Le problème de la carte

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **4 (1931-1934)**

Heft 2

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Dans l'exemple que nous donnons, planche VII, dû à M. de la Vallée-Poussin [1], nous indiquons un représentant de chaque type de réseau quadratique.

§ 8. Le problème de la carte.

Une carte de forme arbitraire étant donnée sur une sphère, les propositions suivantes sont connues[2]:

1) *Le coloriage d'une carte se ramène à celui d'une autre carte, dont tous les sommets sont de degré trois, et dont le nombre des pays n'a pas augmenté.*

L'ensemble des arêtes frontières constitue alors un réseau cubique.

Au point de vue du coloriage, on ne restreint pas la portée du problème, dans chacun des cas suivants :

2) *Le réseau cubique considéré est connexe.* Il ne comprend donc pas des pièces séparées.

3) *Ce réseau cubique ne renferme pas de boucle.* Sinon une arête n'appartiendrait à aucune frontière.

4) *La frontière commune à deux pays voisins se compose d'une seule arête.*

C'est ainsi que nous excluons des réseaux cubiques que nous allons examiner, des particularités telles que celles qui sont représentées planche VIII.

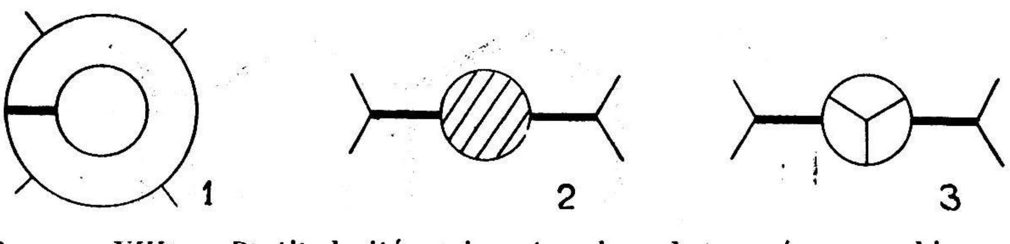

Planche VIII. — Particularités qui sont exclues de nos réseaux cubiques.

Les restrictions que nous venons d'apporter aux réseaux cubiques que nous examinerons dorénavant, on ne le répétera jamais assez, ne diminuent en rien la généralité du problème du coloriage de la carte. Le réseau qui subsiste est précisément celui d'une carte minima, d'une carte normale, ou d'une carte qui appartient au cas difficile. Si par conséquent, l'on parvient à colorier cette carte minima à l'aide de qua-

[1] Cf. A. Errera : *Loc. cit.* 2, page 15.
[2] Cf. par exemple A. Errera : *Loc. cit.* page 34.

tre couleurs, l'on sera certain, à plus forte raison, d'être à même de colorier n'importe quelle autre carte.

Dans ce but, nous nous proposons d'établir la proposition suivante, qui est fondamentale :

Dans un réseau cubique, qui satisfait aux conditions 1), 2), 3), 4), *il existe au moins un réseau quadratique du premier type.*

Cette proposition peut encore s'énoncer comme suit :

Dans un réseau cubique, qui satisfait aux conditions 1), 2), 3), 4), *il existe au moins un contour fermé unique qui passe par l'ensemble des sommets du réseau.*

Cette proposition, disons-nous, est fondamentale, car elle résout *ipso facto* le problème proposé. Nous avons vu, en effet, au § 7, que ce réseau quadratique sépare les différents pays de la carte en deux arbres superficiels distincts. Et comme le coloriage de chacun d'eux nécessite deux couleurs seulement, celui de l'ensemble est assuré avec quatre couleurs. C'est là le nœud de la question, sur lequel nous allons porter toute notre attention dans les paragraphes qui suivent.

Remarquons encore que, sur un réseau cubique remplissant les conditions requises, il peut exister plusieurs réseaux quadratiques du premier type. Nous n'avons pas à en rechercher le nombre. Il nous suffira uniquement de justifier l'existence de l'un d'entre eux.

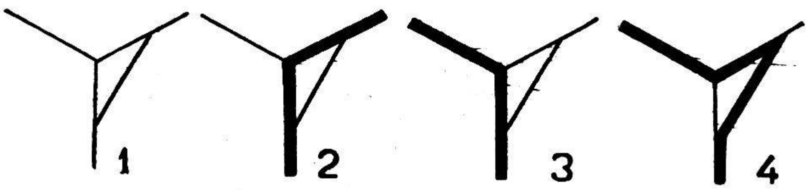

PLANCHE IX. — Comment se comporte un réseau quadratique du premier type en présence d'un triangle.

Une carte minima, dans les conditions où nous nous trouvons, ne renferme pas de pays à moins de trois côtés. Mais elle peut comprendre des triangles, des quadrilatères, des pentagones, ... La présence de pays de forme triangulaire n'est pas indispensable pour le but que nous poursuivons, savoir la justification de l'existence d'un réseau quadratique du premier type. On peut momentanément faire disparaître ces pays-là, en effaçant une des arêtes de leur frontière. Et si sur le réseau cubique ainsi amputé, il existe un réseau quadratique du premier type, cela signifie que ce dernier existait déjà sur le réseau cubique préalablement donné. C'est d'ailleurs ce que nous faisons voir par les dessins de la Planche IX.

Fig. 2. Le contour fermé passe par les trois sommets du triangle.

Fig. 3. Le contour fermé ne rencontre que deux sommets.

Fig. 4. Une petite déformation a permis d'atteindre le troisième sommet.

Nous admettrons ainsi une nouvelle restriction :

5) *Les pays d'une carte minima comprendront au moins quatre côtés.*

Certains auteurs sont encore allés plus loin dans ce domaine, puisque la carte normale de M. Errera, par exemple, ~~ne~~ comprend pas de pays de moins de cinq côtés. Nous n'avons pas jugé à propos d'adopter ces restrictions, du moment que des cartes qui renferment des quadrilatères (celle de M. de la Vallée-Poussin, par exemple) rendent impossible le coloriage par la méthode des chaînes de Kempe.

§ 9. **Arbres linéaires et superficiels.**

Nous avons vu que l'on transforme un réseau donné en un arbre linéaire par la suppression d'un certain nombre d'arêtes convenablement choisies. Lorsque le réseau comprend α_0 sommets et α_1 arêtes, le nombre des arêtes qu'il faut supprimer est égal à μ :

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

L'arbre lui-même comprend $\alpha_0 - 1$ arêtes.

On transforme par analogie un polyèdre en un arbre superficiel. Le nombre des faces du polyèdre étant α_2, ces faces sont maintenues en connexion par la présence de $\alpha_2 - 1$ arêtes de liaison. Il suffit de supprimer les autres, ou, ce qui revient au même, de les considérer comme faisant partie d'une coupure, pour que le polyèdre devienne un arbre superficiel.

Mais en vertu du théorème d'Euler, on a :

$$\mu = \alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

On a donc la possibilité de faire apparaître sur une sphère, simultanément les deux arbres: linéaire et superficiel. C'est là une propriété bien connue, que nous énoncerons comme suit :

Sur une sphère, la frontière de tout arbre superficiel com-