autant de lignes de cette matrice.

Pour rechercher la valeur d'un déterminant extrait de la matrice A, comme pour déterminer le rang de celle-ci, on est conduit à effectuer des opérations arithmétiques qui peuvent se résumer de la façon suivante :

1° additionner deux lignes ou deux colonnes entre elles,

2° multiplier les termes d'une ligne ou d'une colonne par un certain facteur.

Nous admettrons alors que les combinaisons des nombres η_{ij}^1 qui en résultent, seront toujours réduites selon le module 2. En d'autres termes, nous n'aurons à appliquer que les quatre genres d'addition :

$$1+1=0\,,\quad 1+0=1\,,\quad 0+1=1\,,\quad 0+0=0$$

et les quatre genres de multiplication :

$$0.1=0\,,\quad 0.0=0\quad 1.1=1\,,\quad 1.0=0\,,$$

De cette façon, non seulement les nombres η_{ij}^1, mais encore tous ceux qui en résulteront par suite des combinaisons 1° et 2° ne prendront pour valeur que zéro ou un.

Il est particulièrement intéressant de rechercher la valeur d'un déterminant dont les lignes et les colonnes correspondent respectivement aux sommets et aux arêtes de chacun des types de configurations linéaires connexes que nous avons définis plus haut. A ce propos, on remarquera que le nom-

bre des sommets d'un contour fermé ou d'un contour bouclé est égal à celui de ses arêtes. Par contre, dans un contour ouvert et dans un arbre, le nombre des sommets surpasse d'un celui des arêtes. Or un déterminant a un nombre égal de lignes et de colonnes. Il est donc nécessaire, pour établir la correspondance qui doit exister entre une de ces configurations linéaires et un déterminant, de négliger un sommet. Nous abandonnerons ainsi momentanément un sommet libre. Remarquons que ce faisant on n'altère pas la nature de la configuration considérée. Il n'est peut-être pas inutile d'ajouter que si l'on avait supprimé un sommet de liaison, on aurait fractionné l'arbre en deux ou plusieurs parties, chacune d'elles étant encore un arbre amputé d'un sommet. Il y aurait alors lieu de rechercher la valeur du déterminant correspondant à chaque arbre partiel, pour en déduire celle du déterminant qui correspond à l'arbre considéré. C'est la règle du développement de Laplace qui interviendrait dans ce cas.

Les propositions suivantes sont fondamentales :

Proposition I. La valeur de tout déterminant extrait de la matrice A est zéro ou un.

C'est la conséquence naturelle de la convention que toutes les opérations se font suivant le module 2.

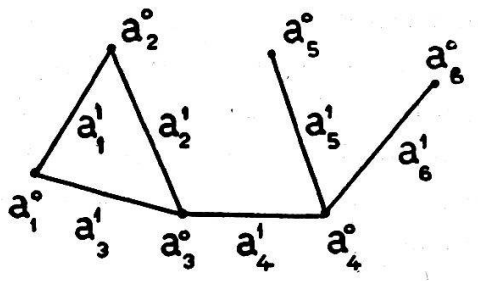
Proposition II. Tout déterminant correspondant à un contour fermé est nul.

Dans chaque ligne (colonne) du déterminant, il y a deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1, les autres étant nuls. La somme de toutes les lignes (colonnes) est identiquement nulle (mod. 2). Le déterminant est donc nul.

Proposition III. Tout déterminant qui correspond à un contour bouclé est nul.

On sait qu'un contour bouclé renferme un contour fermé. Imaginons qu'il y ait p arêtes dans le contour bouclé et que n de celles-ci contribuent à la formation du contour fermé. Numérotons tout d'abord les éléments du contour fermé de 1 à n, puis les éléments restants du contour bouclé de $n+1$ à p. Le déterminant qui en résulte prend une forme particulière, et il suffit de lui appliquer la règle de Laplace pour constater qu'il est nul.

Proposition IV. Tout déterminant qui correspond à un contour ouvert est égal à 1.



$$\begin{array}{c|cccccc|} & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 & a^1_5 & a^1_6 \\ \hline a^0_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^0_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^0_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a^0_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^0_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

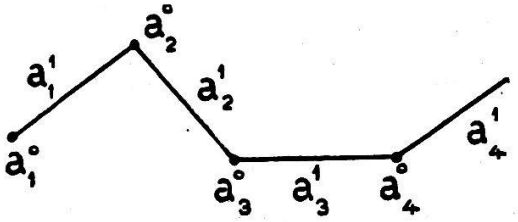
FIG. 2. — Contour bouclé.

Il est toujours possible de disposer de la notation des éléments d'un contour ouvert de façon que, lorsque l'on parcourt cette configuration d'un bout à l'autre, on rencontre successivement:

$$a^0_1\,,\ a^1_1\,,\ a^0_2\,,\ a^1_2\,,\ a^0_3\,,\ \ldots\ldots\,,\ a^1_{n-1}\,,\ a^0_n\,.$$

Imaginons que l'on supprime le sommet a^0_n. Le déterminant qui correspond au contour ouvert ainsi tronqué est tel que les termes de sa diagonale principale aient pour valeur l'unité, tandis que ceux qui se trouvent placés au-dessus de cette diagonale sont nuls. Le déterminant est donc bien égal à 1.

Si l'on avait abandonné un sommet de liaison, le contour ouvert se serait partagé en deux autres contours ouverts ayant le même caractère que celui que nous venons d'examiner. Les déterminants correspondant à chacun d'eux seraient égaux à 1, et il en serait ainsi du déterminant d'ordre $n - 1$, en vertu de la règle de Laplace.



$$\begin{array}{c|cccc|} & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ \hline a^0_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^0_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a^0_3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^0_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

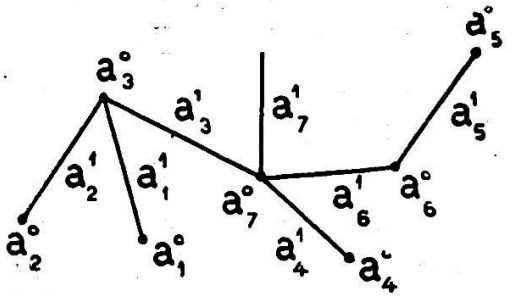
FIG. 3. — Contour ouvert.

Proposition V. Tout déterminant qui correspond à un arbre linéaire est égal à 1.

Une notation spéciale des éléments de l'arbre facilite singulièrement la démonstration.

Un arbre renferme plusieurs sommets libres. Désignons l'un d'eux par a_1^0 et soit a_1^1 l'unique arête qui aboutit à a_1^0. Imaginons que l'on supprime momentanément ces éléments: sommet et arête. La configuration qui subsiste est encore un arbre. Soient a_2^0 un de ses sommets libres et a_2^1 l'arête aboutissant à a_2^0. Supprimons ces éléments, il subsiste encore un arbre. On peut poursuivre le raisonnement qui précède jusqu'à épuisement des arêtes; la dernière, soit la n — 1ème sera limitée par les sommets a_{n-1}^0 et a_n^0. Par ce procédé chaque arête se trouve limitée par le sommet de même rang et par un autre sommet d'un rang postérieur.

Si maintenant l'on supprime le sommet a_n^0, le déterminant qui correspond à cet arbre a tous ses termes de la diagonale principale égaux à 1, tandis que ceux qui se trouvent placés au-dessus de cette diagonale sont nuls. Sa valeur est donc égale à 1.



$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \\
a_1^0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_2^0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_3^0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_4^0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
a_5^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
a_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
a_7^0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

FIG. 4. — Arbre linéaire.

Remarque. Il n'est peut-être pas inutile de dire que la valeur d'un déterminant ne dépend pas de la notation choisie. Car modifier la notation des sommets ou des arêtes revient à intervertir certaines lignes entre elles ou certaines colonnes entre elles. Ce sont là des opérations qui n'altèrent pas la valeur absolue d'un déterminant, la seule qui nous intéresse ici.

Proposition VI. Le rang de la matrice A d'un réseau connexe d'ordre α_0 *est* $\alpha_0 - 1$.

En effet, si le réseau est connexe, il existe au moins un arbre, formé de $\alpha_0 - 1$ arêtes, qui relie entre eux les α_0 sommets. A cet arbre correspond un déterminant d'ordre $\alpha_0 - 1$ qui est égal à 1. Le rang de la matrice A est donc

au moins égal à $\alpha_0 - 1$. Mais, puisque chacune des colonnes de cette matrice contient deux nombres η^1_{ij} égaux à 1, la somme de toutes ses lignes est identiquement nulle. Son rang est donc bien ~~sup~~inférieur à α_0 ; il est $\alpha_0 - 1$.

§ 4. Equations et solutions.

M. Veblen a imaginé d'associer à chaque ligne de la matrice A une équation linéaire et homogène. Rappelons que la ligne de rang i de cette matrice comprend les nombres :

$$\eta^1_{i1}, \quad \eta^1_{i2}, \ldots\ldots, \quad \eta^1_{i\alpha_1}$$

Envisageons donc α_1 inconnues x_j et écrivons :

$$(1) \qquad \eta^1_{i1}\, x + \eta^1_{i2}\, x_2 + \ldots\ldots + \eta^1_{i\alpha_1}\, x_{\alpha_1} = 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$
$$(\, i = 1, 2, \ldots\ldots, \alpha_0 \,)$$

Il existe α_0 équations de la forme (1). Elles constituent un système de α_0 équations linéaires et homogènes α_1 inconnues. Nous nommerons ce système: *le système* (1).

Chaque inconnue x_j du système (1) est liée à l'arête de même indice. La valeur qu'elle peut prendre, comme d'ailleurs son coefficient, est toujours un entier réduit selon le module 2.

Lorsque $x_j = 1$, nous conviendrons de dire que l'arête a^1_j est prise tout particulièrement en considération, ou qu'elle est parcourue une fois dans n'importe quel sens. Si au contraire, $x_j = 0$ nous dirons que l'on a momentanément négligé l'arête a^1_j. Cela revient à mettre en évidence, dans une opération déterminée, les arêtes du réseau qui sont marquées d'une valeur 1, tandis que l'on fait abstraction de celles qui sont marquées d'un zéro.

Le système (1) a le rang de la matrice de ses coefficients, c'est-à-dire $\alpha_0 - 1$.

Résoudre le système (1), c'est rechercher la valeur de $\alpha_0 - 1$ de ses inconnues en fonction des autres; mieux, c'est composer un système fondamental de solutions. Dans ce but, nous allons effectuer sur les lignes et les colonnes de la matrice A certaines opérations arithmétiques que nous préciserons en indiquant une méthode de résolution.

L'on prend $\alpha_0 - 1$ lignes de la matrice A et l'on permute, cas échéant, quelques-unes de ses colonnes de façon que le déterminant d'ordre $\alpha_0 - 1$, qui comprend les $\alpha_0 - 1$ premières colonnes, soit différent de zéro. Il est d'ailleurs