

**Zeitschrift:** Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 4 (1931-1934)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs  
**Kapitel:** Réseaux cubiques tracés sur une sphère  
**Autor:** Chuard, Jules  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-250698>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### § 7. Réseaux cubiques tracés sur une sphère.

Les propositions que nous venons d'établir sont très générales. Elles s'adaptent à des réseaux dont il n'était pas nécessaire de préciser la forme. Il est cependant particulièrement intéressant, pour le but que nous visons, de les appliquer à des réseaux cubiques tracés sur une sphère. C'est ce que nous allons examiner.

Il n'est pas inutile de rappeler que si un réseau cubique comprend  $\alpha_0$  sommets et  $\alpha_1$  arêtes, ces nombres sont liés entre eux par les égalités suivantes :

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_0}{3} = \alpha_1 - \alpha_0$$

Si de plus, ce réseau est tracé sur une sphère qu'il transforme en un polyèdre comprenant encore  $\alpha_2$  faces simplement connexes, le théorème d'Euler permet d'écrire :

$$\alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \mu$$

Considérons un tel polyèdre et imaginons que l'on ait établi les deux matrices A et B, en correspondance, la première avec ses sommets et ses arêtes, la seconde avec ses arêtes et ses faces. De la matrice A on déduit le système d'équations linéaires et homogènes (1), dont on forme un système fondamental de solutions à l'aide de  $\mu$  colonnes de la matrice B. Il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de la forme du système (1), puisque l'on dispose d'emblée de ses solutions.

Cependant ici, une remarque s'impose. Suivant une méthode propre à l'Analysis situs, on sait que l'on peut procéder à l'extension de l'une des faces du polyèdre considéré, n'importe laquelle, tout en rétrécissant au besoin les autres, et ceci de telle façon qu'elles viennent s'appliquer sur la face étirée. Cette dernière seule est ainsi masquée, les autres demeurent toutes visibles. Or lorsque l'on décrit le système fondamental de solutions, on peut précisément négliger celle des colonnes de la matrice B qui correspond à la face cachée.

Partant de ce système fondamental, on obtient l'ensemble des solutions du système (1) en combinant de toutes les manières possibles, d'abord 1 à 1, puis 2 à 2, 3 à 3, ... ses  $\mu$  colonnes. Leur nombre est égal à  $2^\mu - 1$ , si l'on fait

abstraction de la solution identiquement nulle, qui d'ailleurs ne nous intéresse pas ici. Cette méthode a justement été appliquée à l'exemple qu'illustre la figure 13. Alors  $\mu$  était égal à 6. Nous avons indiqué le tableau des  $2^6 - 1$  solutions obtenues en partant des six premières colonnes de la matrice B.

Ainsi que nous l'avons vu plus haut, à chaque solution du système (1) correspond un contour fermé ou un ensemble de contours fermés. Cette propriété entraîne, dans le cas des réseaux cubiques, une proposition intéressante :

*Deux contours fermés correspondant à la même solution du système (1) ne peuvent pas se rencontrer.*

La rencontre ne serait possible en un sommet du réseau que si par celui-ci passaient quatre arêtes, car la même arête ne peut appartenir à deux contours fermés distincts. Si en effet, cette dernière éventualité se présentait pour l'arête  $a_m^1$  la quantité  $x_m$  serait égale à  $2 \equiv 0 \pmod{2}$ , d'où l'on conclurait que cette arête n'appartient à aucun des deux contours.

D'autre part, les réseaux que nous considérons ne renferment aucun isthme. En vertu du théorème de Petersen, ils sont réductibles en un réseau quadratique et un réseau linéaire. Mais un réseau quadratique est représenté par un ou plusieurs contours fermés. Il correspond donc à une solution du système (1). Et comme un tel réseau comprend un nombre égal d'arêtes et de sommets, soit  $\alpha_0$ , la solution correspondante comprendra  $\alpha_0$  valeurs des  $x_j$  égales à 1, les  $\alpha_1 - \alpha_0$  valeurs qui restent étant nulles. Il s'en suit la proposition :

*A chaque réseau quadratique contenu dans le réseau cubique considéré correspond une solution du système (1) qui comprend  $\alpha_0$  valeurs des  $x_j$  égales à 1.*

Grâce au théorème de Petersen, nous savons que de pareilles solutions existent. Remarquons en passant que ce sont celles qui possèdent un nombre maximum de valeurs  $x_j$  égales à 1, ceci en vertu du fait que le polyèdre renferme  $\alpha_0$  sommets et de la propriété des réseaux quadratiques que nous venons de rappeler. De plus, le nombre total des solutions du système (1) étant égal à  $2^\mu - 1$ , il n'y a qu'à prélever dans cet ensemble les solutions qui sont marquées de  $\alpha_0$  quantités  $x_j$  égales à 1, pour obtenir tous les réseaux quadratiques qui sont contenus dans le réseau cubique envi-

sagé. On a ainsi un moyen de déceler toutes les réductions possibles, d'où la proposition :

*Le nombre des réductions d'un réseau cubique donné est égal au nombre de solutions du système (1) qui comprennent  $\alpha_0$  valeurs  $x_j$  égales à 1.*

Une question vient ici tout naturellement à l'esprit :

*Le nombre  $\mu$  étant donné, quel est le nombre des réductions que comporte le réseau cubique considéré?*

Il n'apparaît pas que la réponse en soit aisée. Son importance, pour la suite de nos déductions, n'étant pas essentielle, nous ne nous y attarderons guère. Nous nous bornerons simplement à constater que, sous cette forme, la question manque de précision. Il existe un général plusieurs polyèdres dont le nombre des faces est le même, mais qui se distinguent les uns des autres par la nature de ces faces. Le nombre  $\mu$  relatif à ces polyèdres est invariable, tandis que le nombre des réductions possibles varie d'un polyèdre à l'autre.

Nous en donnerons pour preuve les quelques exemples ci-dessous qui correspondent tous au cas  $\mu = 6$ . Le dernier est celui que nous avons étudié plus haut, fig. 13. Nous avons alors, dans le tableau complet des solutions, marqué d'un \* celles qui définissent les différents réseaux quadratiques.

\* \* \*

Il est possible de classer les réseaux quadratiques qui sont issus de la réduction d'un réseau cubique, en trois types, de la façon suivante :

Nous dirons qu'un réseau quadratique est du :

*Premier type*, s'il est représenté par un contour fermé unique.

*Second type*, s'il comprend deux ou plusieurs contours fermés, chacun d'eux renfermant un nombre pair d'arêtes (ou de sommets).

*Troisième type*, s'il comprend deux ou plusieurs contours fermés, parmi lesquels il en est qui renferment un nombre impair d'arêtes.

Du moment que  $\alpha_0$  est un nombre pair, on peut ajouter de suite que, dans ce dernier cas, le nombre des contours fermés qui renferment un nombre impair d'arêtes est lui-même pair.

Dans les planches I à VI, nous avons accompagné chaque réseau quadratique d'un indice I, II ou III correspondant à son type.

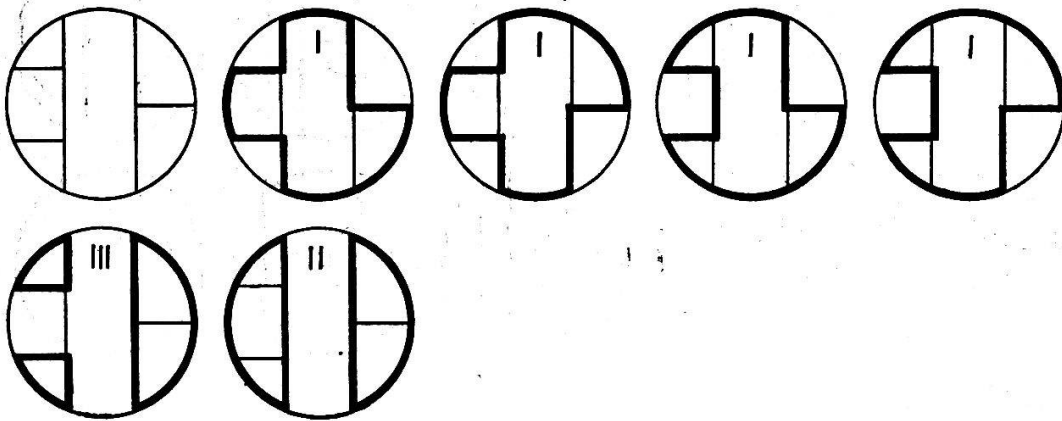


PLANCHE I. — Six réseaux quadratiques.

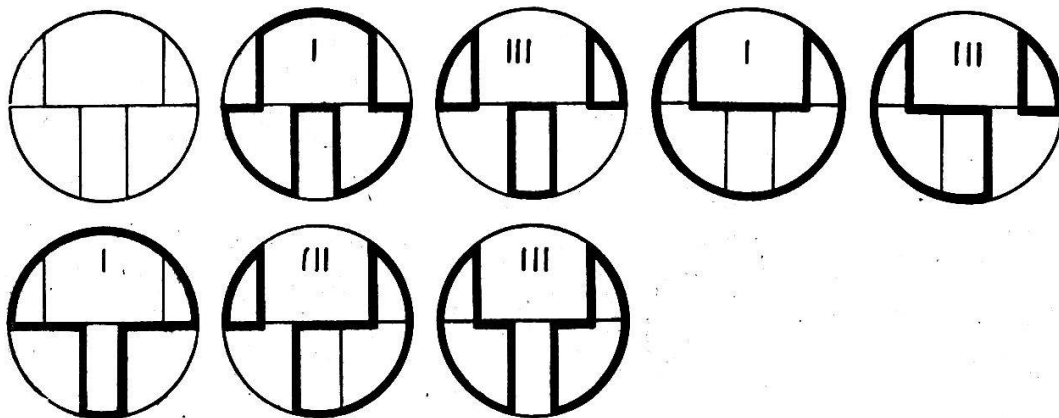


PLANCHE 2. — Sept réseaux quadratiques.

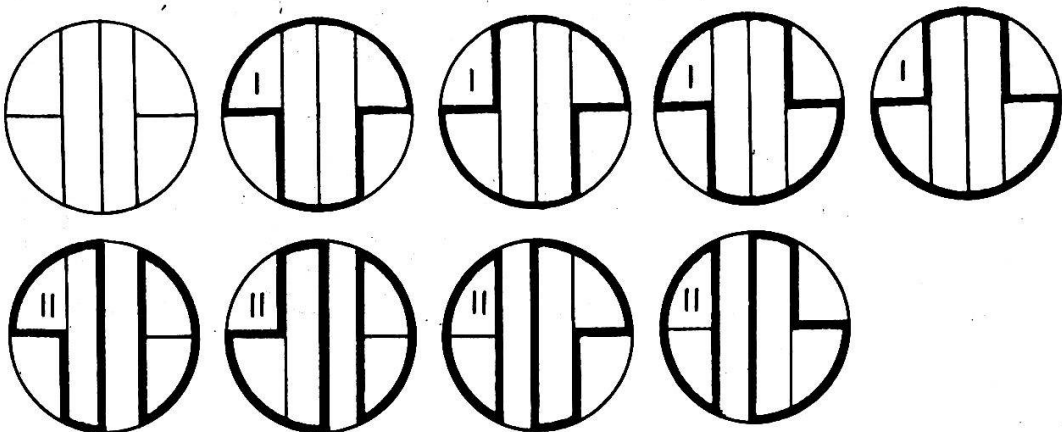


PLANCHE 3. — Huit réseaux quadratiques.

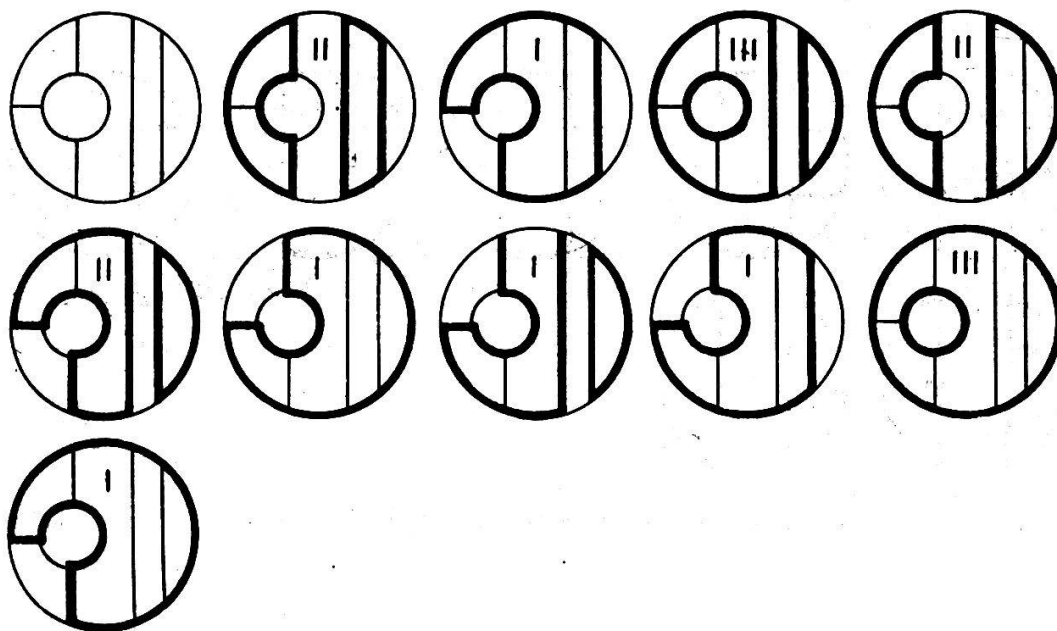


PLANCHE 4. — Neuf réseaux quadratiques.

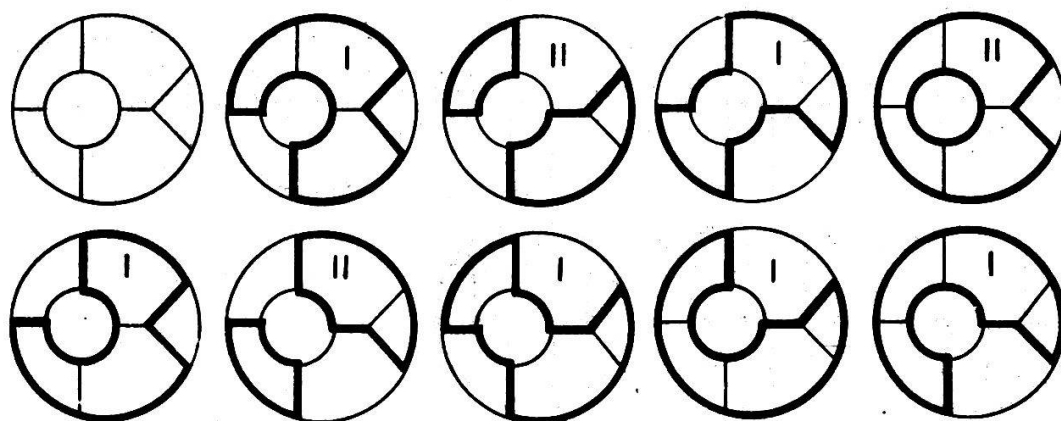


PLANCHE 5. — Dix réseaux quadratiques.

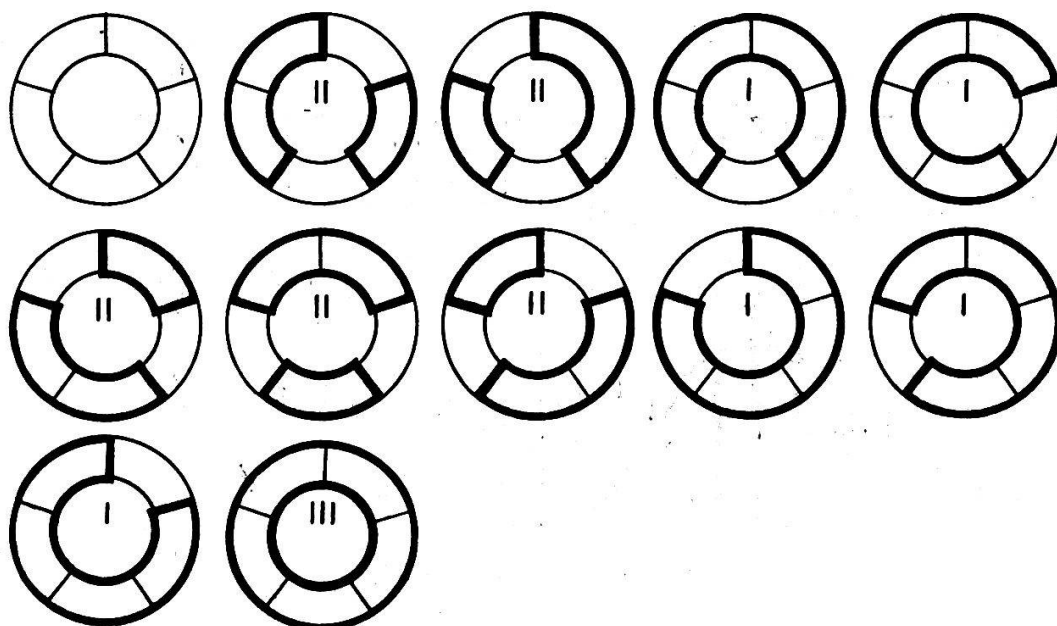


PLANCHE 6. — Onze réseaux quadratiques.

L'importance de ces types de réseaux quadratiques apparaît lorsque l'on se place au point de vue du coloriage du polyèdre. A cet effet, nous allons regarder chacun de ces réseaux comme une coupure et examiner ce qui en résulte relativement au morcellement de la sphère.

*Premier type.* La surface de la sphère, autrement dit celle du polyèdre, se trouve partagée en deux parties nettement distinctes. Ni l'une, ni l'autre de ces parties ne peut renfermer une chaîne fermée, car la présence d'une telle chaîne entraînerait l'existence d'un second contour fermé. Elles ne peuvent pas davantage contenir de nœud superficiel, puisque tous les sommets sont sur la frontière. Ce sont donc des arbres superficiels.

Ainsi un contour fermé unique qui passe par tous les sommets du réseau a pour effet de grouper les différentes faces du polyèdre en deux arbres superficiels. Et comme deux couleurs suffisent à colorier différemment les faces d'un tel arbre, quatre couleurs assureront certainement le coloriage du polyèdre dans son entier.

*Second type.* Chaque contour fermé étant regardé comme une coupure, leur ensemble morcellera la surface de la sphère en un certain nombre de régions, les unes limitant des arbres superficiels, les autres des chaînes fermées ou bouclées.

Considérons l'un de ces arbres superficiels. Sa frontière est un contour fermé qui renferme un nombre pair de sommets. Certains de ces sommets sont reliés entre eux par des arêtes de liaison des faces de l'arbre superficiel envisagé. Mais ces sommets-là sont toujours en nombre pair. Il en résulte que les sommets situés sur la frontière de cet arbre, mais qui ne font pas partie des arêtes de liaison de ses faces, sont aussi en nombre pair. Or c'est précisément par ces derniers sommets que passeront les arêtes de liaison de la chaîne fermée qui entoure le dit arbre superficiel. Il s'en suit que la chaîne fermée renfermera un nombre pair de faces.

Le même raisonnement se poursuivrait à l'égard des autres chaînes fermées, qui toutes renfermeront un nombre pair de faces.

Imaginons maintenant que l'on attribue l'indice 1 à l'une quelconque des régions que nous venons d'examiner. On attribuera l'indice 2 à toutes les régions qui sont en connexion avec la première, puis l'indice 1 à toutes celles qui sont en



connexion avec la région 2, et ainsi de suite. On est certain, de cette façon, d'épuiser toutes les régions de la sphère.

Nous savons que deux couleurs suffisent à assurer le coloriage d'un arbre superficiel ou d'une chaîne fermée, si celle-ci renferme un nombre pair de faces. C'est précisément le caractère des différentes régions que nous venons de mettre en évidence. Nous sommes donc encore en droit de conclure que quatre couleurs suffiront à assurer le coloriage de l'ensemble des faces du polyèdre.

*Troisième type.* La répartition de la surface de la sphère en régions d'indices 1 et 2 est toujours possible. Mais ici il existera des chaînes fermées comprenant un nombre impair de faces, dont le coloriage nécessitera trois couleurs. On ne pourra plus affirmer que par ce moyen on a encore le loisir de colorier les différentes faces du polyèdre avec quatre couleurs. Cela pourra avoir lieu dans certains cas particuliers, mais cela ne sera plus possible en général.

En conclusion de ce qui précède, nous dirons que la présence d'un seul réseau quadratique du premier ou du second type suffit à assurer le coloriage des différentes faces des polyèdres considérés à l'aide de quatre couleurs. Pour que cette opération soit impossible, il est nécessaire que tous les réseaux quadratiques soient du troisième type.

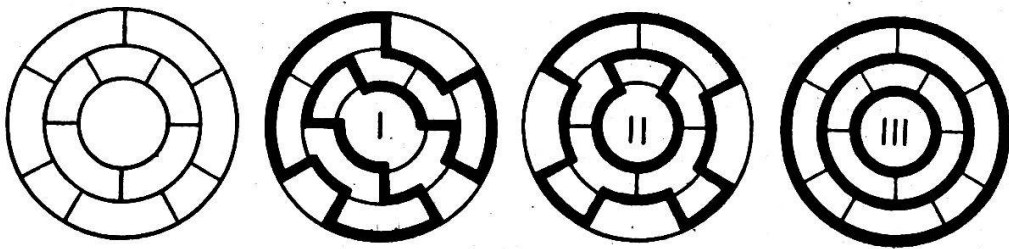


PLANCHE VII. — Exemple de M. de la Vallée-Poussin.  
Un réseau quadratique de chaque type.

La présence dans l'une quelconque des régions que nous avons affectées plus haut d'un indice 1 ou 2 d'une ou plusieurs ramifications superficielles arborescentes ne complique en aucune façon le problème du coloriage. La difficulté provient uniquement des chaînes fermées qui renferment un nombre impair de faces.



Dans l'exemple que nous donnons, planche VII, dû à M. de la Vallée-Poussin<sup>1</sup>, nous indiquons un représentant de chaque type de réseau quadratique.

§ 8. Le problème de la carte.

Une carte de forme arbitraire étant donnée sur une sphère, les propositions suivantes sont connues<sup>2</sup>:

1) *Le coloriage d'une carte se ramène à celui d'une autre carte, dont tous les sommets sont de degré trois, et dont le nombre des pays n'a pas augmenté.*

L'ensemble des arêtes frontières constitue alors un réseau cubique.

Au point de vue du coloriage, on ne restreint pas la portée du problème, dans chacun des cas suivants :

2) *Le réseau cubique considéré est connexe.* Il ne comprend donc pas des pièces séparées.

3) *Ce réseau cubique ne renferme pas de boucle.* Sinon une arête n'appartiendrait à aucune frontière.

4) *La frontière commune à deux pays voisins se compose d'une seule arête.*

C'est ainsi que nous excluons des réseaux cubiques que nous allons examiner, des particularités telles que celles qui sont représentées planche VIII.

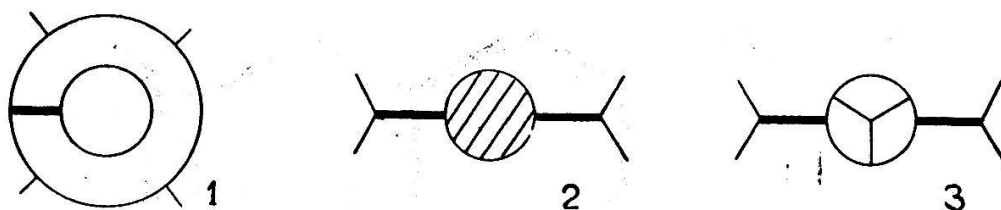


PLANCHE VIII. — Particularités qui sont exclues de nos réseaux cubiques.

Les restrictions que nous venons d'apporter aux réseaux cubiques que nous examinerons dorénavant, on ne le répétera jamais assez, ne diminuent en rien la généralité du problème du coloriage de la carte. Le réseau qui subsiste est précisément celui d'une carte minima, d'une carte normale, ou d'une carte qui appartient au cas difficile. Si par conséquent, l'on parvient à colorier cette carte minima à l'aide de qua-

<sup>1</sup> Cf. A. ERRERA : *Loc. cit.* 2, page 15.

<sup>2</sup> Cf. par exemple A. ERRERA : *Loc. cit.* page 34.