Une remarque sur les événements élémentaires

MÉM. SOC. VAUD. SC. NAT. 18.3, 1990

MODÈLES DYNAMIQUES EN BIOLOGIE, R. ARDITI (DIR.)
DYNAMICAL MODELS IN BIOLOGY, R. ARDITI (ED.)

Une remarque sur les événements élémentaires

PAR

JEAN-PIERRE GABRIEL [1] ET †PHILIP MILASEVIC [2]

Résumé.– GABRIEL J.-P. et MILASEVIC P., 1990. Une remarque sur les événements élémentaires. *In*: Modèles dynamiques en biologie, R. Arditi (dir.). *Mém. Soc. vaud. Sc. nat. 18.3*: 345-351.
La modélisation d'une épreuve aléatoire fait en général appel à la notion d'événement élémentaire. La construction d'un espace probabilisé pour représenter l'épreuve en question est évidente si celle-ci comporte un nombre fini de tels événements. Le cas dénombrable a été traité par HANISCH, HIRSCH et RENYI (1969). La présente note se propose d'éclairer la situation générale.

Summary.– GABRIEL J.-P. and MILASEVIC P., 1990. Elementary events and probability spaces. *In*: Dynamical Models in Biology, R. Arditi (ed.). *Mém. Soc. vaud. Sc. nat. 18.3*: 345-351.
Modelling a random experiment usually requires the notion of elementary event. The construction of a probability space representing the experiment is obvious in the case of a finite number os such events. The countable case has been treated by HANISCH, HIRSCH and RENYI (1969). The present note is a tentative discussion of the general case.

Key words: probability space, elementary event, outer measure.

[1] Institut de mathématiques, Université de Fribourg, Pérolles, CH-1700 Fribourg, Suisse.

[2] Institut de mathématiques appliquées aux sciences sociales, Université de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Suisse. Décédé accidentellement le 27 octobre 1989.

1. Introduction

Le but de cet exposé est de mettre en évidence certains aspects de l'axiomatique probabiliste qui, nous semble-t-il, permettent une meilleure compréhension de son interprétation phénoménologique. Le concept fondamental de la théorie de Kolmogorov, et sous-jacent à tout modèle probabiliste d'une expérience aléatoire, est celui d'*espace de probabilité*, ou *espace probabilisé*, consistant en un triplet formé d'un ensemble Ω, d'une σ-algèbre $\mathcal{F}$ de parties de Ω (les ensembles mesurables), et d'une mesure de probabilité P sur $\mathcal{F}$. L'introduction de ce concept peut être motivée de la manière suivante.

La structure algébrique la plus simple sur un ensemble «d'événements» permettant de parler de «réunion», «d'intersection» et de «complémentaire» d'événements est celle d'algèbre de Boole. Par le théorème de Stone (HALMOS 1974), toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre de parties d'un ensemble; il suffit donc de considérer de telles algèbres. Par le théorème d'extension de Carathéodory (LOÈVE 1977), on sait que toute probabilité (continue) sur une algèbre de parties $\mathcal{A}$ possède une extension unique à la σ-algèbre de parties engendrée par $\mathcal{A}$. On obtient ainsi de manière «naturelle» une structure d'espace probabilisé. Phénoménologiquement, les éléments de $\mathcal{F}$ sont des *événements* et les points de Ω les *événements élémentaires* ou les *résultats* (indécomposables) de l'expérience.

Il est toutefois possible de se passer d'ensembles et de modéliser la notion d'événement à l'aide de σ-algèbres de Boole (KAPPOS 1969). Bien que cette approche semble plus générale en vertu du théorème de Loomis (HALMOS 1974), elle s'avère, du point de vue mathématique, équivalente à l'approche ensembliste (KAPPOS 1969; SIKORSKI 1969).

Une question reste cependant en suspens: comment construit-on un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour représenter une expérience aléatoire? Un chemin possible et naturel consiste à partir des événements élémentaires qui deviendront les points de l'ensemble Ω. Le choix de la σ-algèbre sera plus ou moins délicat selon la cardinalité de Ω, mais dans tous les cas la cohérence de cette approche exige de pouvoir interpréter les singletons de Ω comme événements, ce qui équivaut dans ce contexte à demander que $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le modèle de Kolmogorov ne précisant pas cette exigence, la question se pose de savoir s'il est plus général que le modèle obtenu à partir des événements élémentaires. Une réponse à cette question nous paraît importante pour la cohérence de l'approche ensembliste. Dans le cas d'une réponse positive, il nous faudrait interpréter le surplus de généralité du modèle de Kolmogorov, alors que dans le cas d'une réponse négative, la construction par les événements élémentaires nous permettrait d'atteindre le même niveau de généralité. Nous allons voir ci-dessous que ceci est effectivement le cas.

2. Modèles isomorphes

Dans ce qui suit nous appellerons *modèle* un espace de probabilité et nous dirons qu'un tel modèle est *complètement atomique* si tous les points de l'ensemble, en tant que singletons, se trouvent dans la σ-algèbre.

DÉFINITIONS. Nous dirons que deux modèles $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ sont
– *isomorphes*, s'il existe un isomorphisme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tel que $P'(\phi(A)) = P(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}$,
– *essentiellement isomorphes*, s'il existe une sous-σ-algèbre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ et une sous-σ-algèbre $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$ telles que $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{G}', P')$ sont isomorphes et telles que pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $A' \in \mathcal{F}'$, il existe $B \in \mathcal{G}$ et $B' \in \mathcal{G}'$ t.q. $P(A \triangle B) = P'(A' \triangle B') = 0$.

Intuitivement, deux modèles sont isomorphes (essentiellement isomorphes) s'ils peuvent modéliser la même expérience aléatoire (à des événements de probabilité nulle près).

Etant donnés un ensemble Ω et une σ-algèbre $\mathcal{F}$ de parties de Ω, considérons, pour $\omega \in \Omega$, le sous-ensemble de Ω

$$A_\omega = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\omega} F \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_\omega = \{F \in \mathcal{F} | \omega \in F\} .$$

Remarquons que $A_\omega \in \mathcal{F}$ si et seulement si ω appartient à un atome de $\mathcal{F}$, A_ω étant alors l'atome en question. On vérifie facilement que ces sous-ensembles satisfont les propriétés suivantes

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \in A_{\omega'} \iff A_\omega = A_{\omega'} , \tag{1}$$

$$\forall \omega \in \Omega, \forall F \in \mathcal{F}, F \cap A_\omega \neq \emptyset \Longrightarrow A_\omega \subset F . \tag{2}$$

Considérons maintenant la relation d'équivalence sur $\Omega \times \Omega$ définie par

$$\omega \sim \omega' \iff \omega' \in A_\omega .$$

Il découle de la propriété (1) que cette relation est bien définie et que la classe d'équivalence de $\omega \in \Omega$ est donnée par $\omega^* = A_\omega$.

Désignons par Ω^* l'ensemble de ces classes et par $\mathcal{F}^*$ la σ-algèbre de parties de Ω^* donnée par $\{\{\omega^* | \omega \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Les σ-algèbres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ sont isomorphes par l'application

$$F \mapsto F^* := \{\omega^* \mid \omega \in F\}$$

et si, étant donnée une probabilité P sur $\mathcal{F}$, on définit la probabilité P^* sur $\mathcal{F}^*$ par $P^*(F^*) = P(F)$, les modèles $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ sont isomorphes. Notons que $\omega^* \in \mathcal{F}^*$ si et seulement si $A_\omega \in \mathcal{F}$.

3. Le cas dénombrable

Si Ω est dénombrable, les sous-ensembles A_ω sont tous mesurables (Hanisch *et al.* 1969). Il suit alors de la définition de ces ensembles que ce sont des atomes de $\mathcal{F}$ (si $B \in \mathcal{F}$ est contenu dans A_ω alors $B = \emptyset$ ou $B = A_\omega$) à l'aide desquels on peut, par des réunions dénombrables, obtenir tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Phénoménologiquement, on peut donc interpréter les A_ω comme événements élémentaires au sens propre du terme: ils sont indécomposables et permettent par des opérations ensemblistes de constituer tous les événements.

Remarquons par ailleurs que ces atomes deviennent des points (singletons) dans le modèle isomorphe construit au paragraphe 2. Tout modèle dont l'ensemble sous-jacent est dénombrable est donc isomorphe à un modèle complètement atomique.

4. Le cas non dénombrable

Considérons un modèle $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dans le cas où Ω et $\mathcal{F}$ ne sont pas dénombrables les choses ne sont pas aussi simples que ci-dessus. La difficulté provient du fait que les ensembles A_ω ne sont en général pas tous mesurables. Ce fait est illustré par l'exemple suivant.

Soient Ω le plan euclidien et $\mathcal{F}$ la σ-algèbre de parties de Ω engendrée par tous les cercles C_r centrés à l'origine de rayon $r \geq 1$. Alors $A_\omega = C_{\|\omega\|} \in \mathcal{F}$ pour tout ω de norme $\|\omega\| \geq 1$, mais pour tout ω de norme < 1, A_ω est le disque unité ouvert, qui ne se trouve pas dans $\mathcal{F}$.

Une modification de la stratégie adoptée dans le cas dénombrable est donc nécessaire pour traiter le cas général.

Définition. Nous appellerons *îlot* tout ensemble A_ω non mesurable.

Remarquons que si $\mathcal{F}$ est dénombrable il n'existe pas d'îlots.

Nous allons maintenant construire un nouveau modèle tenant compte de l'éventuelle présence d'îlots. Remarquons que si la structure d'intérêt consistait seulement en $(\Omega, \mathcal{F})$, il suffirait de considérer la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$ et les singletons. En incluant P dans le modèle, la question devient plus délicate.

Une possibilité serait de considérer la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$ et tous les îlots et d'étendre P à cette σ-algèbre. Cette approche semble toutefois présenter des difficultés techniques sérieuses et n'apparaît de plus pas très naturelle: les îlots ne peuvent pas être considérés comme des événements puisqu'ils ne sont pas mesurables, et envisager une structure leur conférant à tous un statut d'événement pourrait nous éloigner du modèle original, ce qui n'est évidemment pas souhaitable. Nous allons donc procéder d'une autre manière.

Désignons par P_0 la *mesure extérieure* (définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$) associée à P (LOÈVE 1977), et qualifions de *C-mesurable* un sous-ensemble A de Ω mesurable au sens de Carathéodory, c.à.d. tel que, pour tout $B \subseteq \Omega$,

$$P_0(B) = P_0(A \cap B) + P_0(A^c \cap B).$$

Les notions de mesure extérieure et d'ensemble C-mesurable jouent un rôle central dans le théorème d'extension de Carathéodory (LOÈVE 1977).

Nous avons maintenant les résultats suivants, dont les preuves figurent dans le paragraphe 5.

LEMME 1. *Il y a au plus un ensemble dénombrable de $\omega \in \Omega$ t.q. $P_0(A_\omega) > 0$.*

LEMME 2. *Une réunion dénombrable d'îlots n'est jamais mesurable.*

Le lemme suivant met en évidence la relation entre les îlots et les ensembles C-mesurables.

LEMME 3. *Pour tout îlot A_ω, $P_0(A_\omega) = 0 \iff A_\omega$ est C–mesurable.*

Si maintenant on définit le modèle $(\Omega_c, \mathcal{F}_c, P_c)$ par

$$\Omega_c = \Omega^* \setminus \{\omega^* | A_\omega \text{ est un îlot non } C\text{– mesurable}\}(^1) ,$$
$$\mathcal{F}_c = \{F^* \cap \Omega_c | F^* \in \mathcal{F}^*\} \text{ et } P_c(F^* \cap \Omega_c) = P(F) ,$$

on a le résultat suivant.

PROPOSITION. *Les modèles $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega_c, \mathcal{F}_c, P_c)$ sont isomorphes.*

Finalement, en désignant par $\mathcal{F}'_c$ la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}_c$ et les îlots C-mesurables et par P'_c l'extension de P_c à $\mathcal{F}'_c$, on obtient ce corollaire.

---

[1] Ω_c est non-vide puisque l'on retire un sous-ensemble dénombrable à un ensemble qui ne l'est pas.

COROLLAIRE. *Le modèle* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est essentiellement isomorphe au modèle complètement atomique* $(\Omega_c, \mathcal{F}'_c, P'_c)$.

Remarquons que la sous- σ-algèbre $\mathcal{G}$ apparaissant dans la définition des modèles essentiellement isomorphes est ici identique à $\mathcal{F}$.

5. PREUVES

Notons tout d'abord le fait suivant.

(*) Pour toute famille dénombrable $\{A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, ...\}$, il existe une famille $\{F_1, F_2, ...\}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$ t.q., pour tout j , $F_j \in \mathcal{F}_{\omega_j}$.

En effet, il suit de la propriété (2) que $\forall j, k,\ j \neq k,\ \exists\ G_{jk} \in \mathcal{F}_{\omega_j}$ t.q. $G_{jk} \cap A_{\omega_k} = \emptyset$.

Pour $G_j = \bigcap_{k \neq j} G_{jk}$, on a donc que $G_j \in \mathcal{F}_{\omega_j}$ et $G_j \cap A_{\omega_k} = \emptyset$ pour tout $k \neq j$. La famille $\{F_1, F_2, ...\}$ avec $F_j = G_j \setminus \bigcup_{k \neq j} G_k$ satisfait alors la propriété désirée. $\diamond$

Preuve du lemme 1. Supposons le contraire. Il suit alors de la non-dénombrabilité et de la propriété (*) l'existence d'un nombre positif ε et d'une famille dénombrable $\{F_1, F_2, ...\}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$ tels que $P(F_i) > \varepsilon$ pour tout i , ce qui est impossible. $\diamond$

Preuve du lemme 2. Soit $\{A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, ...\}$ une famille dénombrable d'îlots et soit $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{\omega_j}$. Par la propriété (*) ci-dessus, il existe $G \in \mathcal{F}_{\omega_1}$ t.q. $G \cap A_{\omega_j} = \emptyset$ pour tout $j \geq 2$. Donc $A_{\omega_1} = U \cap G$, qui serait mesurable si U l'était. $\diamond$

Preuve du lemme 3. Si $P_0(A_\omega) = 0$, alors $P_0(B \cap A_\omega) = 0$ pour tout $B \subset \Omega$, et comme $P_0(B \cap A_\omega^c) \leq P_0(B)$, il s'ensuit que A_ω est C-mesurable.

Si A_ω est C-mesurable, on a en particulier

$$P(F) = P_0(A_\omega \cap F) + P_0(A_\omega^c \cap F) = P_0(A_\omega) + P_0(A_\omega^c \cap F)$$

pour tout $F \in \mathcal{F}_\omega$. Notons ensuite que si $G \in \mathcal{F}$ contient $A_\omega^c \cap F$, alors G contient A_ω et donc F . En effet, si $G \cap A_\omega = \emptyset$, alors $A_\omega = F \cap G^c$, ce qui est impossible puisque $A_\omega \notin \mathcal{F}$, et il suit de la propriété (2) que $G \supset A_\omega$.

On a donc $P_0(A_\omega^c \cap F) = \inf\{P(G) | A_\omega^c \cap F \subset G\} = P(F)$, ce qui implique que $P_0(A_\omega) = 0$. $\diamond$

Preuve de la proposition. Il suffit de montrer que $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ et $(\Omega_c, \mathcal{F}_c, P_c)$ sont isomorphes.

Considérons l'application $\phi : \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{F}_c$ définie par $\phi(F^*) = F^* \cap \Omega_c$.

L'application est clairement surjective. Elle est également injective: si F_1^* et F_2^* sont deux éléments de $\mathcal{F}$ ayant la même image par ϕ, alors $F_1^* \bigtriangleup F_2^*$ est soit l'ensemble vide, soit une réunion d'îlots non C-mesurables. Mais ce dernier cas est à exclure, car le lemme 1 nous assure que cette réunion est dénombrable et le lemme 2 sa non-mesurabilité.

Enfin, il est facile de voir que ϕ préserve les réunions dénombrables et les complémentaires. C'est donc un isomorphisme. $\diamond$

Preuve du corollaire. Remarquons que tout ensemble de mesure extérieure nulle est négligeable. Ainsi la σ-algèbre $\mathcal{F}_c^*$, complétée de $\mathcal{F}_c$, contient $\mathcal{F}_c'$. Le résultat en découle. $\diamond$

RÉFÉRENCES

HALMOS P.R., 1974. Lectures on Boolean Algebras. Springer, New York, 304 p.

HANISCH H., HIRSCH W.M. et RENYI A., 1969. Measures in denumerable spaces. *Amer. Math. Monthly 76*: 494-502.

KAPPOS D.A., 1969. Probability Algebras and Stochastic Spaces. Academic Press, New York, 267 p.

LOÈVE M., 1977. Probability Theory. Springer, New York, 838 p.

SIKORSKI R., 1969. Boolean Algebras. Springer, New York, 237 p.

Manuscrit reçu le 9 janvier 1989