Equations et solutions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **4 (1931-1934)**

Heft 2

PDF erstellt am: **15.08.2024**

au moins égal à $\alpha_0 - 1$. Mais, puisque chacune des colonnes de cette matrice contient deux nombres η^1_{ij} égaux à 1, la somme de toutes ses lignes est identiquement nulle. Son rang est donc bien ~~sup~~inférieur à α_0 ; il est $\alpha_0 - 1$.

§ 4. Equations et solutions.

M. Veblen a imaginé d'associer à chaque ligne de la matrice A une équation linéaire et homogène. Rappelons que la ligne de rang i de cette matrice comprend les nombres :

$$\eta^1_{i1}\,,\quad \eta^1_{i2}\,,\;\ldots\ldots,\; \eta^1_{i\alpha_1}$$

Envisageons donc α_1 inconnues x_j et écrivons :

(1) $$\eta^1_{i1}\,x + \eta^1_{i2}\,x_2 + \ldots\ldots + \eta^1_{i\alpha_1}\,x_{\alpha_1} = 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$
$$(\,i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\ldots\,,\,\alpha_0\,)$$

Il existe α_0 équations de la forme (1). Elles constituent un système de α_0 équations linéaires et homogènes α_1 inconnues. Nous nommerons ce système: *le système* (1).

Chaque inconnue x_j du système (1) est liée à l'arête de même indice. La valeur qu'elle peut prendre, comme d'ailleurs son coefficient, est toujours un entier réduit selon le module 2.

Lorsque $x_j = 1$, nous conviendrons de dire que l'arête a^1_j est prise tout particulièrement en considération, ou qu'elle est parcourue une fois dans n'importe quel sens. Si au contraire, $x_j = 0$ nous dirons que l'on a momentanément négligé l'arête a^1_j. Cela revient à mettre en évidence, dans une opération déterminée, les arêtes du réseau qui sont marquées d'une valeur 1, tandis que l'on fait abstraction de celles qui sont marquées d'un zéro.

Le système (1) a le rang de la matrice de ses coefficients, c'est-à-dire $\alpha_0 - 1$.

Résoudre le système (1), c'est rechercher la valeur de $\alpha_0 - 1$ de ses inconnues en fonction des autres; mieux, c'est composer un système fondamental de solutions. Dans ce but, nous allons effectuer sur les lignes et les colonnes de la matrice A certaines opérations arithmétiques que nous préciserons en indiquant une méthode de résolution.

L'on prend $\alpha_0 - 1$ lignes de la matrice A et l'on permute, cas échéant, quelques-unes de ses colonnes de façon que le déterminant d'ordre $\alpha_0 - 1$, qui comprend les $\alpha_0 - 1$ premières colonnes, soit différent de zéro. Il est d'ailleurs toujours permis de supposer que la notation des arêtes a été choisie de telle manière que ces permutations ne soient pas nécessaires. Désignons par Δ ce déterminant.

Par des combinaisons linéaires de lignes, on peut remplacer le déterminant Δ par un autre Δ' dans lequel les seuls termes qui ne sont pas nuls, se trouvent placés le long de sa diagonale principale. Ce but est toujours accessible, puisque chaque colonne du déterminant Δ renferme un ou au maximum deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1.

Si maintenant, l'on écrit une équation linéaire et homogène avec chacune des lignes de la matrice ainsi transformée, on obtient un système d'équations (2) qui est équivalent au système (1). Mais dans le système (2), on trouve immédiatement la valeur des $\alpha_0 - 1$ premières inconnues en fonction des inconnues restantes. Celles-ci sont d'ailleurs au nombre de $\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$. En particulier, on obtient une solution du système (2), partant du système (1), en attribuant à l'inconnue x_r ($\alpha_0 \leqslant r \leqslant \alpha_1$) la valeur 1 , tandis que l'on pose

$$x_s = 0 \quad (s = \alpha_0 , \alpha_0 + 1 , \ldots , r - 1 , r + 1 , \ldots , \alpha_1) .$$

Ce procédé permet de déduire μ solutions, en nombres zéro et un, du système (1), qui diffèrent toutes entre elles au moins par la valeur de l'inconnue x_r . Ces solutions sont linéairement indépendantes. Et comme toutes les autres solutions du système (1) peuvent s'obtenir à l'aide de celles-ci par des combinaisons linéaires, il s'en suit que le système de ces solutions est un *système fondamental de solutions du système* (1).

Si l'on dispose des valeurs de ces solutions dans un tableau rectangulaire de α_1 lignes et de μ colonnes, on forme une matrice de solutions que, par analogie avec ce qui est dit ci-dessus, nous nommerons *matrice fondamentale de solutions*. Chaque ligne d'une matrice de solutions correspond à une inconnue x_j et chaque colonne à une solution.

Pour un système d'équations (1) déterminé, il n'existe pas seulement une matrice fondamentale de solutions. Au contraire, tout ensemble de μ solutions linéairement indépendantes forme un système fondamental et donne lieu à une matrice fondamentale. Celle que nous avons obtenue plus haut se distingue des autres par le fait que le déterminant d'ordre μ qui est constitué par ses μ colonnes et ses μ dernières lignes ne présente des termes différents de zéro que suivant sa diagonale principale. C'est là une conséquence du procédé de résolution adopté.

Si l'on désire obtenir l'ensemble des solutions du système (1), on doit envisager toutes les combinaisons possibles de ces μ solutions entre elles (0 à 0 , 1 à 1 , ... , μ à μ) . Le total de ces solutions est ainsi la somme des coefficients du binome, soit 2^{μ} . C'est donc un nombre fini.

On aurait pu choisir d'autres méthodes de résolution du système (1), et parvenir différemment à l'établissement d'un système fondamental de solutions. Nous avons envisagé celle qui précède parce qu'elle conduit à une interprétation géométrique simple de ses résultats.

En effet, au déterminant Δ qui est égal à 1, correspond un arbre linéaire. Cet arbre comprend les arêtes a_1^1, a_2^1, ..., $a_{\alpha 0-1}^1$ qui relient entre eux les α_0 sommets du réseau. Si l'on associe à cet arbre n'importe laquelle des autres arêtes, on le transforme en un contour bouclé, lequel renferme un contour fermé unique. Or c'est précisément ce que l'on fait lorsqu'on considère la solution particulière $x_r = 1$. Mais nous allons voir que du même coup, tous les embranchements arborescents disparaissent pour ne plus laisser subsister que le contour fermé.

Remarquons tout d'abord qu'un contour bouclé présente nécessairement un sommet libre. Soit a_h^0 ce sommet, par lequel ne passe qu'une arête du contour bouclé. Désignons cette arête par a_m^1. La solution considérée satisfait à toutes les équations du système (1), donc en particulier à l'équation de rang m . Mais dans celle-ci, seule la valeur x_m serait égale à 1. Les autres quantités x_j sont nulles puisqu'elles correspondent à des arêtes qui ne font pas partie du contour bouclé. Cette équation ne serait donc pas satisfaite. Pour qu'elle le soit, il est nécessaire que x_m soit égale à zéro et que par suite l'arête a_m^1 qui aboutit au sommet libre a_h^0 du contour bouclé disparaisse.

Cette amputation se poursuit tant qu'il existe un sommet libre au contour bouclé. Il ne subsiste plus finalement qu'un contour fermé. L'inconnue x_j correspondant à chacune des arêtes de ce contour est marquée d'un 1, tandis que toutes les autres inconnues sont nulles. Dans l'équation de rang i du système (1), les x_j seront toutes nulles si le sommet a_i^0

n'appartient pas au contour fermé; l'équation sera donc identiquement satisfaite. Si, au contraire, a_i^0 est un sommet de ce contour, deux x_j et deux seulement prendront la valeur 1, les autres étant nulles. L'équation sera satisfaite (mod. 2).

Ces considérations conduisent aux propositions suivantes :

Proposition VII. A chaque solution du système fondamental que nous avons obtenu plus haut correspond un contour fermé unique.

Proposition VIII. Réciproquement à tout contour fermé correspond une solution du système (1) , (en nombres zéro et un).

Les μ solutions d'un système fondamental étant linéairement indépendantes, nous conviendrons de dire que les μ *contours fermés correspondants sont linéairement indépendants.* On peut ainsi parler indifféremment de la solution ou du contour qui lui correspond.

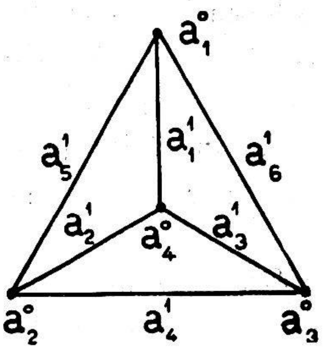
Il est parfois possible d'envisager simultanément sur un réseau deux (ou plusieurs) contours fermés distincts. A chacun d'eux correspond une solution du système (1). Il en sera de même de leur ensemble, d'où la proposition :

Proposition IX. A toute solution du système (1), *correspond un ou plusieurs contours fermés.*

Ajoutons encore que deux contours fermés qui correspondent à une même solution ne peuvent avoir une arête commune. Si en effet c'était le cas, l'inconnue x_j correspondant à cette arête prendrait la valeur 1 pour l'un et pour l'autre des deux contours, soit en tout deux fois. Mais comme 2 est congru à zéro (mod. 2), x_j doit s'annuler. De la sorte l'arête a_j^1 ne peut faire partie à la fois de deux contours fermés correspondant à une même solution.

Remarque. Pour que μ solutions constituent un système fondamental de solutions du système (1), il n'est pas nécessaire qu'à chacune d'elles corresponde un contour fermé unique; il suffit qu'elles soient linéairement indépendantes. Mais ce qui précède montre que l'on peut dans chaque cas former un système fondamental avec μ solutions telles que chacune d'elles corresponde à un seul contour fermé.

Nous appliquerons ces considérations au cas du tétraèdre : $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 6$.



$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 & a^1_5 & a^1_6 \\
a^0_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
a^0_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
a^0_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
a^0_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

FIG. 5. — Le Tétraèdre.

On en déduit le système (1) :

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 + \qquad\qquad\quad + x_5 + x_6 &= 0 \\ x_2 + \quad + x_4 + x_5 \quad\; &= 0 \\ x_3 + x_4 + \quad + x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{mod. } 2)
$$

et par suite :

$$
\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \qquad\quad x_5 + x_6 \\ x_2 &= x_4 + x_5 \\ x_3 &= x_4 + \quad + x_6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{mod. } 2)
$$

L'ensemble des solutions du système (1) est contenu dans le tableau :

								3
					2	3	3	2
	0	1	2	3	1	1	2	1
x_1	0	0	1	1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0	0	1	1	0
x_3	0	1	0	1	1	0	1	0
x_4	0	1	0	0	1	1	0	1
x_5	0	0	1	0	1	0	1	1
x_6	0	0	0	1	0	1	1	1

§ 5. **Configurations superficielles.**

Nous avons étudié jusqu'ici quelques propriétés des réseaux envisagés comme systèmes de lignes, indépendamment des surfaces sur lesquelles ils peuvent être tracés. La nature de la surface toutefois qui supporte un réseau ne saurait demeurer indifférente aux propriétés de ce dernier. Car tel réseau que l'on rencontre sur une surface d'un certain genre,