

Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 4 (1931-1934)
Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs
Autor: Chuard, Jules
Kapitel: 5: Configurations superficielles
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-250698>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 27.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

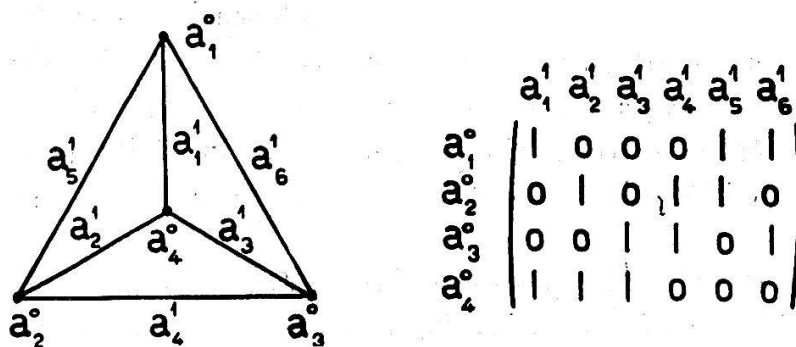


FIG. 5. — Le Tétraèdre.

On en déduit le système (1) :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l}
 x_1 + + + x_5 + x_6 = 0 \\
 + x_2 + + x_4 + x_5 = 0 \\
 + + x_3 + x_4 + + x_6 = 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 = 0
 \end{array} \right. \pmod{2}$$

et par suite :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = x_5 + x_6 \\
 x_2 = x_4 + x_5 \\
 x_3 = x_4 + x_6
 \end{array} \right. \pmod{2}$$

L'ensemble des solutions du système (1) est contenu dans le tableau :

					2	3	3	2
	0	1	2	3	1	1	2	1
x_1	0	0	1	1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0	0	1	1	0
x_3	0	1	0	1	1	0	1	0
x_4	0	1	0	0	1	1	0	1
x_5	0	0	1	0	1	0	1	1
x_6	0	0	0	1	0	1	1	1

§ 5. Configurations superficielles.

Nous avons étudié jusqu'ici quelques propriétés des réseaux envisagés comme systèmes de lignes, indépendamment des surfaces sur lesquelles ils peuvent être tracés. La nature de la surface toutefois qui supporte un réseau ne saurait demeurer indifférente aux propriétés de ce dernier. Car tel réseau que l'on rencontre sur une surface d'un certain genre,

ne se retrouve pas sur une surface d'un autre genre. Il y a donc un intérêt évident à étudier les propriétés d'un réseau en rapport avec celles de la surface qui le supporte. C'est une telle étude que nous allons aborder dans les pages suivantes.

Sans restreindre la généralité du sujet, on peut faire quelques conventions qui sont de nature à préciser les formes avec lesquelles on désire travailler.

Un réseau tracé sur une surface la subdivise en un certain nombre de régions que nous désignerons indifféremment sous le nom de *faces* ou de *pays*. La surface ainsi subdivisée prend le nom de *polyèdre* ou celui de *carte*.

Dans la suite, nous admettrons que :

1° *Les surfaces considérées dans cette étude sont des surfaces fermées bilatères qui ne présentent pas de lignes singulières.*

2° *Une face est toujours simplement connexe. Elle est limitée par un contour fermé unique.* Nous dirons que ce contour fait partie de la face qu'il limite, mais que ses points sont *extérieurs* à la face, par opposition aux autres points de celle-ci, qui sont dits: *points intérieurs*.

Il résulte de la façon dont un polyèdre a été obtenu qu'un point intérieur d'une face n'appartient jamais à une autre face. Deux faces contiguës ont en commun les points extérieurs qui font partie d'une ou de plusieurs arêtes de leur frontière.

Nous conviendrons encore de dire que tout ensemble de faces telles qu'un point intérieur de l'une n'appartienne jamais à une autre face de l'ensemble, est une configuration superficielle. L'étude de ces dernières n'est guère avancée. On peut cependant l'entreprendre dans le même esprit que celle des configurations linéaires. C'est ce que nous avons fait dans un travail déjà cité: Questions d'Analysis situs. Rappelons-en les fondements.

Considérons tout d'abord une face isolément. Sa frontière comprend un certain nombre d'arêtes. Chacune de celles-ci n'appartient pour l'instant qu'à une face. Nous dirons que ces arêtes sont de degré 1 ou aussi que ce sont des *arêtes libres*.

Soient maintenant deux faces soudées entre elles le long d'une arête commune. Cette arête appartient à la fois aux deux faces. C'est une *arête de liaison*; elle est de degré 2.

Toutes les autres arêtes de la frontière de l'une ou de l'autre des deux faces sont demeurées des arêtes libres.

On peut concevoir des configurations superficielles dans lesquelles une arête sert de liaison à un nombre de faces supérieur à deux. On y est conduit tout naturellement lorsque l'on étudie les exemples cités par Poincaré dans ses Compléments à l'Analysis Situs, et que l'on cherche à illustrer géométriquement les coefficients de torsion d'une variété d'un espace à quatre (ou plus) dimensions. Mais cette disposition ne se présente pas avec des faces d'un polyèdre de l'espace usuel. Nous n'aurons donc pas l'occasion de l'envisager dans cette étude.

Il sera ainsi entendu que, quoiqu'il existe des arêtes de liaison d'un degré supérieur, nous n'étudierons ici que des configurations superficielles dont les arêtes de liaison sont de degré 2.

Ajoutons encore qu'une configuration superficielle est dite connexe si, étant données deux faces quelconques de la configuration, il existe un certain nombre de faces et d'arêtes de liaison telles, que l'on puisse, en se déplaçant sur ces faces et en traversant ces arêtes, tracer sur la configuration une ligne continue qui relie un point intérieur de la première face à un point intérieur de la seconde.

Ainsi la connexion d'une configuration superficielle est différente de celle d'un réseau. Par exemple, un réseau peut être connexe sans que la configuration superficielle à laquelle il sert de frontière le soit. C'est ce que nous montrons dans la fig. 6 : la configuration superficielle comprend deux faces et quatre arêtes; elle n'est pas connexe. Par contre le réseau, formé de quatre arêtes et deux sommets, est connexe.

Nous nous proposons maintenant de définir quelques types de configurations superficielles connexes.

a) *Chaîne fermée.* Une chaîne fermée est un ensemble de faces tel que chacune d'elles soit contiguë à deux faces de l'ensemble et à deux seulement.

Imaginons qu'une chaîne fermée se compose de n faces. Ces faces sont soudées les unes aux autres le long de n arêtes de liaison. Les autres arêtes de leurs frontières sont des arêtes libres. Elles constituent entre elles deux contours fermés.

ou un seul!

Dans les six figures 7 à 12, les arêtes de liaison sont marquées en traits renforcés.

b) *Nœud superficiel.* Nous réservons ce nom à une chaîne fermée dont toutes les arêtes de liaison convergent en un même sommet.

La frontière d'un nœud superficiel ne comprend qu'un contour fermé.

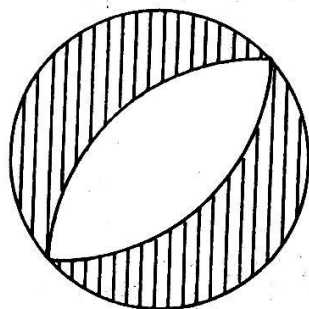


FIG. 6.
Configuration superficielle non connexe.

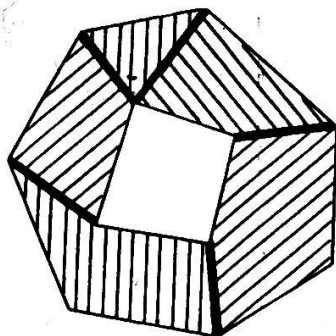


FIG. 7.
Chaîne fermée.

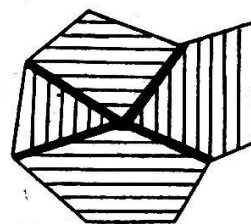


FIG. 8.
Nœud superficiel.

c) *Chaîne ouverte.* Si d'une chaîne fermée ou d'un nœud superficiel, on supprime une ou plusieurs faces en connexion, on forme une chaîne ouverte.

On constate que la suppression de la première face transforme deux arêtes de liaison en arêtes libres et que la disparition de chaque face subséquente entraîne celle d'une arête de liaison. Il y a donc dans une chaîne ouverte une arête de liaison de moins qu'elle ne comprend de faces. De plus, la frontière d'une chaîne ouverte se compose d'un seul contour fermé.

d) *Arbre superficiel.* Un arbre superficiel est une configuration superficielle connexe qui ne renferme ni nœud superficiel, ni chaîne fermée.

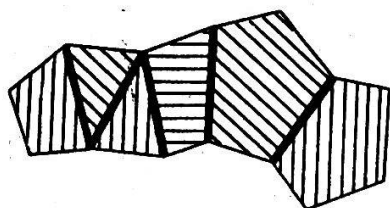


FIG. 9. — Chaîne ouverte.

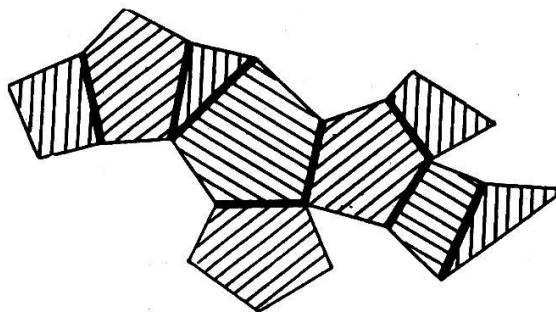


FIG. 10. — Arbre superficiel.

Si un arbre superficiel comprend n faces, celles-ci sont maintenues en connexion par $n - 1$ arêtes de liaison. Sa frontière comprend un seul contour fermé. Une chaîne ouverte est un arbre superficiel d'une forme particulière.

e) *Chaîne bouclée.* Une chaîne bouclée résulte de la composition d'une chaîne fermée et d'un ou de plusieurs arbres superficiels. Il est toutefois entendu qu'aucune nouvelle chaîne fermée ne doit naître de ces soudures.

Une chaîne bouclée possède le même nombre d'arêtes de liaison que de faces. Sa frontière comprend deux contours fermés.

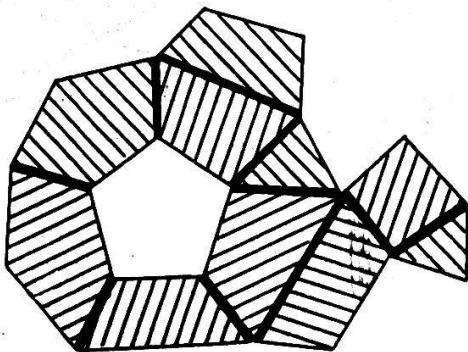


FIG. 11. — Chaîne bouclée.

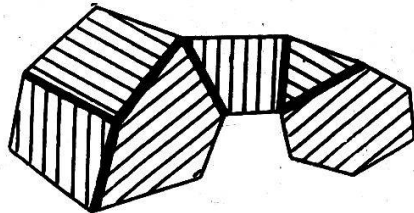


FIG. 12. — Nœud bouclé.

f) *Nœud bouclé.* La configuration superficielle précédente devient un nœud bouclé si, à la chaîne fermée on substitue un nœud superficiel.

Le nœud bouclé a les mêmes caractères qu'une chaîne bouclée, sauf qu'il est limité par un seul contour fermé.

Le but de cette étude étant le coloriage des cartes, il est naturel que nous recherchions le nombre de couleurs qui sont nécessaires pour colorier chacun des types de configurations superficielles que nous venons de définir. Considérons-les successivement :

1° *Chaîne fermée et nœud superficiel.* Le nombre des faces d'une pareille configuration peut être pair ou impair. S'il est pair, on peut assigner à chaque face un numéro 1 ou un numéro 2, et ceci de façon que toute face marquée 1 soit contiguë à deux faces marquées 2, et inversement. Les faces de même indice n'étant pas contiguës, le coloriage est possible à l'aide de deux couleurs. (Exemple, fig. 8.)

Si le nombre des faces est impair, il est possible d'opérer comme ci-dessus, sauf pour une face qui se trouve contiguë

à la fois à une face marquée 1 et à une face marquée 2. Une troisième couleur est donc nécessaire pour colorier cette face. (Exemple, fig. 7.)

2° *Chaîne ouverte et arbre superficiel.* Dans un arbre superficiel, on peut noter d'un indice 1 une face quelconque. Toutes les faces qui lui sont contiguës seront marquées d'un indice 2 ; puis on reprendra l'indice 1 pour toutes les faces qui sont contiguës aux faces marquées 2, etc. Cette opération peut se poursuivre jusqu'à épuisement des faces, car l'arbre superficiel ne contient aucune chaîne fermée, de sorte que l'on ne revient jamais au point de départ. Deux couleurs suffisent donc à assurer le coloriage soit d'un arbre superficiel, soit d'une chaîne ouverte. (Exemples, fig. 9 et 10.)

3° *Chaîne bouclée et nœud bouclé.* On commence par colorier les faces de la chaîne fermée ou du nœud superficiel, puis on s'attaque à celles des arbres superficiels qui lui sont soudés. Cette dernière opération n'offre aucune particularité. Seul le nombre des faces de la chaîne fermée est important. Suivant qu'il est pair ou impair, il faudra utiliser deux ou trois couleurs. (Exemples, fig. 11 et 12.)

En résumé, l'on peut dire que deux couleurs sont suffisantes pour colorier les faces de l'un ou de l'autre des types de configurations superficielles que nous venons de définir, sauf lorsque la dite configuration renferme une chaîne fermée ou un nœud superficiel d'un nombre impair de faces, cas qui nécessite l'emploi de trois couleurs. Il est important de bien constater que les embranchements arborescents, quel que soit leur nombre ou leur étendue, ne compliquent en aucune façon le problème du coloriage.

§ 6. La matrice B.

Nous considérons un polyèdre quelconque de l'espace usuel, qui satisfait aux conditions énoncées plus haut. Soient α_1 et α_2 les nombres respectifs de ses arêtes et de ses faces. De la même façon que l'on a établi la matrice A d'un réseau, on peut définir une nouvelle matrice, *la matrice B* de ce polyèdre. L'on introduit à ce propos un nombre η_{jk}^2 qui est égal à 1 si l'arête a_j^1 fait partie de la face a_k^2 , sinon le nombre η_{jk}^2 est nul. L'on dispose ces nombres η_{jk}^2 en un tableau rectangulaire de α_1 lignes de α_2 colonnes, de telle façon que la ligne de rang