Das Heptaeder

Das Heptaeder

Von *K. Merz.*

Heptaeder heißt aus dem Griechischen Siebenflach. Einfacher ist das Hexaeder oder Sechsflach, denn das ist der Würfel. Der hat seine Flächen recht übersichtlich angeordnet, wie jedermann wohl weiß. Wie aber die sieben Flächen am Heptaeder sich zusammenfinden, das ist nicht so einfach; denn nicht umsonst ist das Heptaeder ein modernes Polyeder und dementsprechend gebührend mit Singularitäten behaftet.

Die alten, ehrwürdigen Platonischen Polyeder, die regelmäßigen, von denen es alles in allem nur fünf geben kann im gewöhnlichen Euklidischen Raum, sind entweder von lauter gleichseitigen Dreiecken begrenzt, wie Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder, oder von Quadraten, wie das genannte Hexaeder, oder von regelmäßigen Fünfecken, nämlich das Dodekaeder. In ihrer einzigartigen Bestimmtheit und damit Vollkommenheit wurde ihnen philosophische Bedeutung zugemessen bei der Erklärung der Zusammensetzung der Welt. Die nächste Gruppe bilden die halbregelmäßigen Polyeder des Archimedes, dreizehn an der Zahl, an denen auch nur regelmäßige Vielecke auftreten dürfen, aber von zwei oder drei Arten zugleich, und zwar sind auch noch Sechs-, Acht- und Zehnecke beteiligt. Diese Polyeder können acht, vierzehn usw. bis zweiundneunzig Flächen besitzen. Zur Auffindung dieser Polyeder hat Archimedes vermutlich Berechnungen benutzt, da er sie kaum durch bloße Versuche alle finden konnte. Kepler fügte noch die Sternpolyeder dazu.

Das Heptaeder, das am einfachsten aus dem Oktaeder abgeleitet wird, mit dem es im äußeren Umriß übereinstimmt, also eine Pyramide nach oben und eine nach unten besitzt, entspringt aus den von dem deutschen Geometer Möbius angestellten Untersuchungen über einseitige Polyeder, welche er als Preisschrift 1861 der Pariser Akademie einreichte auf ihre gestellte Aufgabe zur Förderung der so lange gleich gebliebenen Erkenntnisse über Polyeder. Das Heptaeder wurde zuerst von Reinhard 1864 beschrieben.

Doch soll hier ein anderer weiter Weg geschildert werden, auf welchem das Heptaeder als schließliches Ergebnis in zwingender Folge unabsichtlich erstand. Von einer bestimmt gestellten Aufgabe ausgehend, ist es dann manchmal gut, daß man sich nicht zu sehr um das in Büchern aufgestapelte Wissen kümmert, sondern suchend sich unter guter Leitung von der eigenen Phantasie tragen läßt, um, wenn auch auf Umwegen, dann um so überraschender später zu einem Ziele zu gelangen. So führt dieser hier zu schildernde Weg durch weitläufige Rechnungen zu dem anschaulichen Heptaeder.

Also wie gelangte ich zu diesem eigentümlichen pyramidalen Körperchen? Das möchte ich jetzt erzählen und darf es um so eher, als der Ursprung für mich in zwei Schweizer Geometern ruht, nämlich in Jakob Steiner und seinem Großneffen Prof. Geiser. Jakob Steiner,[1] geb. 1796, von Utzenstorf, als Hirtenknabe ein Jugendgenosse von Bitzius, dem Jeremias Gotthelf, dann ein Schüler Pestalozzis in Iferten und später Lehrer in Berlin bei Humboldt und Mitglied der Akademie der Wissenschaften, war ein Schöpfer der synthetischen Geometrie; er starb 1863 in Bern. Prof. Geiser, 1843—1934, war durch Jahrzehnte ein Wahrzeichen des schweizerischen Polytechnikums in Zürich, noch in vieler Erinnerung und wie es hieß, bei den Studenten, von Steiner «erblich belastet».

Als kleiner Schulmeister, der schon mehrere Jahre in seinem Amt gewirkt hatte, kam ich ans Poly, um weiter zu studieren unter den Mathematikern und fand in Prof. Geiser einen gütigen Lehrer, dem ich mich gerne anschloß, soweit Würde und Hoheit dieser großen Gestalt es mir erlaubten. In den obersten Semestern kam ich ins mathematische Seminar, und da legte Prof. Geiser am 10. November 1900 uns

---

[1] Geiser, Zur Erinnerung an Jakob Steiner, Verhandlungen der S.N.G. 1873.

Studenten eine Auslese von Aufgaben vor, an denen wir uns versuchen sollten. Bei mir schlug die letzte der sieben Aufgaben, nach Darboux, sogleich ein; denn in dieser Aufgabe wurde gleich der ganze Raum von Strahlen erfüllt, welche Flächen die Menge entstehen ließen. Ich hatte sogleich eine Ahnung, daß sich da geometrische Findigkeit und Phantasie vollauf Genüge tun konnten, und ich war wirklich froh, als niemand anders Anteil an dieser Aufgabe beanspruchen wollte. In der Tat fand ich Beschäftigung durch viele Jahre und zwar mit gebührenden Ruhepausen, wie bei Gebirgsbewohnern üblich, durch 36 Jahre hindurch. Zuerst machte ich das Diplom damit, dann, nach einem Dutzend Jahre, ging es plötzlich einen Ruck vorwärts, daß es zur Promotion reichte, und in neuester Zeit kam ich zu einer interessanten Bildung des Heptaeders aus einem Netz, das ich aus Papier ausschnitt, ritzte und aufklappte und mit Möbius'schen Bändern durcheinander fügte. Eine ganze Welt von Strahlen, Flächen und Kurven hatte sich in Bewegung setzen müssen, um als kleine Maus das Heptaeder zu gebären.

Die Strahlen nämlich, welche den Raum durcheilen, kommen gemäß jener Aufgabe von einem unendlich großen Ellipsoid aus der ewigen Ferne, und sie durchsetzen dabei Parallelflächen[2] 10. Grades, die wie ineinander liegende Eierschalen sich zusammenfügen, aber nur viel leichter und luftiger, wie Wolkenschleier oder gar noch heller, wie Ätherschichten, die aus dem Unendlichen immer näher still und rein herabkommen, herab bis zum Urgrund der Zentrafläche[2] 12. Grades, auf welcher die Strahlen sich zusammenfinden im dichten Gewimmel ihrer Schnittpunkte, wie sie fußen in ihren Zentren, um erneut sich emporzustrecken durch die Gewölbe der Parallelflächen im unermüdlichen Eilen nach dem unerreichbaren Dome der Unendlichkeit. Wie ein ruhendes Kerngebirge wölbt sich die Zentrafläche in sich aufquellenden Wülsten durch eine Doppelkurve 24. Grades. Das setzte gewaltige Rechnungen ab zur Bezwingung dieses Ungetüms. Zwar war schon der Engländer Cayley daran gewesen, wie ich nachlesen konnte in einem Prachtband der Transactions of Cambridge. Mit unüberbietbarer Rechenkunst hatte er diese Kurve bezwungen. Aber Prof. Geiser wollte es anders; er hatte zwar seine Freude daran, wie dieser Cayley es herausbrachte, aber er sagte, ich müsse es nicht so machen, und ich war froh, daß ich nicht in dieses Gewirre mich stürzen mußte. Die ganze Absicht von Prof. Geiser war, bei dieser Aufgabe zu einer einheitlichen, übersichtlichen, symmetrischen, reinen Darstellung zu gelangen in diesem schönen Gebiet algebraischer Flächen und Kurven, die an verschiedenen Orten zerstreut von bedeutenden Mathematikern je in eigenartiger Weise berechnet wurden. Tatsächlich gelang es uns, und die Formeln trollten nur so heraus, wie Geiser befriedigt meinte. Damit war die erste Etappe erreicht; ins reine geschrieben nach dem darin unerreichbaren Vorbild und mit Zeichnungen versehen, gab's die Diplomarbeit 1901.

Diese Gebilde der analytischen Geometrie ruhten ein Jahrzehnt. Aber es war ein treibendes Ferment darin, nämlich eine quadratische Transformation,[2] welche eine Umbildung dieser ganzen Welt der Kurven und Flächen in ein zweites Bild des Daseins in Aussicht stellte. Doch brauchte es noch eines zündenden Funkens in die Einförmigkeit der Schulmeistertätigkeit, um diese geometrischen Gebilde aus ihrer Ruhe ins Rollen und in schwingende Bewegung zu bringen. Eigentümlicherweise kam er, wie ich mich damals ausdrückte und mich zu behelfen wußte, von der Muse des Anakreon aus Böcklins Bild, von wegen gewisser Ähnlichkeit, wie mir schien.

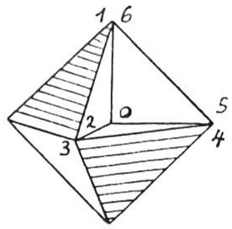
In jeder Parallelfläche stecken nämlich, wie ich erfolgreich es herausbrachte durch lange Rechnungen, acht imaginäre Doppelgerade, und wenn die Parallelflächen in ihren Scharen auseinanderfahren, so schleifen diese Geraden ein Oktaeder durch den Raum, das mit gewaltigen Pyramiden sich emporhebt aus der Zentrafläche wie ein klotziger Berg aus dem elliptisch geschwungenen Untergrund und das aber auch zugleich nach unten zur Hölle fährt. Zugleich reißt dieses Oktaeder acht schwingende Parabeln aus der Zentrafläche zu den Felsenflanken empor. Das war ein großartiges Bildnis, aber gar zu groß, um in der Wirklichkeit Platz zu finden. Dieses bewunderte Oktaeder war leider imaginär. Das Gespenst des

Imaginären hauste in seinen Flanken und Abgründen, dieses Gespenst, das Steiner so erfolgreich in seiner Geometrie bekämpfte, auch wenn ihm insgeheim davor graute, wie neidige Analytiker schadenfroh behaupteten, daß er Konstanten abzähle.

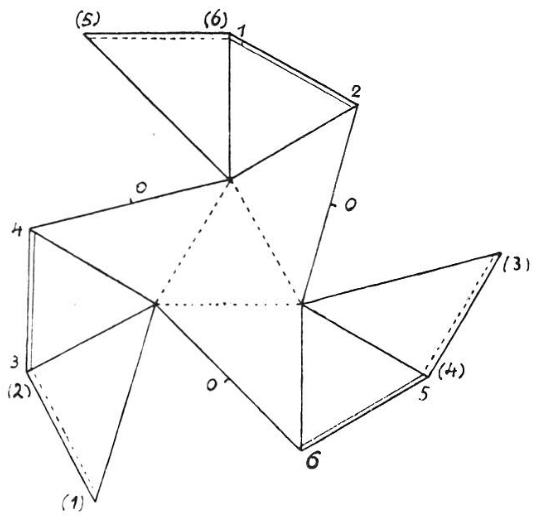
Da hieß es, so schön auch alle Flächen und Kurven zusammenstimmten und wie graziös auch aus der quadratischen Transformation die schwingenden Developpablen sich benahmen, da hieß es nicht mehr bloß erstaunt zuschauen, sondern handeln, um den gewaltigen Berg, nämlich das Oktaeder, aus dem Imaginären hinüberzuretten in die anschauliche Wirklichkeit. Es blieb nichts anderes übrig, als den rechnerischen Zusammenhang in einer alles beherrschenden Zahlengruppe, die lange diente, sich aber schließlich als tyrannisch erwies, zu brechen. Zwar kamen damit sorgfältig berechnete Flächen und Kurven aus ihrem Zusammenhang; sie stürzten in ein Chaos, das näher zu bestimmen anderen Generationen überlassen sei. Aber der Erfolg war da. Das Oktaeder erhob sich in sicherster Realität aus der Flut der Flächen und Kurven und zum Glück auch die Steinersche Fläche geradezu in neuem Lichte. Leider zeigte aber Prof. Geiser gar keine Freude an dieser Neuerung; er nannte die quadratische Transformation eine Sackgasse, und ich mußte froh sein, daß ich diesen mir so munter scheinenden Abschnitt in meine Promotionsarbeit aufnehmen durfte. Dem ruhenden Zusammenhang mit der Steinerschen Fläche gab er seine Anerkennung, und ich konnte sie in den Titel setzen. Dann in der Doktorprüfung 1914 machte er mir noch eine besondere Freude, indem er sagte, daß ich die Steinersche Fläche jetzt kenne. In der einstigen Diplomprüfung hatte ich nämlich eigentümlicherweise noch nichts davon gewußt. Zudem nahm er aus der Tasche das Modell der Zentrafläche und unterhielt mich und die anwesenden hohen Professoren damit, nachdem ich natürlich vorher genügend gute Antworten gegeben hatte. Auch der verehrte Herr Schulratspräsident, der Freund Geisers, sprach sich anerkennend aus.

Aber jetzt kam erst noch etwas Merkwürdiges. Das erstandene Oktaeder war also zuerst imaginär gewesen, dann war es reell geworden, und jetzt kam es durch die Erleuchtung von der im erneuten Glanze strahlenden Steinerschen Fläche mit ihren gleißenden Wölbungen und geheimnisvollen Vertiefungen noch zu besonderer Bedeutung. Es war gar kein gewöhnliches Oktaeder, wie es äußerlich zuerst schien; Teile seiner Flächen brachen ein; sie wurden herausgerissen durch die Gewalt des Vorbildes der Steinerschen Fläche; es zeigten sich die zuerst ungeahnten Tiefen, die eindrangen bis zu seinem innersten Punkt, dem dreifachen. Es war gar kein ganzes Oktaeder mehr, es war ein Oktaeder-Oktant,[3] wie ich es nannte (1914) mit sieben Flächen, vier außen und drei nach innen sich senkend in Durchdringungen in drei Doppelgeraden. Davon hatte ich Zeichnungen gemacht und ein Modell.[2]

1. Heptaeder



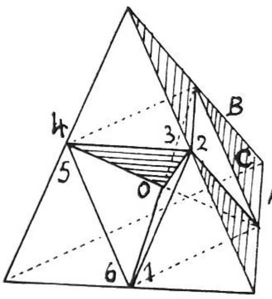
2. Netz des Heptaeders
mit Möbiusbändern
1 2—⟨1⟩ ⟨2⟩, 3 4—⟨3⟩ ⟨4⟩, 5 6—⟨5⟩ ⟨6⟩



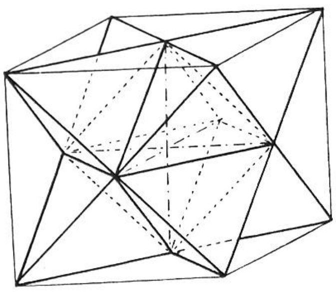
Darüber gingen weitere zwanzig Jahre. Meine Entdeckung war, wie ich meinte, in Stillschweigen versunken. Da traf mich ein Unfall, ich brach den Fuß und lag und las und blätterte 1933 auch in Hilberts Buch «Anschauliche Geometrie», und siehe, ich sah mein *Siebenflach* ganz munter auftauchen, schön gezeichnet und beschrieben, und es war inzwischen zum Heptaeder getauft worden, welch schönem Namen ich sogleich beipflichtete. Da war auch zu lesen, es sei einseitig, worauf ich vorläufig nicht viel hielt; aber sobald ich wieder gut zu Fuß war, ließ ich einen Stempel machen in deutlicher, einfacher Schrift: «Heptaeder», holte beim Buchhändler die seit langem ungestört liegengebliebenen und noch vorhandenen Promotionsarbeiten und druckte an allen passenden Orten *Heptaeder* auf, um auf der Höhe der Zeit zu sein. Dann verschenkte ich diese so verbesserte Auflage, damit sie auch zu etwas diene, an Hochschulen, Studenten und Antiquare.

Damit nicht genug, bekommt diese Geschichte noch eine Fortsetzung, als ob sie kein Ende nehmen wollte. Zwischen den Bergen, im Winter nämlich, von denen manch einer von ungefähr sich der wunderbaren Gestalt der Zentrafläche anzupassen sucht, ohne dieses Ideal natürlich erreichen zu können unter dem strahlenden Himmel der Parallelflächen, da traf ich einen modernen Geometer, mit dem ich meine Angelegenheit des Heptaeders besprach, und ich wurde etwas nachdenklich, ob die angedeutete Einseitigkeit nicht doch noch zu beachten wäre, da jetzt diese geradezu die Hauptsache war. Die Steinersche Fläche schien vergessen, nur der Einseitigkeit wegen wanderte man am Heptaeder herum. Stellt man sich nämlich irgendwo außen aufs Heptaeder und steckt seinen Stock kräftig ein durch die Schicht, läßt ihn stecken und wandert unbesorgt auf dem Heptaeder herum, so kommt man unversehens nach innen zur Stelle, wo die Spitze des Stockes hineinragt. Man mußte den Kopf halten und es sich gründlich überlegen, wieso die beiden Seiten der Fläche eigentlich nur Einerlei seien, da es überhaupt nur eine Seite daran gebe. Bald müde des Nachdenkens, erinnerte ich mich meines Oktaeder-Oktanten, las in meiner Druckschrift Seite 36 und, angewendet aufs Heptaeder, klappt ich's auf und sah jetzt die Ränder, wo man von der einen Seite des *Netzes*[4] auf die andere kommt. Nimmt man z. B. ein Blatt, oben grün, auf der Rückseite weiß, so fügen sich Ränder zusammen, wo man vom Grünen aufs Weiße kommt wie vom Sommer zum Winter. Das gibt so ganz hübsche zweifarbige Körperchen, die man auch aufhängen kann als Zier. Ja, so ist die Kunst — jüngst sah ich das andere Bild, Euterpe; sie läßt das Spiel und sinnt, und was sie sinnt, das weiß ich nicht, aber ich sage mir, es war das Heptaeder, das aus dem Gewoge der algebraischen Flächen erstand.

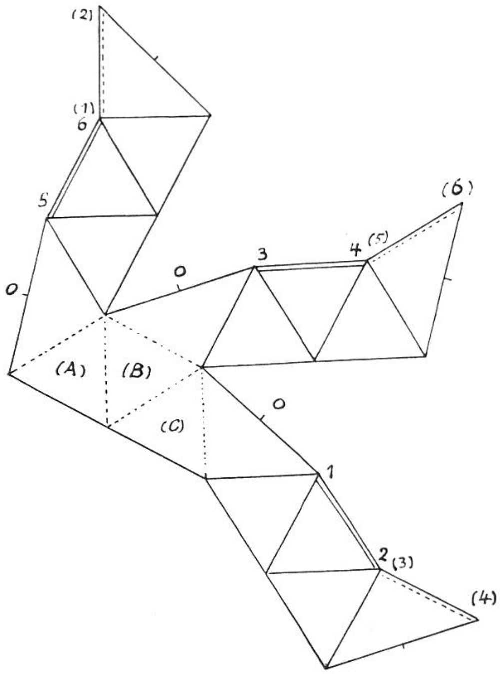
3. Einseitiges Pentadekaeder



5. Heptaeder und Pentadekaeder in Tetraedern im Würfel



4. Netz des Pentadekaeders



Mit diesem Heptaeder ließe sich noch ein Denkmal errichten, architektonisch ganz monumental, nämlich das *Pentadekaeder,*[5] würdig in klassischer Einfachheit eingeschlossen in das Tetraeder, eine Pyramide, der Urtyp der Baukunst, nicht klotzig, denn dreiseitig regelmäßig in den Abmessungen und mit sich einsenkenden Nischen, entnommen dem freien Heptaeder, als geheimnisvoll einseitig in sich gekehrt.

Dazu kommen, nach einem allgemeinen geometrischen Satz,[6] noch andere eigenartige und zierliche Polyeder die Menge. Denn von jeher wurde die Schlauheit des Geometers von der Schlauheit des Raumes noch überrascht.

Damit ist die Entwicklung geschildert, die durch die vielen Jahre von den algebraischen Flächen schließlich zu den einseitigen Polyedern führte.

Anmerkung:

Die Klischees wurden von den Commentarii Mathematici Helvetici in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt.

---

[2] K. Merz, Parallelflächen und Zentrafläche eines besonderen Ellipsoides und die Steinersche Fläche. Beispiel einer quadratischen Transformation. Beilage zum Programm der Bündnerischen Kantonsschule. Chur 1914.

[3] Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellsch. 1914, II. Teil, S. 103, und diese Jahresberichte LVII. Band. 1917, S. 74.

[4] Der Oktaederoktant oder ein Heptaeder, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 8, pag. 379, 1936.

[5] Einseitiges Pentadekaeder. C.M.H., vol. 10, pag. 1, 1937.

[6] Einseitige Polyeder aus Oktanten. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Phys.-math. Klasse 1937, II.

Nordlicht vom 25. Januar 1938 — Aufnahme des Lichtklimatischen Observatoriums Arosa