

# Beilage zum Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens : Vielfache aus Scheitelzellen und Hohlzellen

Autor(en): **Merz, Karl**

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubünden**

Band (Jahr): **76 (1938-1939)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Beilage zum Jahresbericht  
der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens

---

# Vielfläche aus Scheitelzellen und Hohlzellen

mit Abbildungen und Netzen

von

Karl Merz

Gedruckt mit Subvention der Stiftung Dr. Joachim de Giacomi  
der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft

I. Teil  
zu Band LXXVI, 1938/39

Chur 1939



# Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Teil	
Einleitung: Zerlegung konvexer Polyeder durch Schnittebenen . . . . .	5
<b>A. Eine Doppelstrecke</b>	
I. Kreuzhauben . . . . .	11
<b>B. Zwei Doppelstrecken</b>	
II. Zweiseitige 9Flache bis 12Flache aus Oktaeder, Würfel, Tetraeder . . . . .	18
<b>C. Drei Doppelstrecken mit Schnitt in <math>O</math></b>	
a) $O$ im Innern des Polyeders für zwei einseitige Vielflache	
III. Oktaeder zerlegt in 7Flach bis 19Flach . . . . .	21
IV. Würfel zerlegt in 10Flach bis 18Flach . . . . .	28
Verschiedene Arten der Netze . . . . .	36
V. Tetraeder zerlegt in 7Flach bis 15Flach . . . . .	42
Vier Fälle aus einem Netz . . . . .	45
VI. Ikoehxaeder zerlegt in 31Flache . . . . .	68
b) $O$ auf dem Polyeder oder außen für ein- und zweiseitiges Vielflach	
VII. Oktaeder zerlegt in 9Flach bis 18Flach . . . . .	69
VIII. Würfel zerlegt in 12Flach und 18Flach . . . . .	73
IX. Tetraeder zerlegt in 9Flach bis 16Flach . . . . .	74
II. Teil	
<b>D. Viele Doppelstrecken in Bündeln</b>	
X. Prismen mit parallelen Doppelstrecken . . . . .	82
XI. Prismen gerändert, mit Bündel von Doppelstrecken . . . . .	86
XII. Zellenpolyeder aus Prismatoiden . . . . .	90
XIII. Prismatische Scheitelzellen im Würfel . . . . .	97
XIV. Würfelroste. Scheitelgebiete und Untergebiete . . . . .	106
XV. Radiale Scheitelzellen. Ebenenbüschel und Prismenmantel	117
XVI. Zentrische Scheitelzellen und Kugel. Pyramidenmantel . . . . .	122
<b>E. Doppelstrecken in Polyederkanten</b>	
XVII. Innenpolyeder und Hohlpolyeder . . . . .	126
XVIII. Reihe mit Innen- und Hohlpyramide . . . . .	149
<b>F. Hohlzellenvielflache ohne Doppelstrecken</b>	
XIX. Hohlblock, Henkel und Roste . . . . .	156
Zusammenfassung . . . . .	161
Literatur-Nachweise . . . . .	164



# Vielfache aus Scheitelzellen

## Einleitung

Durch Zerlegung von konvexen Polyedern mittelst Schnittebenen erhält man Vielfache von beliebig hoher Zusammenhangszahl, indem man aus den dabei entstehenden Körperteilen oder Zellen solche auswählt, die sich zueinander in Scheitellage befinden. Solche Zellen stoßen in Doppelstrecken zusammen, als Teile der Schnittgeraden der Zerlebungsebenen, wobei die durchgehenden Flächen in den Schnittebenen den Zusammenhang unter den Zellen des Vielfaches herstellen, während die Raumteile der Zellen im übrigen voneinander getrennt sind. Neben diesen Zellen entstehen durch die herausgenommenen Körperteile des ursprünglichen Polyeders Lücken, die bis an die Doppelstrecken eindringen und an diesen ebenfalls in Scheitellage zusammenstoßen. Die so entstehenden Scheitelzellenvielfache können einseitig oder zweiseitig werden.

Diese Konstruktionen wurden zuerst für drei Schnittebenen, gelegt durch einen Punkt im Innern von Oktaeder, Würfel oder Tetraeder, ausgeführt, wobei das angenommene Polyeder in acht Körperteile zerfällt, von denen zu einem Teilvielfach je vier Scheitelachtel als Zellen zusammen genommen werden, zwischen denen vier Lücken zu den drei Doppelstrecken eindringen. Die Einseitigkeit für die beiden so entstehenden Teilvielfache ergibt sich aus der Bildung des Netzes durch dessen Aufklappung, wobei *Möbiusbänder* entstehen, die sich in Wendestrecken der Ränder des Netzes schließen. Dazu müssen die vom Oktaeder her als Achsenschnitte bezeichneten drei Flächen in den Schnittebenen längs Doppelstrecken geteilt werden, um die Durchdringungen bei der Aufklappung zu ermöglichen.

Den ersten Anlaß dazu bot das durch quadratische Transformation aus der Steinerschen Fläche erhaltene Heptaeder und zwar für den Fall des ins Unendliche sich erstreckenden Oktaederoktanten.<sup>1</sup> Damit war der Weg gewiesen zur Herstellung von Netzen von Vielflachen, welche drei Doppelstrecken besitzen, wobei diese, wiederum vom Oktaeder her, als drei Achsen bezeichnet seien, die durch den dreifachen Punkt des Vielflaches gehen. Wenn diese drei Achsen einander nicht mehr innen, sondern auf dem Polyeder oder erst außerhalb desselben schneiden, wird eines der Teilvielflache zweiseitig.

Der ursprüngliche Polyedersatz von den Scheiteloktanten läßt sich erweitern auf Konstruktionen für beliebig viele Schnittebenen, die als Bündel angenommen werden, um Prismen und Prismatoide zu zerlegen, mit Unterscheidung gerader und ungerader Anzahl der Seiten. Dabei lassen sich mit der Zunahme der Seitenflächen unendliche Reihen von Vielflachen bilden. Für die Anzahl ihrer Doppelstrecken, Zellen, ferner Flächen, Kanten und Ecken entstehen Ausdrücke ersten oder zweiten Grades und daraus auch für Charakteristik und Zusammenhangszahl. Damit kann auch jeder Zusammenhangszahl ein bestimmtes Vielflach zugeordnet werden, das durch sein Netz in der Ebene bestimmt ist, welches seine Flächen einfach zusammenhängend enthält.

Für die einseitigen Vielflache sind an den Rändern des Netzes *Wendestrecken* vorhanden, in denen durch die Aufklappung sich Oberseite und Unterseite des Netzes aneinanderfügen und so den Übergang zwischen seinen beiden Seiten herstellen. Die Anordnung dieser Wendestrecken ist von der Art der Annahme des Netzes abhängig. Sie bilden geschlossene Streckenzüge, entweder aus Kanten allein oder aus Kanten und Doppelstrecken, und können ebene oder windschiefe einfache Vielecke umschließen oder zusammengesetzte Vielecke, in denen der Schnitt von Doppelstrecken in überschlagenen Vielecken als mehrfacher Punkt auftritt. Die Betrachtung dieser Wendestrecken zeigt also, wie die verschiedenen Netze des nämlichen Vielflaches aus ihrer Bildung in der Ebene zur Anordnung ihrer Flächen im Raum

übergehen, um von der Zweiseitigkeit am Netz die Einseitigkeit am Vielflach selbst zu erreichen im geschlossenen Zusammenhang seiner Flächen. Der einfachste Fall tritt bei einer Doppelwendestrecke ein, in welcher das Vieleck der Wendestrecken sich zu einer Strecke als Zweieck vereinfacht. Um die Einseitigkeit aber zu ermöglichen, müssen am Vielflach Doppelstrecken vorhanden sein, in denen einzelne seiner Flächen einander durchdringen, und nur dadurch kann das Vielflach aus der flächenhaften zur körperhaften Anordnung im Raume ausholen. Von den Doppelstrecken hängt die Anordnung der Zellen und Lücken und damit die Zusammenhangszahl des Vielflaches ab. Der Wechsel von Oberseite und Unterseite des Netzes an den einzelnen Zellen ist aber noch von den Wendestrecken bedingt. Daher hängt der Entscheid über Einseitigkeit und Zweiseitigkeit des Vielflaches von der Lage der Doppelstrecken und von der Anordnung der Flächen ab. Die Spuren der Schnittebenen teilen die Flächen des ursprünglichen konvexen Polyeders in die Flächen der beiden Teilvielflache. Die entstandenen Flächenteile lassen sich dazu in zwei Scheitelgebiete ordnen, so daß alle Flächengruppen eines Scheitelgebietes nur in Ecken zusammenstoßen, welche Endpunkte der Doppelstrecken sind, als Schnitte von Spuren der Schnittebenen. Jedes der beiden Scheitelgebiete enthält ferner zwei Untergebiete, von denen das eine die Flächen umfaßt, welche am Vielflach außen die Oberseite des Netzes zeigen, während das andere die Flächen enthält mit der Unterseite. Wenn nun die Flächen des einen Untergebietetes die Flächen des anderen voneinander vollständig trennen, so wird das Vielflach dieses Scheitelgebietes zweiseitig; stoßen aber Flächen des nämlichen Untergebietetes an irgendeiner Stelle unter sich in Ecken zusammen, so besteht ein Übergang von einer Netzseite zur anderen, und das Vielflach wird einseitig. Damit kann aus der Einteilung des Netzes des ursprünglichen Polyeders durch die Spuren der Schnittebenen der Entscheid über Ein- und Zweiseitigkeit der Teilvielflache gefunden werden, oder auch am Vielflach selbst, wenn es im Modell vorliegt oder als fertig gedacht wird und die Einteilung seiner Flächen daran,



außer der Achsenschnitte, in die beiden Untergebiete durchgeführt wird, wobei an einer beliebigen Fläche begonnen werden kann, wegen der Vertauschbarkeit der Netzseiten.

Die Berechnung der Anzahl der Flächen der beiden Untergebiete wird für einen besonderen Fall von Scheitelzellen in einem Würfel durchgeführt, mit Doppelstrecken, die senkrecht zu seinen Grundflächen stehen, und es ergeben sich Zahlenreihen, die nach Modul 4 auseinanderzuhalten sind. Auch können dann die in Doppelstrecken entstehenden Wendestrecken aus der Projektion ersehen werden. Dazu treten die Würfelroste, mittelst denen Vielfläche aus lauter Würfeln gebildet werden. Ihre Außenflächen bilden die übersichtlichsten Scheitelgebiete, in denen das Verhalten der Untergebiete am leichtesten zu erkennen ist. In dem Würfelrostblock treten außer den Lücken auch Hohlwürfel auf, indem die Schnittebenen aus drei Systemen paralleler Ebenen bestehen. Schnittebenen in einem Büschel kommen bei den radial angeordneten Zellen vor, wodurch vielfache Strecken entstehen, welche sämtliche Wendestrecken in sich aufnehmen können. Um zu zentrisch angeordneten Zellen zu gelangen, müssen außer Schnittebenen noch Pyramidenmantelflächen zur Zerlegung verwendet werden. Diese Zellenpolyeder führen im Grenzfall zu einer Kugel, die aus Zellen-elementen und Lücken zusammengesetzt ist und daher nicht dicht, sondern gelockert ist im Rauminhalt ihrer Teilvielfläche.

Außer in Bündeln und Büscheln lassen sich die Schnittebenen durch das konvexe Polyeder noch voneinander unabhängig anordnen und zwar so, daß sie miteinander wiederum ein konvexes Polyeder einschließen. Das so entstandene innere Polyeder kann dann entweder als Zelle oder als Lücke betrachtet werden, in welchem letzterem Falle dann ein Hohlpolyeder vorliegt. Vorerst werden die Fälle ausgeführt, in denen das innere Polyeder zum ursprünglichen äußeren ähnlich wird, indem die Schnittebenen parallel zu dessen Flächen angenommen werden und zwar in gleichem Abstand für die fünf regelmäßigen Polyeder. Dabei entstehen dann noch weitere innere Zellen oder Lücken, die das innere Poly-

eder einschließen oder noch weiter unter den äußeren Zellen liegen. Diese Methode eröffnet mannigfaltige Anwendungen und führt tiefer in die Gesetze der Anordnung der Scheitelzellen, nämlich zur Verallgemeinerung des Polyedersatzes<sup>4</sup> der Scheiteloktanten.

Damit ist zugleich auf die außerordentliche Gestaltungsfähigkeit hingewiesen, die in den Zellenpolyedern einem entgegentritt, und die Freude an der Mannigfaltigkeit dieser Formen war es besonders, die bei der Ausarbeitung der verschiedenen Fälle mich leitete. Es tritt damit ein Bildungsprinzip des Raumes in Wirksamkeit, um eine überraschende Fülle geometrischer Gebilde entstehen zu lassen, die auf einfache Art und Weise nach dessen Grundgesetzen sich entwickeln. Die ursprüngliche Starrheit, die der Vorstellung der Polyeder sonst anhaftet, wird überwunden durch die Entwicklungsmöglichkeit in fortgesetzten Reihen, die vielleicht zu Grundsätzen in dem Bau der Gebilde der Natur führen können. Um vorerst auf einem beschränkten Gebiete die Möglichkeiten der verschiedenen Fälle ersehen zu können, sind die Zerlegungen des Tetraeders durch drei Ebenen für alle Flächenzahlen durchgeführt, und es zeigt sich schon hier, wie erstaunlich die Menge von besonderen, eigentümlichen und teilweise schönen Formen ist. Man könnte dies die Kunst der sieben Ebenen nennen, die dabei in Wirksamkeit tritt, und damit eine Kombinatorik einleiten zwischen je vier der sieben Ebenen als Tetraeder zu den übrigen drei als Schnittebenen. In den weiteren Polyedern liegt noch ein ausgedehntes Gebiet vor für die Zerlegungen in Vielflache aus Scheitelzellen.

Eine zweite Art der Bildung von Flächen mit mehrfachem Zusammenhang, aber ohne Doppelstrecken, wird anschließend noch dargelegt in der Verwendung des Hohlblocks, der dem Torus entspricht. Diese Vielflache umschließen nur einen Raumteil, der aber mehrfach zusammenhängend ist, und sie können ebenfalls zwei- oder einseitig sein. Eine Vereinheitlichung beider Arten Zellenflächen wäre in algebraischen Flächen zu suchen, mit einerseits reellen, andererseits imaginären Doppelkurven.



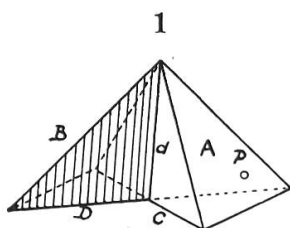
## A. Eine Doppelstrecke

Die Ebene teilt den Raum, als erste Tat zur Gestaltung seiner Gebilde. Noch eine Ebene, welche die erste schneidet, läßt aus den beiden Halbräumen vier Keile entstehen, unter denen zwei Paar Scheitelkeile nur in der Schnittgeraden zusammenstoßen, als in der Doppelgeraden. Dabei sind die beiden Ebenen als ungeteilt zu betrachten, als ganze durchgehende Flächen, in denen die Doppelgerade infolge der Lage der beiden Ebenen im Raume entsteht. Die beiden Ebenen sind als zu einem Gebilde gehörend aufzufassen, als die Gesamtheit zweier Ebenen, bestehend aus zweiseitigen Flächenstücken im Endlichen.

### I. Kreuzhauben

Die Anwendung von zwei Schnittebenen auf ein Polyeder ergibt mit nur einer Doppelstrecke Teilvielfläche, mit denen Kreuzhauben gebildet werden können.

1. **6Flach aus Pyramiden.** Eine gerade quadratische Pyramide wird durch ihre beiden Diagonalebene als Schnittebenen in zwei Paare von Scheitelpyramiden zerlegt 1. In

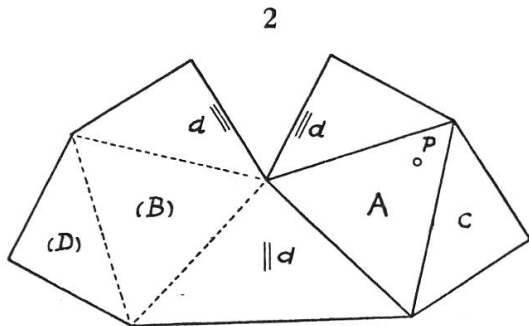


6Flach

diesen Schnittebenen liegen als Achsenschnitte zwei gleichschenklige Dreiecke, die einander in der Höhe der Pyramide als Achse durchdringen, wodurch diese Achse zur Doppelstrecke  $d$  für beide Paare der Scheitelpyramiden wird. Ein solches Paar bildet ein 6Flach, bestehend aus den beiden

Achsenschnitten, die durch  $d$  gehen, aus zwei Seitenflächen  $A$  und  $B$  und aus den beiden Grundflächen  $C$  und  $D$ . Für das Netz 2 dieses 6Flachs ist eines der Achsenschnittdreiecke halbiert durch  $d$ , um bei der Aufklappung die Durch-

dringung am Modell zu ermöglichen. Dabei hat man die Netzseiten zu unterscheiden: die obere Netzseite  $o$  an  $A$



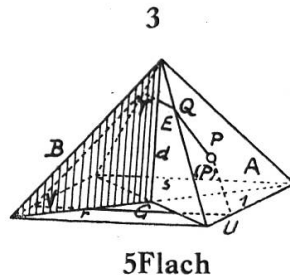
und die untere  $u$  an  $B$ , die als unten liegend angedeutet ist durch  $(B)$ . Nach der Aufklappung um die punktierten Strecken nach oben, um die ganz gezogenen nach unten, zeigt die eine Pyramide, die mit  $A$ , an ihren Flächen außen die Oberseite  $o$  des

Netzes und die andere Pyramide mit  $B$  dessen Unterseite, und in  $d$  geht die Außenseite von  $A$  als  $o$  über zur Innenseite ebenfalls als  $o$  von  $B$ . Bei der Aufklappung schließen sich nämlich alle Ränder des Netzes gleichseitig:  $o$  an  $o$  und  $u$  an  $u$ , wie auch in  $d$ , an dem geteilten Achsenschnitt. Daher bleibt ein auf der Netzseite  $o$  angenommener Punkt  $P$  bei seiner Bewegung über die Flächen dieses 6Flachs immer auf  $o$ , da er an keiner Kante nach  $u$  gelangen kann, auch nicht in der Doppelstrecke  $d$ , wo er, als in dem einen Achsenschnitt liegend, in diesem bleiben muß und daher den anderen in  $d$  zu durchsetzen hat. Trotz der Durchdringung in  $d$  sind  $o$  und  $u$  am 6Flach voneinander getrennt, wie am Netz durch dessen Rand, und wie das Netz ist auch das daraus entstandene 6Flach *zweiseitig*. Auch die beiden Einzelpyramiden oder Zellen für sich wären *zweiseitig*, wenn sie in  $d$  voneinander getrennt würden, nur haben sie vom gemeinsamen Netz her entgegengesetzte Seiten als Außenseiten erhalten.

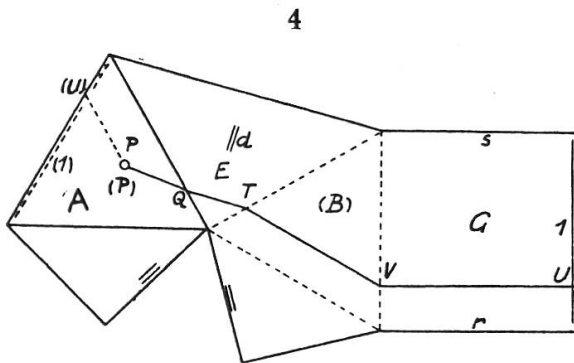
Für die Anzahl  $f$  der Flächen,  $e$  der Ecken,  $k$  der Kanten dieses 6Flachs 1 und für die Charakteristik  $c = e - k + f$  und die Zusammenhangszahl  $h = 3 - c$  erhält man:  $f = 6$ ,  $e = 6$ ,  $k = 10$ ,  $c = 2$ ,  $h = 1$ , wobei  $d$  nicht gezählt wird, da es Doppelstrecke ist und nicht Kante.

2. **5Flach**, einseitig. Um für die beiden Scheitelpyramiden *Einseitigkeit* zu erzielen, hat man die Grundfläche  $G$  der ursprünglichen quadratischen Pyramide ganz zu lassen 3,

wie auch im Netz 4. Dann bildet sich bei der Aufklappung ein Möbiusband, indem dabei der untere Rand (1) an den oberen 1 sich anschließt, so daß damit der Übergang von  $u$  zu  $o$  in der entstehenden Kante 1 hergestellt wird. Der ganz gelassene Achsenschnitt  $E$  mit  $A$  und  $B$  daran und dazu  $G$  bilden als vier Flächen ein offenes Möbiusband, in welchem die beiden Teilflächen des anderen Achsenschnittes die beiden Scheitelpyramiden abschließen. Damit erhält man ein geschlossenes einseitiges 5Flach 3, allerdings mit zwei freien Rändern  $r$  und  $s$  an  $G$ , die aber nicht zu zählen sind:  $f = 5, e = 6, k = 10, c = 1, h = 2$ . Man könnte schon 1 als 5Flach mit überschlagenem Viereck  $C$  samt  $D$  betrachten, was aber für das Netz nach der üblichen Zeichnungsweise nicht ausführbar ist.



Statt aus der Aufklappung und mit der Wendestrecke kann die Einseitigkeit auch erklärt werden durch einen Streckenzug,



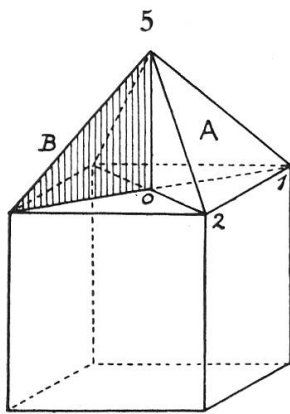
Möbiusband (1)—1

Streckenzug, der von einem Punkte  $P$  aus über die Flächen des 5Flachs 3 nach dem unter  $P$  liegenden Gegenpunkt  $(P)$  führt und der als ein Weg betrachtet werden kann, den  $P$  durchwandern muß, um auf dem Vielflach nach  $(P)$  zu kommen,

da  $P$  nicht unmittelbar die Fläche durchstoßend zu  $(P)$  werden darf. In 4 ist dieser Weg eingezeichnet als  $P Q T V U$  auf der Oberseite des Netzes und als Fortsetzung  $(U) (P)$  auf dessen Unterseite. Man halte  $G$  fest, klappe daran  $(B)$  und  $E$  nach oben auf und dann  $A$  entgegengesetzt nach unten, daß durch eine Wendung (1) an 1 zu liegen kommt und  $(U)$  in  $U$  fällt. Damit erhält man den Weg, wie er in 3 eingezeichnet ist:  $P Q$  in  $o$  von  $A$ ,  $Q T$  in  $E$  mit Durchquerung von  $d$  durch den anderen, den geteilten Achsenschnitt, dann  $T V$  in der Innenseite von  $B$ , aber noch auf  $o$ , und  $V U$  oben

in  $G$  in  $o$  und dann schließlich  $U(P)$  auf der Innenseite  $u$  von  $A$ , womit  $(P)$  als Gegenpunkt von  $P$  erreicht ist. Der Weg muß identisch werdende Punkte  $U$  und  $(U)$  der Wendestrecke im Netz miteinander verbinden.

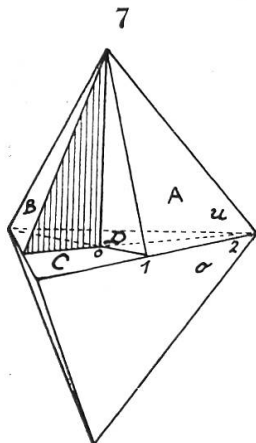
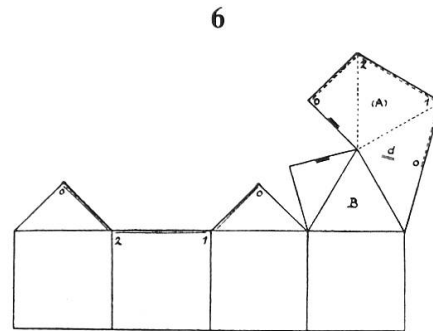
**3. Kreuzhaube.**<sup>6</sup> Dieses 5Flach 3 kann zu einer Kreuzhaube verwendet werden, nach Weglassung von  $G$ , durch Auf-



Würfel mit Kreuzhaube

setzung z. B. auf einen Würfel 5, an welchem in einer seiner Flächen, durch deren Diagonalen geteilt, zwei Löcher hergestellt werden, als in zwei Scheiteldreiecken, auf deren Ränder die Umfänge von  $C$  und  $D$  1 passen. Aus dem Netz 6 entsteht durch Aufklappung dieser Würfel 5 mit Kreuzhaube, als unten offen. Die Seiten des Dreiecks 0 1 2 werden zu Wendestrecken, so daß hier der Übergang von  $o$  zu  $u$  entsteht, am Rande des Loches unter der Pyramide  $A$ , die  $u$  zeigt, während das andere Loch unter der Pyramide  $B$  liegt, deren Flächen  $o$  zeigen, wie auch die übrigen Flächen des Würfels. Wird der Würfel unten geschlossen, so erhält man für dieses einseitige 11Flach 5:  $f = 11$ ,  $e = 10$ ,  $k = 20$ ,  $c = 1$ ,  $h = 2$ . Das Innere

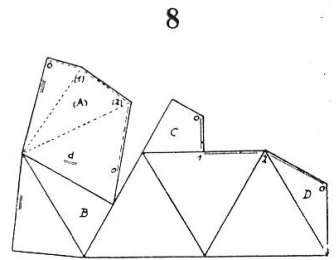
des Würfels bildet, als durch die beiden Löcher mit den beiden Pyramiden verbunden, einen zusammenhängenden Raumteil.



Spitzkreuzhaube

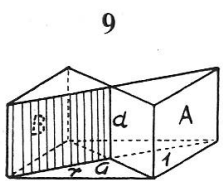
**4. Spitzkreuzhaube.** Um eine kleinere Flächenzahl als vorhin zu erhalten, wird aus zwei Tetraedern mit einer gemeinsamen Fläche das einseitige 9Flach 7 mit Spitzkreuzhaube gebildet. Das untere Tetraeder wird ganz gelassen, aus dem oberen sind durch zwei Schnittebenen, die durch je eine obere

Kante und die Tetraederhöhe gehen, Scheitelpyramiden gebildet, von denen zwei herausgenommen werden, doch so, daß ihre Grundflächen *C* und *D* noch bleiben. Dagegen sind unter den übrigbleibenden Pyramiden *A* und *B* die Grundflächen herauszunehmen, so daß neben *C* und *D* zwei dreieckige Löcher unter diesen beiden Pyramiden *A* und *B* entstehen. Durch die Aufklappung des Netzes 8 entstehen am Rande 012 des Loches unter der Pyramide *A* drei Wendestrecken, indem diese Pyramide *u* zeigt, während alle übrigen Flächen dieses 9Flachs *o* zeigen.  
 $f = 9, e = 8, k = 16, c = 1, h = 2.$



8

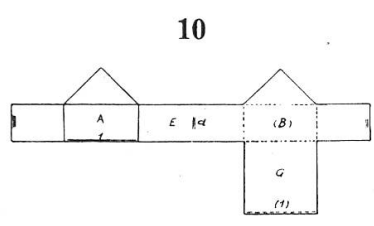
5. 7Flach aus Prismen. Eine weitere Kreuzhaube kleiner Flächenzahl läßt sich mit dreiseitigen Prismen bilden. Ein quadratischer Quader gibt, durch die zwei Diagonalfächen senkrecht zur Grundfläche geteilt, aus zwei Scheitelprismen ein zweiseitiges 8Flach. Unter Beibehaltung der ganzen Grundfläche *G* entsteht daraus das einseitige 7Flach 9 der zwei Prismen, das aus dem Netz



7Flach

10 erhalten wird, mit der Wendestrecke 1 durch Aufklappung. Die vier Flächen *G*, *B*, *E* und *A* bilden wieder ein

offenes Möbiusband, in welchem die übrigen drei Flächen das 7Flach abschließen.  $f = 7, e = 10, k = 16, c = 1, h = 2.$  Dieses 7Flach als Kreuzhaube, entsprechend wie in 5 auf einen Würfel gesetzt, gibt ein 13Flach, die zwei Prismenflächen besonders gezählt neben den in gleicher Ebene anstoßenden Würfelflächen:  $f = 13, e = 14, k = 26, c = 1.$  Oder jene zwei Flächen als je in gleicher Ebene zusammen als eine gezählt:  $f = 11, e = 14, k = 24, c = 1.$

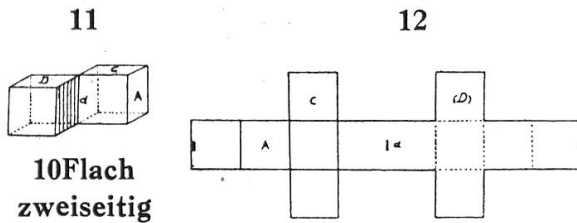


Möbiusband 1—(1)

6. 9Flach der zwei Würfel. Von besonderer Bedeutung sind die Vielfache aus zwei Würfeln wegen der einfachen



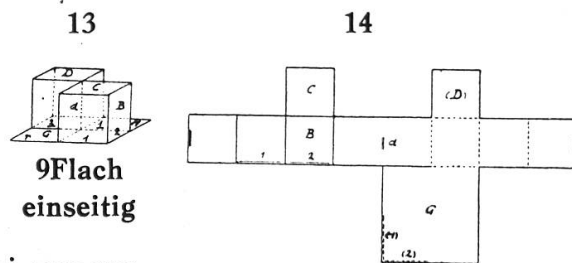
Herstellung ihrer Netze. Man bildet zuerst das zweiseitige 10Flach 11 der zwei Würfel an einer Doppelstrecke  $d$  in



Scheitellage aus dem Netz 12.  $f = 10, e = 14, k = 22, c = 2, h = 1$ . Daraus ergibt sich das einseitige 9Flach 13 der zwei Würfel mit der gemeinsamen

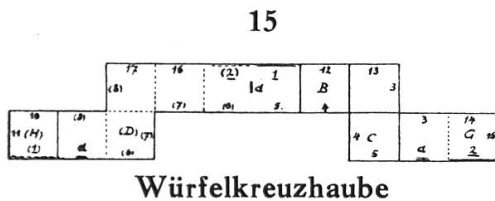
Grundfläche  $G$ , an welcher aus Netz 14 die Wendestrecken 1 und 2 entstehen. Damit kann, entsprechend wie in dem

früheren Beispiel 5, ein Würfel mit einer aufgesetzten Würfelkreuzhaube gebildet werden, als ein 15Flach der drei Würfel:  $f = 15, e = 20, k = 34, c = 1, h = 2$ , wobei zusam-



menstoßende Seiten verschiedener Quadrate, auch wenn diese in gleicher Ebene liegen, als Kanten gezählt sind. Weiterhin erhält man ebenso den Würfel mit zwei angesetzten Würfelkreuzhauben, z. B. gegenüberliegend, als 24Flach der 5 Würfel:  $f = 24, e = 32, k = 56, c = 0$ , also  $h = 3$ .

7. Die **Würfelkreuzhaube** kann in ihrer Entstehung noch vereinfacht werden durch das Netz 15. Durch Aufklappung



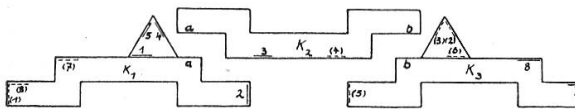
entstehen daraus wie 13 die beiden Würfel, aber unten offen, und daneben die zwei Quadrate  $G$  und  $H$  mit freien Rändern, welche samt den an-

deren Rändern der beiden Würfel von 10—17 zusammenhängend ein Quadrat doppelter Würfelkanten einschließen, welches an einem anderen Vielflach ohne weiteres eingesetzt werden kann, um damit die Kreuzhaube daran aufzusetzen. Aus dem Netz 15 entsteht durch Aufklappung diese Kreuzhaube 13 als ein offenes Möbiusband, indem die NetZRänder  $(1_1)$  an  $1_1$  und  $(2_1)$  an  $2_1$  sich schließen, als Wendestrecken im Innern der Kreuzhaube und so an ihr den Übergang von

$u$  zu  $o$  herstellen. Die Ränder 3—9 bilden dabei Kanten ohne Wendung, z. B. 3 an 3 mit  $o$  an  $o$ , so daß der Würfel von  $C$  außen  $o$  zeigt, und (8) an (8) mit  $u$  an  $u$  am Würfel unter  $D$ , welcher die Unterseite  $u$  des Netzes zeigt, d. h. die beiden Würfel wechseln außen in den Netzseiten. Diese Würfelkreuzhaube aus 15 ermöglicht ihre Aufsetzung besonders leicht, wenn sie an Stelle einer ganzen Fläche an einem Vielflach eingesetzt werden kann. Dabei hat man noch die Wendestrecken zwischen jenem Vielflach und der Kreuzhaube zu bestimmen, während die inneren Wendestrecken  $1_1$  und  $2_1$  in der Kreuzhaube  $K$  bleiben.  $K: f = 10, e = 14, k = 22$ , offen und ohne die vier freien Ränder an  $G$  und  $H$ .

**8. Prismen mit Kreuzhauben.** Als Beispiele zur Aufsetzung der Würfelkreuzhaube eignen sich besonders Prismen mit regelmäßigen Grundflächen und mit Quadraten als Seitenflächen. Für ein solches dreiseitiges Prisma ist die Anordnung der drei Kreuzhauben in 16 angegeben, wobei  $K_2$  hinausgerückt ist, der Übersichtlichkeit wegen, da  $K_2$  in  $a$  an  $K_1$  und in  $b$  an  $K_3$  anstoßen soll. An  $K_1$  und  $K_3$  sind die Grundflächen des Prismas als Dreiecke angefügt. Die bei der Aufklappung des Netzes 16 noch neu entstehenden Wendestrecken am Vielflach 17 sind 1 bis 8, außer den in den Kreuzhauben schon vorhandenen  $1_1$  bis  $6_1$ . Es kommen also zusammen 14 Wendestrecken vor, die am Prisma einen geschlossenen Zug von 10 Strecken bilden:  $1 1_1 2_1 2 3 3_1 4_1 4 5 5_1 6_1 6 7 8$ .  $f = 32, e = 45, k = 78, c = -1, h = 4$ .

16



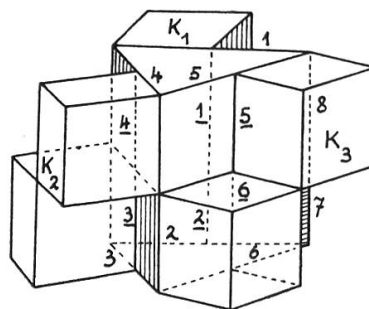
Netz zum Prisma mit Kreuzhauben  
 $n = 3$

geben, wobei  $K_2$  hinausgerückt ist, der Übersichtlichkeit wegen, da  $K_2$  in  $a$  an  $K_1$  und in  $b$  an  $K_3$  anstoßen soll. An  $K_1$  und  $K_3$  sind die Grundflächen des Prismas als Dreiecke angefügt. Die bei der Aufklappung des Netzes 16 noch neu entstehenden Wendestrecken am Vielflach 17 sind 1 bis 8, außer den in den Kreuzhauben schon vorhandenen  $1_1$  bis  $6_1$ . Es kommen also zusammen 14 Wendestrecken vor, die am Prisma einen geschlossenen Zug von 10 Strecken bilden:  $1 1_1 2_1 2 3 3_1 4_1 4 5 5_1 6_1 6 7 8$ .  $f = 32, e = 45, k = 78, c = -1, h = 4$ .

sichtlichkeit wegen, da  $K_2$  in  $a$  an  $K_1$  und in  $b$  an  $K_3$  anstoßen soll. An  $K_1$  und  $K_3$  sind die Grundflächen des Prismas als Dreiecke angefügt. Die bei der Aufklappung des Netzes 16 noch neu entstehenden Wendestrecken am Vielflach 17 sind 1 bis 8, außer den in den Kreuzhauben schon vorhandenen  $1_1$  bis  $6_1$ . Es kommen also zusammen 14 Wendestrecken vor, die am Prisma einen geschlossenen Zug von 10 Strecken bilden:  $1 1_1 2_1 2 3 3_1 4_1 4 5 5_1 6_1 6 7 8$ .  $f = 32, e = 45, k = 78, c = -1, h = 4$ .

Es kommen also zusammen 14 Wendestrecken vor, die am Prisma einen geschlossenen Zug von 10 Strecken bilden:  $1 1_1 2_1 2 3 3_1 4_1 4 5 5_1 6_1 6 7 8$ .  $f = 32, e = 45, k = 78, c = -1, h = 4$ .

17



Prisma mit Kreuzhauben  
Wendestrecken 1—8

*Allgemein:* Für ein  $n$  seitiges Prisma mit  $n$  seitlichen Kreuzhauben wird:  $f = 10 n + 2, e = 15 n, k = 26 n$ , also

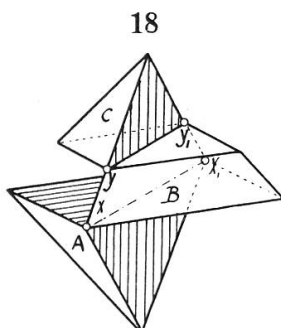
$c = 2 - n$  und  $h = 1 + n$  für  $n > 2$ . Nimmt man dazu noch die Fälle mit weniger Kreuzhauben, mit zwei oder einer, wie vorhin am Würfel, so gilt:  $h = 1 + K$  für die Zahl  $K$  der Kreuzhauben dieser einseitigen Vielflache aus Prismen und damit auch für beliebige konvexe Polyeder mit  $K$  aufgesetzten Kreuzhauben.<sup>2</sup>

## B. Zwei Doppelstrecken

### II. Zweiseitige Vielflache aus Oktaeder, Würfel und Tetraeder

Das gegebene Vielflache wird durch drei Ebenen, von deren Schnittgeraden nur zwei durch das Innere des Vielflaches gehen, in sechs Teile zerlegt, von welchen je drei Scheitelteile, die nur an den Doppelstrecken auf den Schnittgeraden zusammenstoßen, zwei Teilvielflache bilden. Ein solches Teilvielflache besteht also aus drei Zellen, zwischen denen drei Lücken zu den beiden Doppelstrecken eindringen. Aus den Netzen ergeben sich bei den Aufklappungen keine Wendestrecken, die Netze schließen sich dabei nämlich an allen ihren Rändern gleichseitig, wie am Beispiel 24. Die Mittelzelle zeigt dann an allen ihren Flächen die eine Netzseite, und die übrigen beiden Zellen zeigen überall die andere. Die Fälle mit zwei Doppelstrecken sind Ausartungen solcher mit drei.

1. **9Flach 18.** Das Oktaeder zerlegt in zwei kongruente zweiseitige 9Flache. Zwei Schnittebenen schneiden die zwei

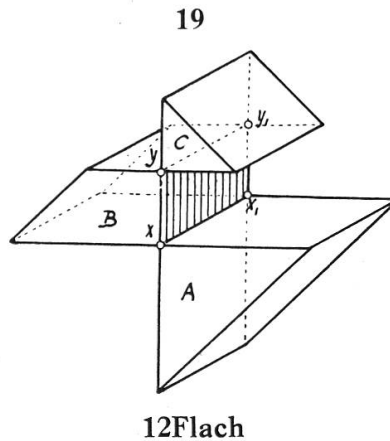


9Flach  
Doppelstrecken  
 $XX_1$  und  $YY_1$

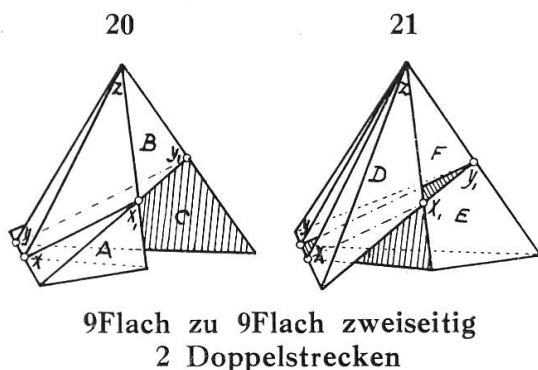
Quadrate der Achsenschnitte heraus, die einander in  $XX_1$ , als Doppelstrecke durchdringen. Die dritte Ebene ist parallel zu der einen gelegt und schneidet die andere in der zweiten Doppelstrecke  $YY_1$ . Von der Mittelzelle  $B$  aus ändert außen die Netzseite sowohl nach  $A$  als nach  $C$  an den Doppelstrecken, indem die Netzseite, die an  $B$  außen ist, an  $A$  und  $C$  nach innen kommt. Dies tritt auch umgekehrt von  $A$  nach  $B$

und von  $C$  nach  $B$  ein, so daß am ganzen 9Flach Zweiseitigkeit besteht.  $f = 9$ ,  $e = 10$ ,  $k = 17$ ,  $c = 2$ .

2. **12Flach 19.** Der Würfel zerlegt in zwei kongruente zweiseitige 12Flache. Zwei Diagonalebene schneiden einander in der Doppelstrecke  $XX_1$  und eine dritte Ebene parallel zu der einen schneidet die andere noch in der Doppelstrecke  $YY_1$ . Von den Zellen gilt das nämliche wie vorhin.  $f = 12$ ,  $e = 16$ ,  $k = 26$ ,  $c = 2$ ,  $h = 1$ .



3. **9Flach zu 9Flach, 20 und 21.** Das Tetraeder zerlegt in zwei verschiedene zweiseitige 9Flache. Die eine Doppelstrecke verbindet die Mitte  $X$  einer Kante mit der Mitte  $X_1$

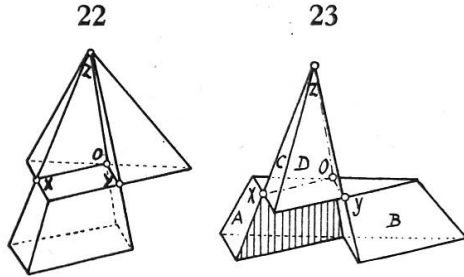


einer Fläche, und die zweite geht zur ersten parallel von der Mitte  $Y_1$  einer Kante nach  $Y$ . Die erste Schnittebene geht also von der Kante  $XY$  rechtwinklig zur Gegenkante. Die beiden anderen Ebenen gehen von den Doppelstrecken  $XX_1$  und  $YY_1$  nach der Spitze  $Z$  des

Tetraeders, so daß die dritte Schnittgerade durch  $Z$  geht, aber sonst außer dem Tetraeder liegt. Das 9Flach 21 hat daher eine Lücke von  $XX_1$  und  $YY_1$  nach  $Z$ , die also in  $Z$  geschlossen ist. Trotzdem bleibt auch dieses 9Flach zweiseitig. In  $Z$  berühren einander die Außenzellen von  $D$  und  $F$  als solche mit gleicher Netzseite. Für beide gilt:  $f = 9$ ,  $e = 9$ ,  $k = 16$ ,  $c = 2$ .

4. **9Flach zu 10Flach, 22 und 23.** Das Tetraeder zerlegt in 9Flach und 10Flach, beide zweiseitig. Die Doppelstrecken  $OX$  und  $OY$  verbinden Mitten von Tetraederflächen, und

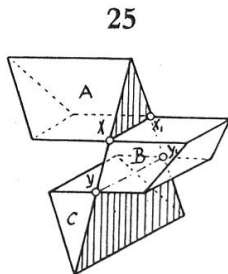
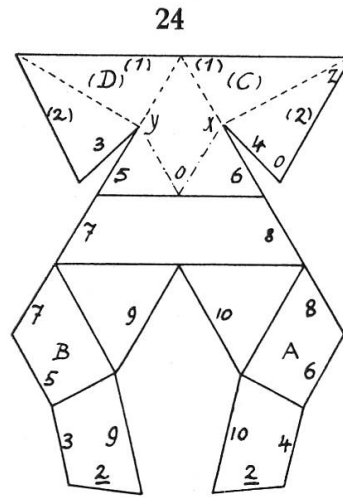
OZ geht nach der Spitze des Tetraeders, so daß die dritte Schnittgerade OZ der drei Ebenen hinten in die Tetraederfläche fällt, OZ ist daher am



9 Flach zu 10 Flach

9Flach 22 die dritte Doppelstrecke, die nicht als Kante zählt, sonst würden dort drei Flächen zusammenstoßen.  $f = 9, e = 11, k = 18, c = 2$ . Dagegen wird am 10Flach 23 OZ zu einer Kante.  $f = 10, e = 13, k = 21, c = 2$ . Das Netz 24 zu

diesem 10Flach schließt sich an allen Randseiten gleichseitig, (1) an (1) und (2) an (2) nach oben, alle übrigen nach unten, wie 7 an 7, sowie die Doppelstrecken 3 an 3 in OY und 4 an 4 in OX, so daß keine Wendestrecken entstehen. Doch tritt die Eigentümlichkeit ein, daß  $2 \equiv OZ$  zur Kante wird, aber ihre Verlängerung  $2_1$  zur dritten Doppelstrecke, die jedoch in einer Fläche liegt und nicht ins Innere des Tetraeders dringt. Als Ergänzungsvielfache bilden auch hier 9Flach und 10Flach zusammen das Tetraeder; die Zellen des einen passen in die Lücken des anderen, durch Parallelverschiebung in den Zeichnungen.



12Flach

5. 12Flach, 25. Das Tetraeder zerlegt in zwei kongruente zweiseitige 12Flache. In der Ebene, die durch eine Tetraederkante rechtwinklig zur Gegenkante geht, sind im senkrechten Achsenschnittdreieck die Doppelstrecken  $XX_1$  und  $YY_1$  parallel zur ersten Kante unten. Die anderen beiden Ebenen gehen je durch  $XX_1$  und  $YY_1$  parallel zur

Gegenkante oben, wodurch zwei Rechtecke aus dem Tetraeder geschnitten werden. Die Zellen von A und C für sich sind 5Flache und die Zelle von B ist ein 6Flach. Bei diesen

16 Flächen ist aber der erste Achsenschnitt dreimal gezählt, und die anderen, die Rechtecke, sind je zweimal gezählt, so daß 4 in Abzug kommt zum 12Flach. Die drei Achsenschnitte, als Flächen durch die Doppelstrecken, bilden als durchgehend den Zusammenhang der Zellen, als sonst einzelnen Körperteilen.  $f = 12$ ,  $e = 18$ ,  $k = 28$ ,  $c = 2$ .

Bei den Aufklappungen der Netze dieser Vielflache mit zwei Doppelstrecken bildet es jeweils eine Überraschung, wie die Flächen und besonders noch die geteilten Achsenschnitte überall mit gleichen Netzseiten sich aneinanderfügen, oder aber auch eine Enttäuschung, wenn man, infolge der entstehenden Durchdringungen, die Bildung von Möbiusbändern erwartet und dazu doch keine Wendestrecken entstehen. Der Grund liegt darin, daß an den drei Zellen in den zwei Doppelstrecken die Netzseiten fortgesetzt von außen nach innen übergehen in einer geschlossenen Aufeinanderfolge.

## C. Drei Doppelstrecken

Durch drei Ebenen kann der Raum in acht Dreikante zerlegt werden, unter denen je vier Scheitelachtel nur in Kanten zusammenstoßen. Diese Kanten sind als die drei Doppelgeraden zu betrachten, die sich in einem dreifach geltenden Punkte  $O$  schneiden, wenn die drei Ebenen dabei als zu einem Raumgebilde zusammengefaßt werden. Mit solchen drei Ebenen sollen nun konvexe Polyeder in Vielflache aus Scheiteloktanten zerlegt werden.

### a) $O$ liegt im Innern des Polyeders.

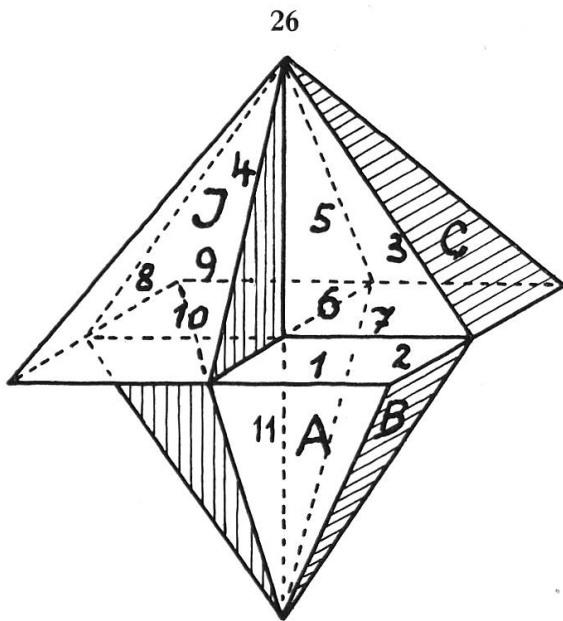
Durch die drei Schnittebenen wird das Polyeder in acht Teile zerlegt, von denen je vier Scheitelteile zusammen ein einseitiges Vielflach bilden.

### III. Oktaeder zerlegt in zwei einseitige Vielflache

Das einfachste Beispiel besteht in der Zerlegung des Oktaeders in zwei Heptaeder,<sup>3</sup> wobei aber gerade wegen der Einfachheit die allgemeinen Eigenschaften der vier Scheitel-

oktanten<sup>4</sup> übersehen wurden. Hier sei vorerst ein anderes, weiter einführendes Beispiel, am regelmäßigen Oktaeder, behandelt.

1. 11Flach, 26. Der eine Achsenschnitt am Oktaeder ist das wagrechte Quadrat, und die beiden anderen Achsenschnitte, durch die Hauptachse gelegt, sind Rauten, die nach den Mitten der Seiten jenes Quadrates gehen.



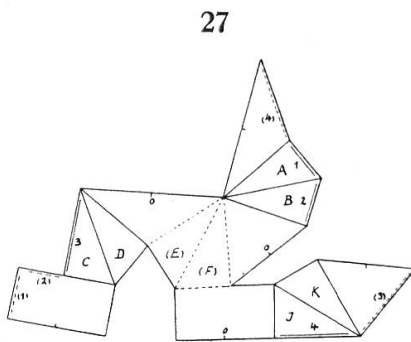
Wendestrecken: 1, 2, 3, 4 oder 4, 5, 6;  
1, 2, 7, 8, 9, 6; 1, 2, 7, 8, 10, 11, 5, 6

Das Oktaeder wird dadurch in acht Pyramiden zerlegt, die an der Hauptachse anstoßen. Vier Scheitelpyramiden davon als Zellen bilden neben vier Lücken das 11Flach, bestehend aus dem Quadrat, den beiden Rauten und aus acht rechtwinkligen Dreiecken. Je zwei dieser Dreiecke, wie *A* und *B*, die an einer Oktaederkante liegen, sind in symmetrischer Lage, weshalb sie bei Berücksichtigung der Netzseiten *o* und *u* im Netz 27 gegengleich bleiben, aber zu drei Dreiecken wie *C* und *D* an den anderen Kanten je deckungsgleich sind. Im Netz sind also zwei Arten *A* und *B* dieser Dreiecke zu unterscheiden. Doch sind die vier am Vielflach entstehenden Zellen, abgesehen von den Netzseiten, alle untereinander deckungsgleich, da jede für sich eine Symmetrieebene besitzt. Für die Herstellung der Netze wird jeder der drei Achsenschnitte durch die eine von seinen beiden Doppelstrecken halbiert: die eine Raute durch ihre längere Diagonale, die andere durch die kürzere, und das Quadrat durch eine Mittelparallele.

Das erste Netz 27 ist so zusammengesetzt, daß keine der an dem *o* kenntlichen Doppelstrecken zu einer *Wendestrecke* wird. Die Aufklappung dieses Netzes beginnt mit den an

schnitte, durch die Hauptachse gelegt, sind Rauten, die nach den Mitten der Seiten jenes Quadrates gehen. Das Oktaeder wird dadurch in acht Pyramiden zerlegt, die an der Hauptachse anstoßen. Vier Scheitelpyramiden davon als Zellen bilden neben vier Lücken das 11Flach, bestehend aus dem Quadrat, den beiden Rauten und aus acht rechtwinkligen Dreiecken. Je zwei dieser Dreiecke, wie *A* und *B*, die an einer Oktaederkante liegen, sind in symmetrischer Lage, weshalb sie bei Berücksichtigung der Netzseiten *o* und *u* im Netz 27 gegengleich bleiben, aber zu drei Dreiecken wie *C* und *D* an den anderen Kanten je deckungsgleich sind. Im Netz sind also zwei Arten *A* und *B* dieser Dreiecke zu unterscheiden. Doch sind die vier am Vielflach entstehenden Zellen, abgesehen von den Netzseiten, alle untereinander deckungsgleich, da jede für sich eine Symmetrieebene besitzt. Für die Herstellung der Netze wird jeder der drei Achsenschnitte durch die eine von seinen beiden Doppelstrecken halbiert: die eine Raute durch ihre längere Diagonale, die andere durch die kürzere, und das Quadrat durch eine Mittelparallele.

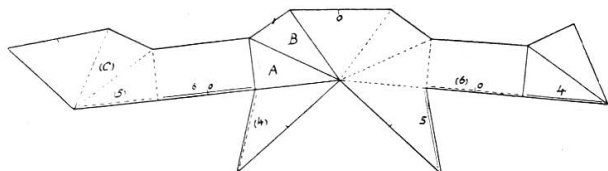
(E) und (F) anstoßenden halben Achsenschnitten um die gestrichelten Seiten nach oben, bis die drei *o* in einen Punkt fallen, nämlich in den dreifachen Punkt *O* als Schnitt der drei Doppelstrecken, womit das Achtel gebildet ist, das in 26 als unten hinten gezeichnet ist. Dann werden *B* und *A* entgegen nach innen geklappt, zur Bildung des Achtels unten vorn, wodurch die Rautenhälften an der Hauptachse aneinander kommen. Hierauf sind *D* und *C* einzuklappen, wodurch das an *C* angehängte Rechteck das früher aufgeklappte zum Quadrat ergänzt und schließlich auch *J* und *K*, wobei die an *K* angesetzte Rautenhälfte die Durchdringung ausführen muß durch die Hauptachse, damit (3) an 3 von *C* stößt, womit sich hier in 3 ein Möbiusband schließt, wie dies schon vorher geschah mit (4) an 4 sowie (1) an 1 und (2) an 2, als in den Wendestrecken 1 bis 4, welche den Achtelausschnitt begrenzen, der *E* und *F* gegenüber liegt. Dieser Ausschnitt oder diese Lücke zeigt *u*, wie auch die Gegenzelle, während die anderen drei Zellen *o* zeigen an ihren Flächen, außer in jener Lücke. In den Doppelstrecken schließen sich die geteilten Achsenschnitte gleichseitig *o* an *o*. Dieses Netz entspricht also vollständig dem 11Flach:  $f = 11$ ,  $e = 10$ ,  $k = 20$ ,  $c = 1$ .



Möbiusbänder 1 (1) bis 4 (4)

Beim Netz 28 dagegen wird die *Doppelstrecke* 6, die kürzere Rautendiagonale, zur *Wendestrecke* im quadratischen Achsenschnitt, indem darin die Oberseite 6 sich an die Unterseite (6) des Quadrates anschließt. Damit bilden die *Wendestrecken* das Dreieit 4 5 6. Dieser *Achsen-*schnitt könnte daher als 2 Flächen gelten und 6 als uneigentliche Kante, wovon aber abgesehen sei. Im Netz 29 werden zwei *Doppelstrecken* 6 und 7 zu *Wendestrecken*, die samt

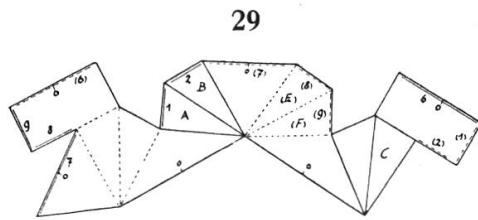
28



Eine Doppelstrecke als Wendestrecke



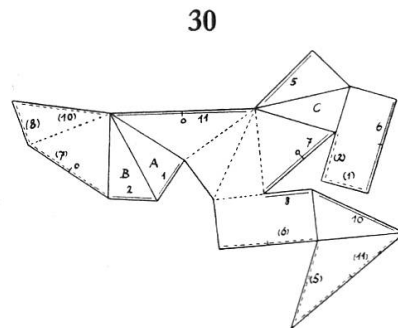
vier Kanten das überschlagene Sechseck 1, 2, 7, 8, 9, 6 mit O als Doppelpunkt bilden, als zusammengesetzt aus zwei Qua-



Zwei Doppelstrecken als Wendestrecken

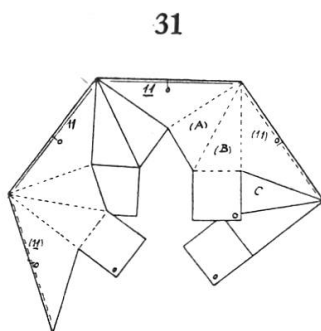
draten im ersten Achsenschnitt. Im Netz 30 werden alle drei Doppelstrecken zu Wendestrecken, und es entsteht damit ein Achteck 1, 2, 7, 8, 10, 11, 5, 6 mit dreifachem Punkt in O, wobei 1 und 2 an den Achsen ein Quadrat ab-

schließen, 8 und 10 ein windschiefes Viereck, während 5 ein Dreieck abgrenzt. Die Pyramide an 4, als ohne Wendestrecke, zeigt an allen ihren Flächen *u*, sonst wechseln *o* und *u* an den übrigen einzelnen Pyramiden.



Die drei Doppelstrecken als Wendestrecken

Eine *Doppelwendestrecke* entsteht durch Aufklappung des Netzes 31 zum 11Flach 26. Beide Rauten sind darin durch die längere Diagonale als Hauptachse  $11 \equiv 11_1$  geteilt, und das Quadrat ist in vier Quadrate um *o* zerlegt. Beim Aufklappen schließen sich beide Möbiusbänder in (11) an 11 und (11<sub>1</sub>) an 11<sub>1</sub> in der Hauptachse, indem darin jede der beiden Ebenen der Rauten die Seiten *o* und *u* des Netzes gegeneinander wendet, während die vier Quadrate des horizontalen Achsenschnittes alle gleichseitig mit *o* an *o* nebeneinander zu liegen kommen, was angenehm überrascht durch die Vereinfachung des Wendestrecken-zuges, der also damit hier nur aus der Doppelwendestrecke 11

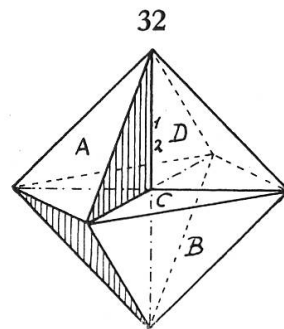


Doppelwendestrecke 11

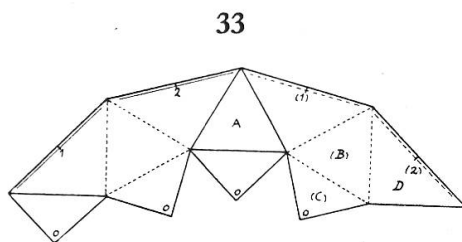
als Zweieck besteht. Dabei tritt noch die Vereinfachung ein, daß jede der vier Pyramiden für sich an allen ihren Außenseiten mit der gleichen Netzseite erscheint und

zwar in der nämlichen je für die zwei Pyramiden auf der gleichen Seite des Achsenschnittquadrates, während in den vorigen vier Fällen an den einzelnen Zellen beide Netzseiten vorkamen. Diese fünf ausgeführten Fälle des 11Flachs aus dem Oktaeder haben den Vorteil weitgehender Symmetrien, was durch Übersichtlichkeit die Bildung der Netze sehr erleichtert. Das Netz 27 läßt das ursprüngliche Netz des Heptaeders<sup>3</sup> in der Anordnung seiner Flächen erkennen.

2. 7Flach. Auch zum Heptaeder<sup>5</sup> 32 läßt sich mit Verwendung einer Doppelwendestrecke ein sehr schönes neues Netz 33 herstellen. Man halbiert zwei Achsenschnittquadrate des Heptaeders durch die nämliche Diagonale  $1 \equiv 2$ , wie dadurch  $D$  mit (2) entsteht, und teilt das dritte Quadrat durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke wie  $C$ . Im Netz 33 sind Flächen  $A$ ,  $B$  des Oktaeders abwechselnd mit halben Achsenschnitten wie  $D$  angeordnet und mit Vierteln  $C$ . Die an ( $B$ ) angrenzenden Flächen werden nach oben geklappt, so daß (1) und (2) zusammen kommen, in deren Mitte  $O$  fällt. Dann wird  $A$  mit seinen zwei anliegenden Flächen entgegengesetzt geklappt, so daß 2 mit (2) ein Möbiusband schließt, wie auch 1 mit (1) in der nämlichen Achse  $1 \equiv 2$ . Die Quadratviertel wie  $C$  fügen sich alle gleichseitig aneinander, so daß die vier  $o$  zusammenfallen in den dreifachen Punkt  $O$  der Achsenmitte. Dann zeigt jede der vier Zellen für sich vollständig die nämliche Netzseite, und zwar zeigen die von  $A$  und  $D$  die Oberseite  $o$  und die anderen die Unterseite  $u$ . Dieses Netz 33 hat auch den Vorteil,



Heptaeder  
Doppelwendestrecke  
 $1 \equiv 2$

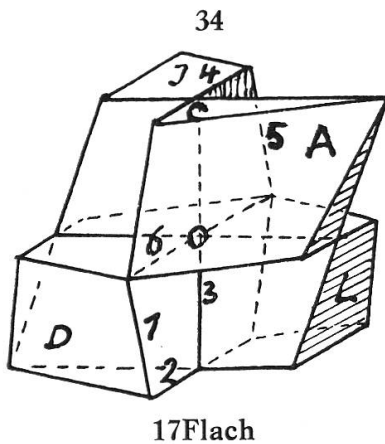


Netz des Heptaeders  
Möbiusbänder 1—(1), 2—(2),  
 $1 \equiv 2$

daß bei der Aufklappung keine Durchdringungen hergestellt werden müssen, bei denen wie bei früheren Netzen Achsenschnitthälften zwischen zwei anderen durchgeführt werden

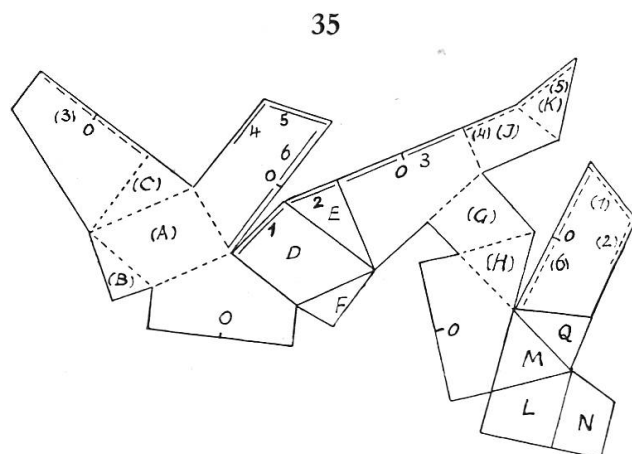
müssen, indem hier die Hälften offen gegen einander zu klappen sind. Das Heptaeder ist das einseitige Vielflach kleinster Flächenzahl, das durch Zerlegung des Oktaeders durch drei Schnittebenen entsteht, weil seine Kanten und Ecken alle in Schnittebenen liegen und daher keine seiner Flächen geteilt wird. Bei dem vorhin beschriebenen 11Flach liegen zwar auch alle Ecken des Oktaeders in Schnittebenen, aber 8 Kanten liegen außerhalb, so daß alle Oktaederflächen halbiert werden und daher 4 Flächen mehr entstehen als am Heptaeder.

3. 17Flach 34 aus dem Oktaeder. Die horizontal angenommene mittelparallele Ebene zu zwei Oktaederflächen schneidet ein Sechseck heraus, ebenso die dazu senkrechte Ebene durch einen Durchmesser des ersten Sechsecks; die dritte zu den ersten beiden rechtwinklige Ebene durch die Mitte der Sechsecke ergibt eine Raute. Von den 8 Teilen des zerlegten Oktaeders bilden je vier Scheitelzellen ein 17Flach.

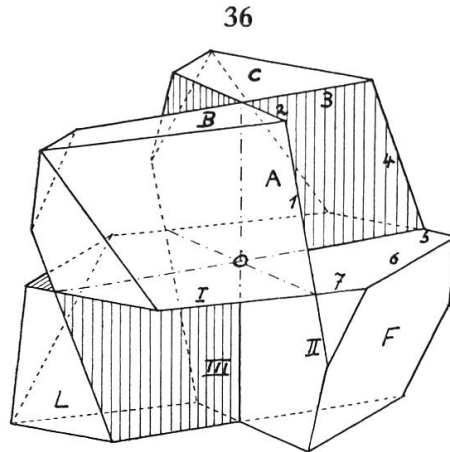


ein Sechseck heraus, ebenso die dazu senkrechte Ebene durch einen Durchmesser des ersten Sechsecks; die dritte zu den ersten beiden rechtwinklige Ebene durch die Mitte der Sechsecke ergibt eine Raute. Von den 8 Teilen des zerlegten Oktaeders bilden je vier Scheitelzellen ein 17Flach. Je zwei Zellen auf gleicher Seite der Raute sind deckungsgleich in Achsensymmetrie: 6Flache  $A \cong D$ ,

7Flache  $I \cong L$ . Aus dem Netz 35 entstehen bei der Aufklappung 6 Wendestrecken, darunter zwei Doppelstrecken 3 und 6 durch O; die übrigen 1 und 2 sowie 4 und 5 als Kanten schließen damit Vierecke ab, wodurch ein überschlagenes ebenes Sechseck gebildet ist. Im Netz zeigen (A) und D sowie (H) und M samt anstoßenden Flächen symmetrische Lage.  $f = f_3 + f_4 + f_6 = 8 + 7 + 2 = 17$ ,  $e = 20$ ,  $d = 36$ ,  $c = 1$ .



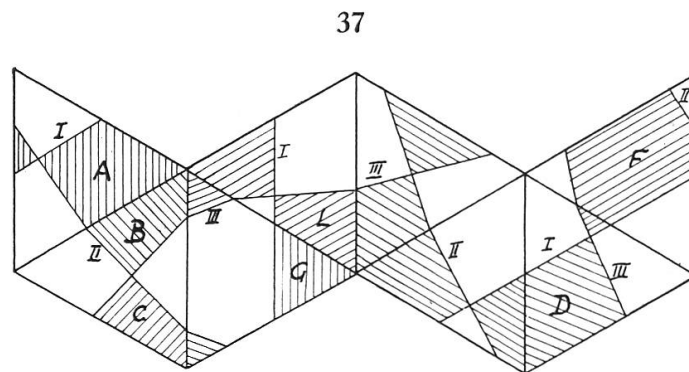
4. **19Flach.** Um eine möglichst große Zahl von Flächen zu erhalten, sind die Schnittebenen so zu legen, daß sie weder durch Ecken noch Kanten des Oktaeders gehen. Dies sei nun für einen Fall ausgeführt, der zwei kongruente 19Fläche 36 liefert. Die erste Schnittebene ist mittelparallel zu zwei Oktaederflächen, wodurch am regelmäßigen Oktaeder als Achsenschnitt I ein regelmäßiges Sechseck entsteht. Die übrigen zwei Ebenen II und III sind durch die Mitte dieses Sechsecks zu diesem senkrecht gelegt und zwar so, daß sie halbe rechte Winkel bilden mit einer Kante an einem zur ersten



19Flach. Wendestrecken 1 bis 7

Schnittebene parallelen Oktaederdreieck. Diese zwei Ebenen schneiden Sechsecke mit parallelen Gegenseiten von drei verschiedenen Längen heraus. Das Netz 37 des Oktaeders zeigt den Verlauf

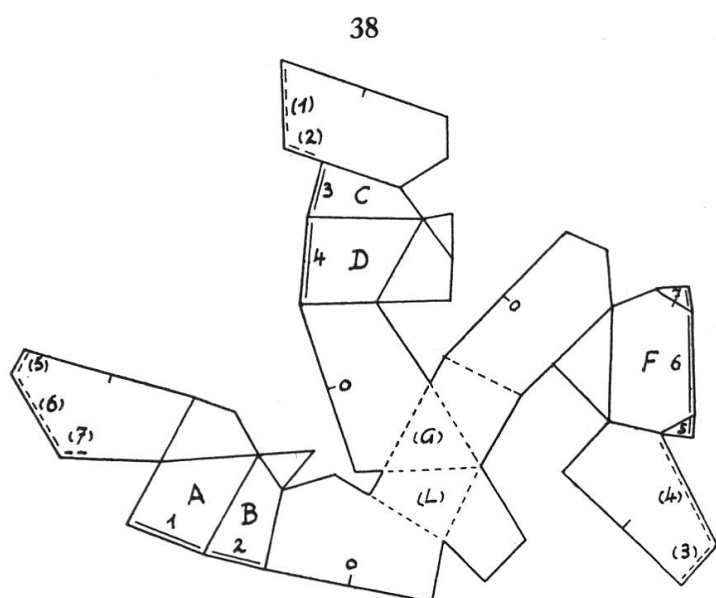
der Spuren I, II, III dieser Ebenen, wodurch 32 Flächenanteile entstehen, die in zwei gleiche Scheitelgebiete von je 16 Flächen zerfallen; eines der Scheitelgebiete ist durch Schraffur hervorgehoben.



Netz des Oktaeders. Teilung zum 19Flach

Diese 16 Flächen samt den drei Achsenschnitten gehören zu einem 19Flach. Man hat also für dessen Netz 38 diese 16 Flächen aus dem Oktaedernetz abwechselnd zusammensetzen mit den durch Doppelstrecken in 6 Fünfecke geteilten Achsenschnitten, an denen diese Doppelstrecken kenntlich sind durch die Punkte o. Dieses Netz 38 ist so zusammengesetzt, daß bei der Aufklappung, die bei (G) (L) beginnt, keine Doppelstrecken zu Wendestrecken

werden, weshalb diese als 1 bis 7 die Kantengrenze einer Lücke bilden, als des Oktantenausschnittes, der gegenüber



Netz des 19Flachs. Wendestrecken 1 bis 7

der Zelle an  $G$  und  $L$  liegt. Das entstandene 19Flach 36 hat die mittelsenkrechte Ebene der Kante 6 zur Symmetrieebene. Dadurch sind die Zellen  $B$  und  $C$  zueinander gegengleich, während die von  $F$  und  $L$  voneinander verschieden sind. Jede der vier Zellen ist für sich allein ein 7Flach, wobei aber jeder Achsenschnitt 4 mal gezählt ist. Die Zelle  $L$  zeigt vollständig  $u$ , wie die Gegenlücke begrenzt von 1 bis 7, die übrigen Zellen zeigen außen  $o$ . Am 19Flach sind noch 3 Ecken einer Oktaederfläche erhalten, die in 36 links von  $L$ ,  $B$ ,  $C$  liegen; dazu sind 24 neue Ecken an den drei Achsenschnitten entstanden, an jedem 10, wobei 6 Ecken zweimal gezählt sind, nämlich die in den Enden der Doppelstrecken.  $f = 19$ ,  $e = 27$ ,  $k = 45$ ,  $c = 1$ .

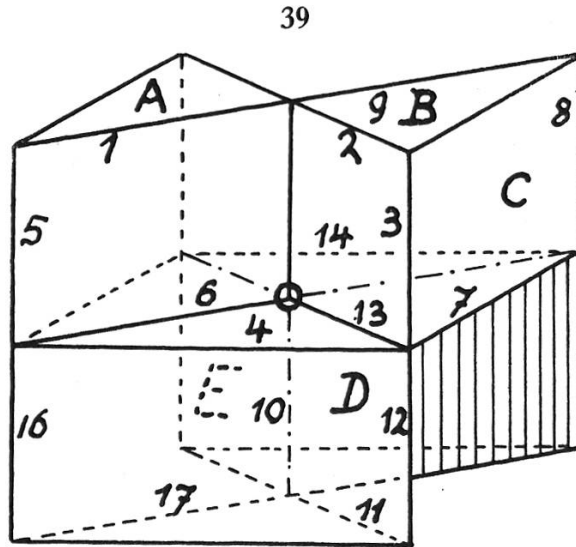
Damit sind vier Fälle der Zerlegung eines Oktaeders in zwei kongruente einseitige Ergänzungsvielfläche dargestellt. Die Flächenanzahlsummen beider Teilvielfläche betragen dabei 14, 22, 34, 38. Um je zwei verschiedene Vielfläche und andere Werte dieser Summen zu erhalten, müßte man noch Schnittebenen anderer Lagen anwenden mit Vermeidung von Symmetrien, was die Bildung der Netze schwieriger gestaltet.

#### IV. Würfel zerlegt in zwei einseitige Vielfläche

1. 11Flach. Um Teilvielfläche kleiner Flächenzahl zu erhalten, verwendet man am Würfel Diagonalebene als Schnittebenen, da diese je zwei Kanten des Würfels enthal-

der Zelle an  $G$  und  $L$  liegt. Das entstandene 19Flach 36 hat die mittelsenkrechte Ebene der Kante 6 zur Symmetrieebene. Dadurch sind die Zellen  $B$  und  $C$  zueinander gegengleich, während die von  $F$  und  $L$  voneinander verschieden sind. Jede der vier Zellen ist für

ten. Zuerst sei das einfachste Beispiel betrachtet, als das mit zwei Diagonalebene und der zu diesen senkrechten Mittel-ebene, wodurch der Würfel in acht dreiseitige Prismen zerlegt wird, von denen je vier in Scheitellage das einseitige 11Flach der vier Prismen 39 bilden. Die Achsenschnitte sind dabei zwei Rechtecke und ein Quadrat, welche für die Herstellung der Netze halbiert werden bezüglich in zwei längere und in zwei kürzere Rechtecke und in zwei Dreiecke.

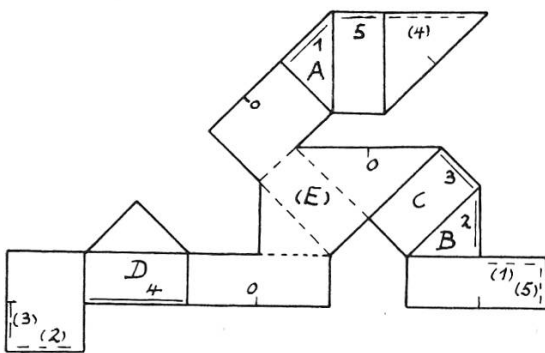


11Flach

Wendestrecken: 1, 2, 3, 4, 5 oder  
 4, 6, 7; 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12;  
 2, 3, 13, 14, 6, 16, 17, 10  
 Doppelstrecken: 6, 10, 13

Das erste Netz 40 ist so zusammengesetzt, daß keine Doppelstrecke zur Wendestrecke wird, so daß die Wendestrecken 1 bis 5 die Lücke umgrenzen, welche dem Prisma gegenüberliegt, das E als eine Fläche hat. Um (E) und das anstoßende Dreieck sind im Netz die drei verschiedenen Achsenschnitt-hälften angefügt, bei deren Aufklappung die drei Punkte o zusammenfallen in O, wodurch eines der Prismen geschlossen wird. Dann lassen sich die übrigen drei Prismen, die an A, B, D nacheinander einklappen unter Bildung der Durchdringungen für das 11Flach.

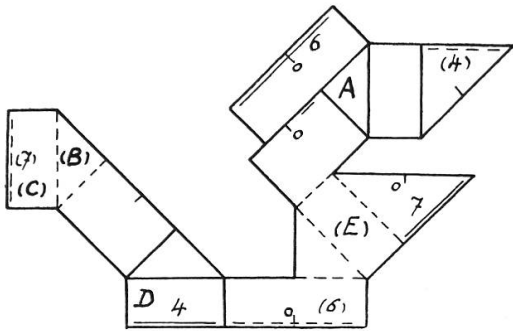
40



Wendestrecken ohne die Doppelstrecken

$f = 11, e = 14, k = 24, c = 1$ . Beim Versuch zur Herstellung eines Netzes wird man nicht immer sogleich diesen ersten Hauptfall 40 erhalten, sondern eher einen der folgenden Fälle. Man hat dann Flächen mit Wendestrecken in Vertauschung

41



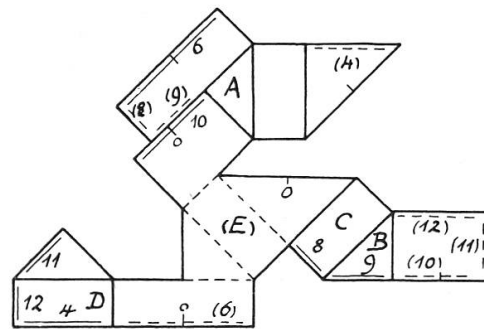
Eine Doppelstrecke als Wendestrecke

rigen Wendestrecken 4 und 7 als Kanten das Dreieck 4, 6, 7 bilden, als einfachsten Streckenzug für mehrere Wendestrecken. Aus dem Netz 42 entstehen zwei Doppelstrecken 6 und 10 als Wendestrecken, mit denen 8 und 9 ein Rechteck abschließen und 11, 12, 4 ein windschiefes Fünfeck, so daß zusammen ein überschlagenes Siebeneck entsteht mit einem Doppelpunkt in O. Aus dem Netz 43 entstehen bei der Aufklappung alle drei Doppelstrecken 6, 10, 13 als Wendestrecken, mit denen 2, 3 und 16, 7 zwei Rechtecke bilden, während 14 damit ein Dreieck schließt. Diese beiden Rechtecke und das Dreieck liegen in den drei verschiedenen Ebenen der Achsenschnitte und sie setzen ein zweifach überschlagenes Achteck zusammen mit O als dreifachem Punkt.

an diese so anzusetzen, daß die Achsenschnitthälften mit ihren Wendestrecken eine Wendung erfahren, so daß die Wendestrecken, die in Doppelstrecken fielen, damit verschwinden.

Aus dem folgenden Netz 41 wird 6 mit (6) als Doppelstrecke zu einer Wendestrecke, mit welcher die übrigen Wendestrecken 4 und 7 als Kanten das Dreieck 4, 6, 7

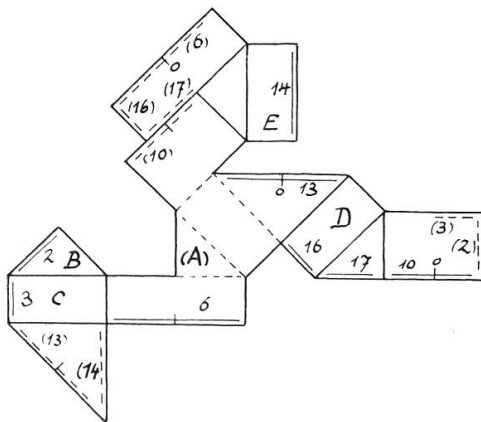
42



Zwei Doppelstrecken als Wendestrecken

während 14 damit ein Dreieck schließt. Diese beiden Rechtecke und das Dreieck liegen in den drei verschiedenen Ebenen der Achsenschnitte und sie setzen ein zweifach überschlagenes Achteck zusammen mit O als dreifachem Punkt.

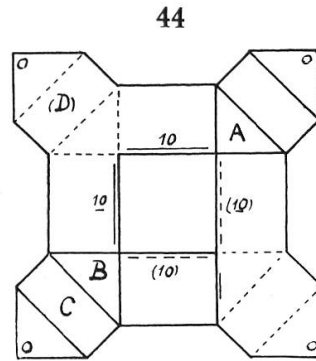
43



Drei Doppelstrecken als Wendestrecken

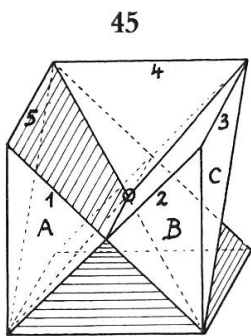
Auch für dieses 11Flach 39 läßt sich mittelst einer Doppelstrecke

pelwendestrecke ein sehr schönes übersichtliches Netz **44** herstellen. Die beiden Rechtecke der Diagonalebene werden längs der Hauptachse 10 geteilt, und das Quadrat der Mittelebene wird längs der Achsen 6 und 13 in die vier Dreiecke mit der Ecke O zerlegt. Zur Klappung werden die beiden Rechtecke, die an A liegen, nach unten geklappt, so daß 10 und  $(10_1)$  zusammenfallen. Dann sind die zwei größeren Rechtecke, die an B liegen, hinaufzuklappen, daß  $10_1$  und  $(10)$  auch in die vorherige Achse 10 fallen. Hierauf lassen sich die vier äußeren Dreiecke einfügen, so daß die vier o alle in die Mitte O der Achse 10 fallen, wobei diese vier Dreiecke mit gleichen Netzseiten sich aneinander legen, womit die vier Prismen geschlossen werden. Die Möbiusbänder schließen sich von 10 nach  $(10)$  und von  $10_1$  nach  $(10_1)$  beide in der Hauptachse, die damit zur Doppelwendestrecke wird, in welcher beide Rechtecke die Netzseiten o und u wenden.



Netz des 11Flachs  
Doppelwendestrecke  
 $10 \equiv 10_1$

2. **10Flach.** Um aus dem Würfel ein Vielflach von noch kleinerer Flächenanzahl zu erhalten, ist auch die dritte



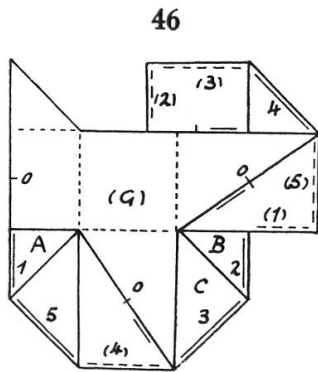
10Flach

Schnittebene, wie die ersten beiden, durch zwei Gegenkanten zu legen, wodurch zwei kongruente einseitige 10Fläche 45 entstehen. Die Doppelstrecken sind dabei zwei Würfeldiagonalen, die von den Enden der Kante 4 ausgehen, und die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenflächen, die von der gemeinsamen Ecke der Dreiecke A und B aus durch O geht. Zwei der Achsenschnitte werden für das Netz durch

eine ihrer Diagonalen in Dreiecke geteilt, und der dritte wird durch die kürzere Mittelparallele in zwei Rechtecke zerlegt. Das Netz **46** ergibt bei der Aufklappung die Wendestrecken 1 bis 5, welche die Lücke gegenüber der Grundfläche G be-



grenzen. Über  $G$  entsteht ein dachförmiges Prisma, über dessen First ein Vierflach aufsitzt, das von  $O$  bis zur Kante 4 reicht; über den zwei seitlichen Gratkanten des Prismas sind



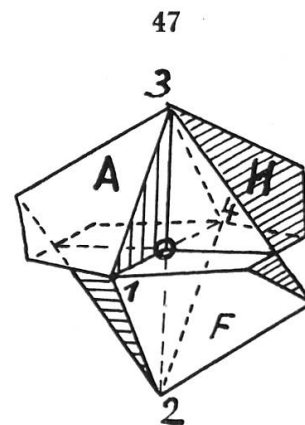
Netz des 10Flachs

5Fläche, wie das mit  $B$  und  $C$ . Das Grundprisma zeigt  $u$  des Netzes, und die übrigen Zellen zeigen  $o$ , außer in der oberen Lücke mit  $u$ . Die Grundzelle kann durch Drehung in ihre Gegenlücke gebracht werden, als deckungsgleich, weil sie eine Symmetrieebene besitzen, wie auch das Vielflach an 4 und seine Gegenlücke unten vorn. Dagegen sind die seitlichen 5Fläche, weil für sich ohne Symmetrie, zu ihren Gegenlücken gegen-

gleich und können dafür mit der seitlichen Nebenlücke durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Das ganze 10Flach hat die mittelsenkrechte Ebene zu 4 als Symmetrieebene.  $f = 10, e = 10, k = 19, c = 1$ .

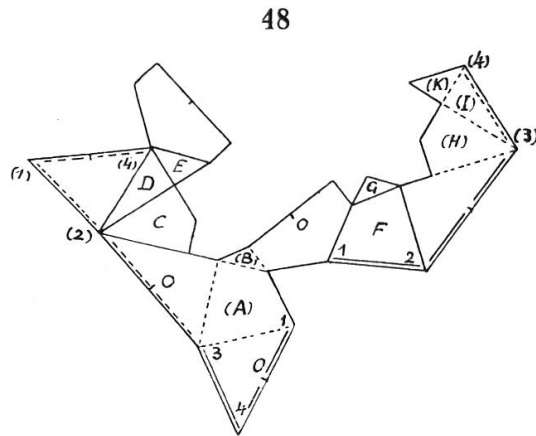
*Satz:* Ein Würfel wird durch drei seiner Diagonalebene in zwei kongruente einseitige 10Fläche zerlegt, als Vielflache kleinster Flächenanzahl durch drei Schnittebenen aus dem Würfel zu erhalten.

3. **13Flach 47.** Die mittelsenkrechte Ebene zu einer Körperdiagonale des Würfels schneidet ein Sechseck heraus, eine zweite Ebene, gelegt durch die Diagonale und eine Kante, ein Rechteck und die dritte Ebene zu den ersten beiden rechtwinklig durch die Mitte  $O$  eine Raute. Die Würfelflächen werden durch die Spuren dieser drei Ebenen in 20 Teilflächen zerlegt, in denen zwei gleiche Scheitelgebiete entstehen, jedes mit 10 Flächen in 4 Gruppen angeordnet. Jede Gruppe bildet die äußeren Flächen einer Zelle des 13Flaches. Die Zellen, je auf gleicher Seite des Rechtecks, können durch eine halbe Drehung um die zum Rechteck senkrechte

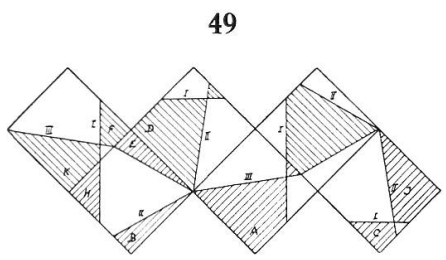


13Flach

Achse zur Deckung gebracht werden: 5Fläche  $A \cong F$  und 6Fläche  $H \cong C$ . Aus dem Netz 48 werden durch die Aufklappung zum 13Flach 47 zwei Doppelstrecken 1, 4 und 2, 3 zu Wendestrecken, mit denen die übrigen als Kanten 1, 2 und 3, 4 ein überschlagenes Viereck 1, 2, 3, 4 bilden. Die äußeren Flächen der Zellen  $A$  und  $H$  zeigen  $u$  und die von  $F$  und  $C$  zeigen  $o$  der Netzseiten. Die inneren Flächen in den Lücken zeigen nur je zu zweien gleiche Netzseite.  $f = f_3 + f_4 + f_6 = 6 + 6 + 1 = 13$ ,  $e = 14$ ,  $k = 26$ ,  $c = 1$ .



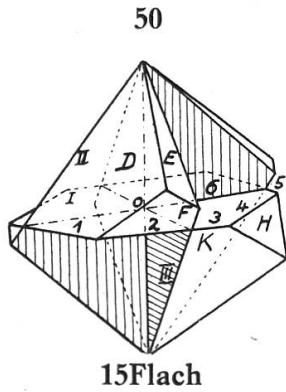
4. 15Flach 50. Um aus dem Würfel Vielfache noch größerer Flächenanzahl als vorhin zu erhalten, werden die Schnittebenen so angenommen, daß sie durch keine seiner Kanten gehen. Die Ebene I, mittelsenkrecht zu einer Würfeldiagonale als Hauptachse, schneidet ein Sechseck heraus, und die weiteren beiden Ebenen II und III, durch die Hauptachse symmetrisch zu einem Durchmesser des vorigen Sechsecks und zu einander rechtwinklig, ergeben zwei Rauten. Die Spuren dieser drei Ebenen zerlegen jede der Würfelflächen 49 in vier Teile, so daß jedes der beiden gleichen Scheitelgebiete, von denen



Netz des Würfels  
Teilung zum 15Flach

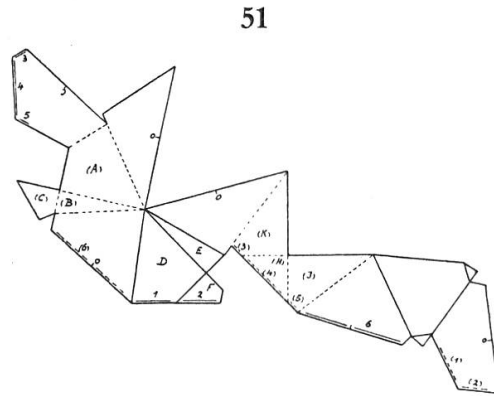
eines schraffiert ist, 12 Flächen erhält, die mit den 3 Achsenschnitten je ein 15Flach 50 bilden. In dessen Netz 51 ist jeder der Achsenschnitte halbiert, längs einer der Doppelstrecken mit der Mitte  $o$ , und abwechselnd angeordnet mit Flächen eines Scheitelgebietes. Die Aufklappung beginnt mit  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  nach oben zu einer Würfecke, zu der die anliegenden drei halben Achsenschnitte sich auch zu einem rechtwinkligen Dreikant gegenüber fügen, mit den drei  $o$  in

der Mitte  $O$ , über welche hinaus dann Hälften der Doppelstrecken ragen. Dann sind daran  $D, E, F$  nach innen zu klappen, und die an  $E$  angefügte Rautenhälfte schließt sich gleichseitig an die neben ( $A$ ). Doch entsteht bei der Einklappung von ( $K$ ), ( $H$ ), ( $I$ ) bei der zweiten Raute eine Wendung längs 6, wodurch 6 für ein Möbiusband zu einer Wendestrecke wird, die mit den übrigen Wendestrecken 1 bis 5 als Kanten ein Sechseck in der Mittelebene bildet. Das 15Flach hat drei der Würfel ecken noch erhalten, gebildet von den

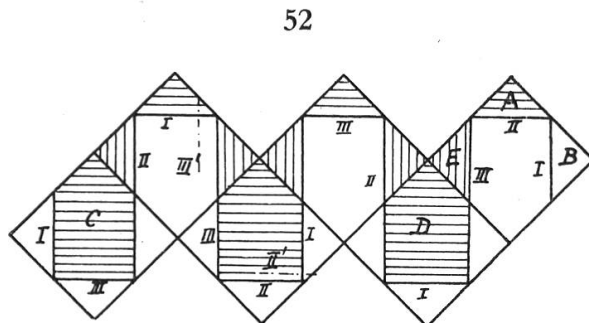


Flächen  $ABC, DEF$  und  $JKH$ , während in den beiden Endpunkten der Hauptachse nur Eckpunkte des Würfels bleiben, weil je zwei Scheitelviertel herausgenommen sind. Das 15Flach hat als Symmetrie ebene die mittelsenkrechte Ebene der Kante 4. Zur Zelle von  $D$ , die  $o$  zeigt, besteht eine symmetrische, die aber  $u$  zeigt.

Diese beiden Zellen sind für sich 5Flache, die anderen beiden sind verschiedene 6Flache und je in sich symmetrisch. Das nämliche gilt auch von deren Gegenlücken, die als zu den



Wendestrecken 1 bis 6

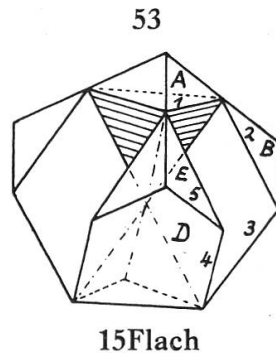


Netz des Würfels  
Teilung zum 15Flach  
17- und 18Flach

Zellen zentrisch symmetrisch, wegen der Symmetrie des ganzen 15Flachs, auch ein solches bilden.  $f = 15, e = 18, k = 32$ .

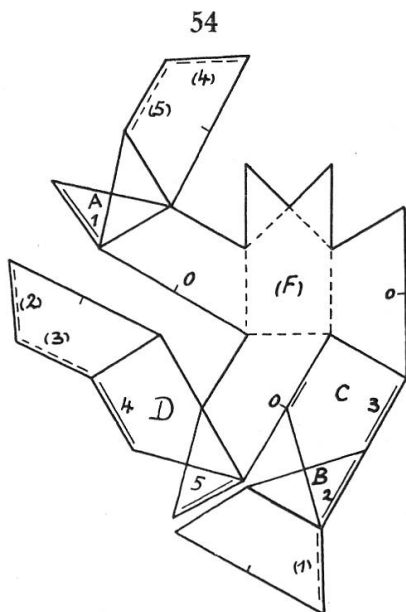
5. 15Flach, 17- und 18Flach. Um aus dem Würfel Teilvielflache noch größerer Flächenzahl zu erhalten, sind die Schnitt-

ebenen so zu nehmen, daß in ihnen nicht nur ein einzelnes Sechseck wie vorhin vorkommt, sondern mehrere. Daher werde zu jeder von drei Würfeldiagonalen ihre mittelsenkrechte Ebene gelegt. Deren Spuren I, II, III zerlegen die Flächen des Würfels in 24 Teile, von denen 12 Flächen, wie die in 52 schraffierten, ein Scheitelgebiet bilden. Zu diesen 12 Flächen kommen noch die drei Sechsecke der Achsenschnitte, um zusammen das 15Flach 53 zu bilden. Dieses besteht aus drei seitlichen prismatischen deckungsgleichen Zellen als 6Flache, wie das an *D* und *E*, zwischen denen drei Lücken einspringen, und aus einer oben eingefügten Doppelpyramide an *A*, unter welcher ein hohles Gegendreikant als Lücke eindringt. Damit ist ein sehr hübsches Polyeder entstanden, das zu seinem Er-



15Flach

gänzungspolyeder aus seinen Lücken deckungsgleich ist. Das zugehörige Netz 54 ist so zusammengesetzt, daß nach der Aufklappung, die bei (*F*) nach oben beginnt, die Wendestrecken 1 bis 5 eine seitliche Lücke umgrenzen, die *u* zeigt, während an den drei sie umgebenden Zellen *o* des Netzes sichtbar wird. Dieser Lücke gegenüber liegt die vierte Zelle an *F*, die auch *u* zeigt wie diese Lücke. Die oberen vier Ecken des Würfels sind am 15Flach erhalten, während die unteren fehlen, wegen der Lücken. Die Hauptachse ist diejenige Würfeldiagonale, zu der

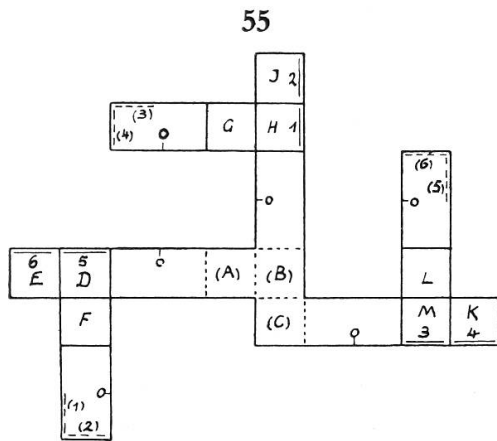


Netz des 15Flachs

die mittelsenkrechte Ebene nicht gelegt wurde. Die Doppelstrecken verbinden die Mitten der drei Gegenkantenpaare, welche von den Enden der Hauptachse ausgehen.  $f = 15$ ,  $e = 16$ ,  $k = 30$ ,  $c = 1$ .

Um nun die größere Zahl der Flächen zu erhalten, die damit noch nicht eingetreten ist, weil die Sechsecke gemein-

same Ecken in Würfelkanten haben, müssen Schnittebenen noch verschoben werden, damit Seiten der Sechsecke im Innern der Würfelflächen einander schneiden. Nimmt man in



Möbiusbänder 1—(1) bis 6—(6) ohne Doppelstrecke

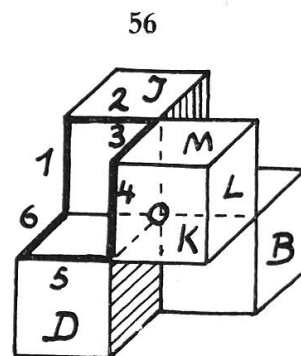
52 dazu z. B. den Schnitt III, der nach III<sup>1</sup> parallel verschoben wird, so entsteht ein 17-Flach, indem am vorigen 15-Flach noch zwei kleine Dreiecke neben A dazukommen. Verschiebt man dazu noch eine zweite Ebene, wie II nach II<sup>1</sup>, aber um einen anderen kleinen Abstand als III, so entsteht ein 18-Flach, von entsprechender Gestalt wie 53, nur noch mit neuen kleinen Dreiecken bei

Endpunkten von Doppelstrecken; auch erhalten die Seitenflächen wie D verschiedene Breite. Damit ist das Teilvielflach größter Flächenzahl aus dem Würfel durch drei Schnittebenen erhalten.

Diese Zerlegungen des Würfels ergaben für die beiden Teilvielfläche als Summen aus der Anzahl ihrer Flächen die Zahlen 20, 22, 26, 30, 34, 36, die über einen Intervall von 16 sich erstrecken, im Vergleich zu 24 beim Oktaeder.

### Verschiedene Arten der Netze.

Das 15-Flach 56 der «vier Würfel»<sup>4</sup> hat, mit seinen 12 kleinen Quadraten und den 3 großen doppelter Seitenlänge, von denen der kleinen, unter den einseitigen Vielflachen mit drei Doppelstrecken den Vorzug einfacher und übersichtlicher Zusammensetzung seiner Flächen, wodurch es besonders geeignet ist, die verschiedenen Arten der Netze zu zeigen, aus denen es durch Aufklappung entstehen kann. Dabei bilden sich Möbiusbänder durch Wendestrecken an den Schlie-



ßungsstellen von Randseiten des Netzes, welche am Vielfach geschlossene Streckenzüge zusammensetzen. Hier soll ihr verschiedener Verlauf gezeigt werden, besonders in bezug auf die Doppelstrecken. Dabei müssen für die Anordnung der Flächen in den Netzen die drei großen Quadrate längs Doppelstrecken geteilt werden, um beim Aufklappen die Durchdringungen zu ermöglichen. Die Elemente dieses 15Flachs sind:  $f = 15$ ,  $e = 22$ ,  $k = 36$ ,  $c = 1$ ,  $h = 2$ .

### 1. Möbiusbänder mit Wendestrecken ohne Doppelstrecke.

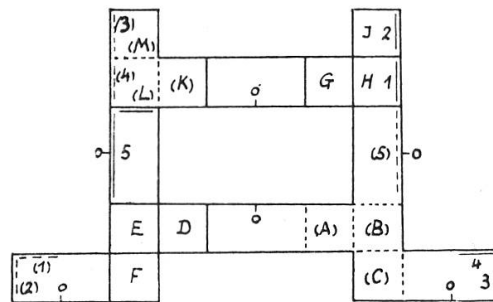
Das erste Netz 55 ist so gezeichnet, daß durch die Aufklappung keine Wendestrecken in Doppelstrecken fallen, daß also die beiden Rechtecke, in welche jeder der drei Achsenschnitte zerlegt ist, wieder mit gleichen Netzseiten zusammenstoßen, mit Oberseite  $o$  wieder an  $o$  und damit auch Unterseite  $u$  des Netzes wieder an  $u$ . Um dies an der Herstellung des Modells leicht zu ersehen, verwende man dazu Zeichnungspapier auf einer Seite liniert. Die Aufklappung beginnt mit  $(A)$   $(B)$   $(C)$  nach oben, wodurch mit den anschließenden drei Rechtecken der Würfel an  $B$  entsteht, der außen  $u$  zeigt, während die anderen drei Würfel  $o$  zeigen, nach Ausführung der übrigen Klappungen nach innen mit den Durchdringungen an den Doppelstrecken der Rechtecke. Die Wendestrecken 1 bis 6 begrenzen den Oktantenausschnitt oder die Lücke, die gegenüber dem Würfel  $B$  liegt. Diese Lücke zeigt auch  $u$ , wie dieser Gegenwürfel.

Diese Art des Netzes entspricht vollständig der Flächenanzahl 15, weil keine Änderung in den Netzseiten  $o$  und  $u$  bei der Zusammensetzung der Rechtecke als Teile der Achsenschnitte erfolgt. Anders ist es bei den übrigen folgenden Netzen, wo Wendestrecken in Doppelstrecken fallen, wobei dann nach der Aufklappung die Netzseite  $o$  des einen Rechteckes mit  $u$  des anderen zusammenstößt. Dann könnte die dabei entstehende Wendestrecke als eine Kante betrachtet werden, wobei die beiden Rechtecke als zwei Flächen, statt des einen von ihnen gebildeten Quadrates, zu zählen wären. Man hätte im nächsten Fall  $f = 16$ ,  $e = 22$ ,  $k = 37$ . Doch ist vorzuziehen, von dieser Weiterung abzusehen, um nicht das

schließlich gleiche entstehende Vielflach je nach seinem Netz anders zu bezeichnen. Um so eher, als die Charakteristik  $c = 1$  dabei gleich bleibt und die besondere Aufmerksamkeit hier dem Verlauf der Wendestrecken gilt.

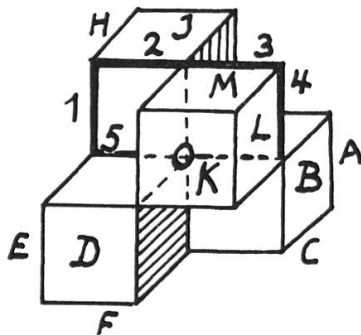
2. Eine Doppelstrecke als Wendestrecke. Dieses Netz<sup>4</sup> 57 zeigt die schönste in sich geschlossene Anordnung der Flächen, während das vorige Netz das einfachste und übersichtlichste ist. Durch die Aufklappung, die am besten mit (A) (B) (C) beginnt, wird die Doppelstrecke 5 zugleich zur Wendestrecke, indem die Oberseite 5 sich dabei an die Unterseite (5) anschließt. Die Wendestrecken 1 bis 4 bilden 58 an 5 als Längsseite ein Rechteck, das von der Lücke bei 1 zu einer Scheitellücke dazu bei 4 geht. In der ersten Lücke zeigt das Rechteck  $u$ , in der anderen  $o$ . Dieses Rechteck ist nicht gewendet, die Wendung in 5 besteht für die beiden Rechtecke in dem wagrechten Achsenschnitt. An B und L zeigen diese beiden Würfel  $u$ , die beiden anderen Würfel zeigen  $o$  an E und H. In den Enden der Doppelstrecke 5, die zugleich Wendestrecke ist, stoßen also Quadrate gleicher Netzseiten zusammen. Sonst stoßen in Enden von Doppelstrecken Quadrate ungleicher Netzseiten zusammen: J von  $o$  mit M von  $u$  und K von  $u$  mit D von  $o$ .

57



Eine Doppelstrecke als Wendestrecke 5

58

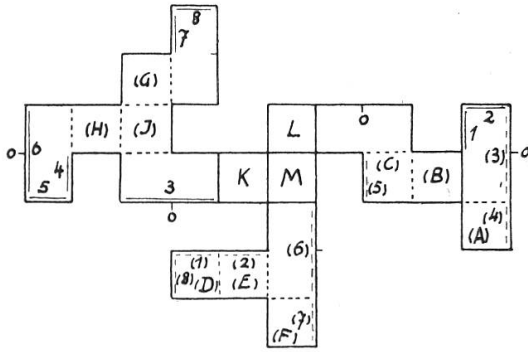


zusammen. Sonst stoßen in Enden von Doppelstrecken Quadrate ungleicher Netzseiten zusammen: J von  $o$  mit M von  $u$  und K von  $u$  mit D von  $o$ .

3. Zwei Doppelstrecken als Wendestrecken. Aus dem Netz 59 entstehen durch die Aufklappung 8 Wendestrecken am 15Flach 60, unter denen sich zwei Doppelstrecken 3 und 6 befinden. Mit Hälften von diesen bilden die Kanten 4 und 5 ein Quadrat, während die anderen Hälften von O aus noch mit 7, 8, 1, 2 ein windschiefes Sechseck bilden, so daß im

ganzen damit ein räumliches Achteck entsteht mit einem Doppelpunkt in O, durch den die überschlagenen Seiten 3 und 6 gehen. Die Kanten 4 und 5 sind in der Ebene von 3 und 6, während 1, 2 und 7, 8 je in den andern Ebenen der Achsenschnitte liegen. Der Würfel von K zeigt an allen seinen Flächen o und der von G gleicherweise u, während die andern beiden Würfel an ihren Außenflächen u zeigen. Im übrigen zeigt der Würfel von D an seinen beiden Achsenschnittflächen o, der von B aber nur an der Fläche 4, 5, so daß dieser Würfel noch eine Achsenschnittfläche mit u hat, die 6 anliegt. Die drei Doppelstrecken endigen am Würfel K an drei Ecken, wo o mit u zusammenstößt, sonst endigen sie noch an drei Ecken, in denen u mit u an den gemeinsamen Quadraten zusammen kommt.

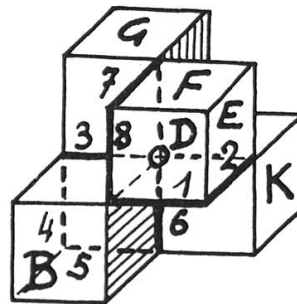
59



Zwei Doppelstrecken als Wendestrecken 3 und 6

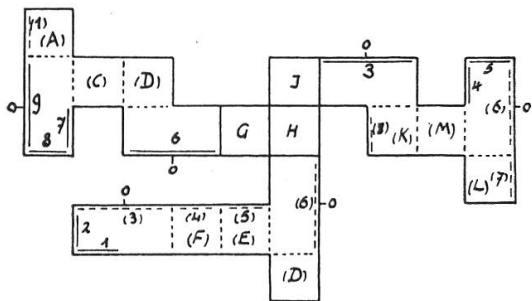
B aber nur an der Fläche 4, 5, so daß dieser Würfel noch eine Achsenschnittfläche mit u hat, die 6 anliegt. Die drei Doppelstrecken endigen am Würfel K an drei Ecken, wo o mit u zusammenstößt, sonst endigen sie noch an drei Ecken, in denen u mit u an den gemeinsamen Quadraten zusammen kommt.

60



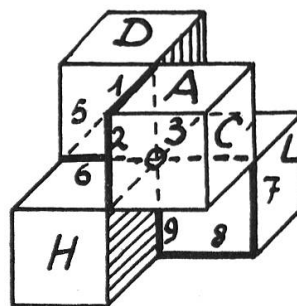
4. Alle drei Doppelstrecken als Wendestrecken. Aus dem Netz 61 entstehen durch Aufklappung am 15Flach 62 als

61



Drei Doppelstrecken als Wendestrecken 3, 6, 9

62

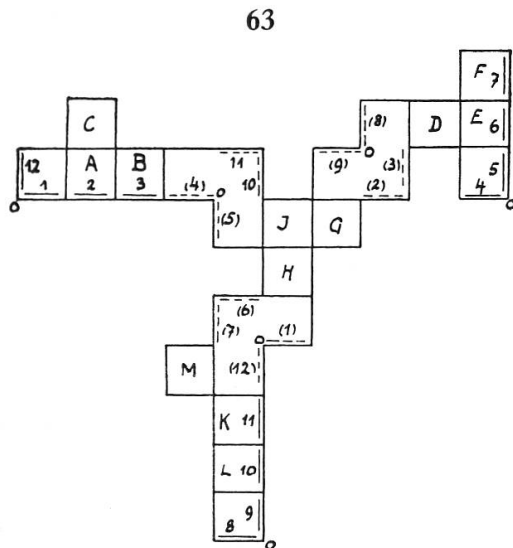


Wendestrecken die Doppelstrecken 3, 6, 9, an denen die Kanten 1, 2 und 4, 5 und 7, 8 angefügt drei Quadrate ab-



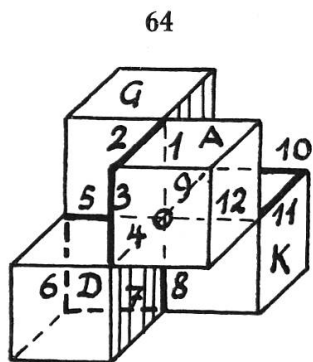
schließen in den drei verschiedenen Ebenen der Achsenschnitte. Zusammen bilden diese Wendestrecken ein Neunseit mit  $O$  als dreifachem Punkt. Diese Quadrate zeigen in drei Lücken  $o$ , wie auch der Würfel  $H$ , während dessen Gegenlücke  $u$  zeigt, wie auch die Würfel von  $A$ ,  $D$  und  $L$ .

**5. Halbe Doppelstrecken als Wendestrecken.** Aus den drei Achsenschnitten ist je ein Viertel als Quadrat herausgeschnitten, und die entstandenen Dreiviertelteile sind im Netz 63 an die Würfel­flächen  $G$ ,  $H$ ,  $J$  angeschlossen und führen zu einem übersichtlichen Beginn der Aufklappung, indem sie gegeneinander verschränkt vom 15Flach 64 den Hauptteil bestimmen durch die Lage der Achsenschnitte, an welche die Quadrate der vier Würfel sich anfügen lassen.



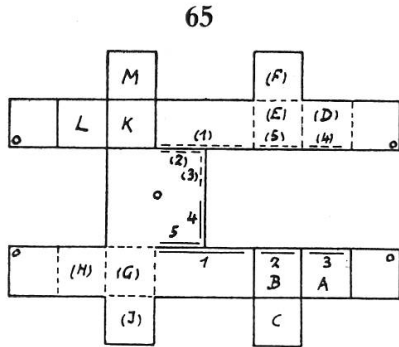
als Wendestrecken 1, 4, 5, 8, 9, 12  
Halbe Doppelstrecken

Auch besteht der Vorzug, daß alle Klappungen nach gleicher Seite erfolgen, von 63 aus nach unten. Die Wendestrecken 1 bis 12 bilden drei Quadrate, die wieder in den drei verschiedenen Ebenen der Achsenschnitte liegen und die in drei Lücken  $u$  zeigen, während im übrigen in den Lücken und an den Würfeln des 15Flachs nur  $o$  sichtbar ist, womit auch eine einfache Verteilung von  $o$  und  $u$  an den Flächen eintritt.

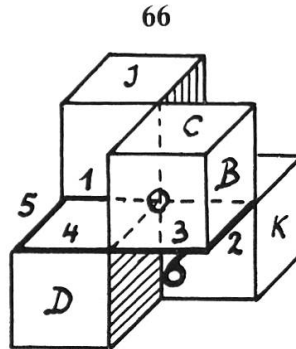


**6. Ein Quadrat der Achsenschnitte ungeteilt.** Ein Quadrat ist im Netz 65 als Mittelfläche genommen, an welcher die übrigen Flächen an zwei Gegenseiten angeordnet sind. Ein zweiter Achsenschnitt ist in die zwei Rechtecke mit 1 und (1) geteilt und der dritte in vier Quadrate mit  $o$  in den Ecken. Die

Wendestrecken 1 bis 5 bilden **66** ein Rechteck in der Mittel-  
fläche an der Doppelstrecke 1, in welcher der zur Mittel-



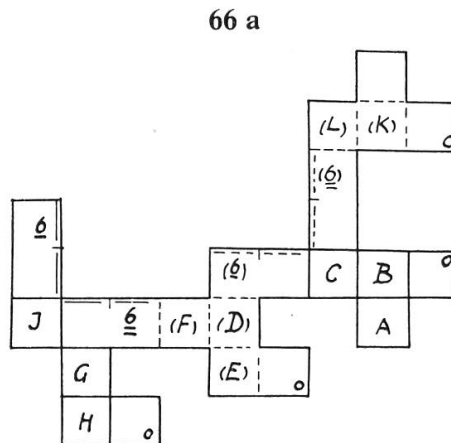
Ein Quadrat  
der Doppelstrecken  
ungeteilt



fläche senkrechte Achsenschnitt  $o$  in  $u$  wendet. Die Würfel  $B$  und  $K$  zeigen außen  $o$ , die Würfel  $D$  und  $J$  dagegen  $u$ , doch zeigen die Würfel  $B$  und  $D$  an der Mittelfläche die andere Netzseite als an ihren übrigen Flächen, so daß nur  $J$  und  $K$  ganz nur eine Netzseite zeigen.

7. **Doppelwendestrecke.** Die beiden Quadrate der senk-

rechten Achsenschnitte **66** werden in ihrer gemeinsamen Doppelstrecke  $6$  geteilt, um in ihr die Doppelwendestrecke zu erhalten. Das wagrechte Achsenschnittquadrat wird durch die beiden in ihm liegenden Doppelstrecken in vier Quadrate zerlegt, je mit  $o$  in einer Ecke. Mit dieser Teilung ist das Netz **66 a** zusammengesetzt. Die an  $C$  liegenden Rechtecke werden nach unten geklappt, so daß  $(6_1)$  und  $(6_2)$  zusammenstoßen vorläufig als in einer Kante,



Doppelwendestrecke

in welche dann auch  $6_1$  und  $6_2$  geklappt werden, so daß in der damit entstandenen Doppelstrecke  $6$  beide Achsenschnittebenen ihre Netzseiten wenden. Die vier Quadrate mit  $o$  dagegen stoßen alle vier gleichseitig zusammen. Durch diese Netzbildung erhält jeder der vier Würfel an allen seinen Flä-

chen außen die nämliche Netzseite: die Würfel von  $C$  und  $J$  zeigen  $o$ , die von  $D$  und  $K$  zeigen  $u$ . In den Enden der Doppelwendestrecke 6 stoßen Quadrate gleicher Netzseiten zusammen, oben  $J$  und  $C$  mit  $o$ , unten  $L$  und  $K$  mit  $u$ . An den Enden der übrigen beiden Doppelstrecken stoßen dagegen die Quadrate ungleichseitig zusammen, mit  $o$  an  $u$ .

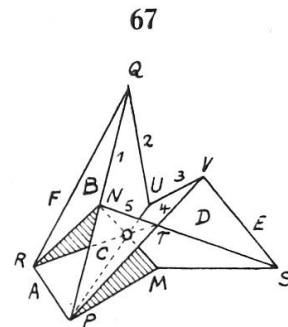
Diese sieben Fälle von Netzen für das 15Flach der «vier Würfel» sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil sie einfach herzustellen sind und sich ferner auf andere Vielfläche mit vier Zellen und drei Doppelstrecken übertragen lassen, bei denen die Ausführung schwieriger wird.

### V. Tetraeder zerlegt in zwei einseitige Vielfläche.

Das Tetraeder eignet sich, als einfachstes Polyeder, besonders zur Ausführung der verschiedenen Möglichkeiten der Zerlegung durch drei Schnittebenen. Die dadurch entstehenden beiden Teilvielfläche ergeben als Summe der Anzahl ihrer Flächen 18 bis 28. Für jede dieser Summenzahlen bestehen Zerlegungen, für einzelne auch mehrere. Es werden hier 19 Fälle beschrieben, da es von besonderem Interesse ist, von den verschiedenen Annahmen der Schnittebenen aus die dadurch bedingten Zerlegungen zu verfolgen, durch Ausführung der Konstruktionen und Bildung der Netze, um damit die vielfachen Gestaltungsmöglichkeiten an Modellen zu ersehen, die durch sieben Ebenen bedingt sind, von denen vier das Tetraeder bilden, zu denen die übrigen drei als Schnittebenen dazutreten, so daß drei Doppelstrecken entstehen, die sich in den nächsten Beispielen im Inneren des Tetraeders treffen. Die Beispiele sind geordnet nach Zunahme der Summe der Anzahl der Flächen und innert den einzelnen Werten der Summe nach der Anzahl der Flächen der einzelnen Teilvielfläche.

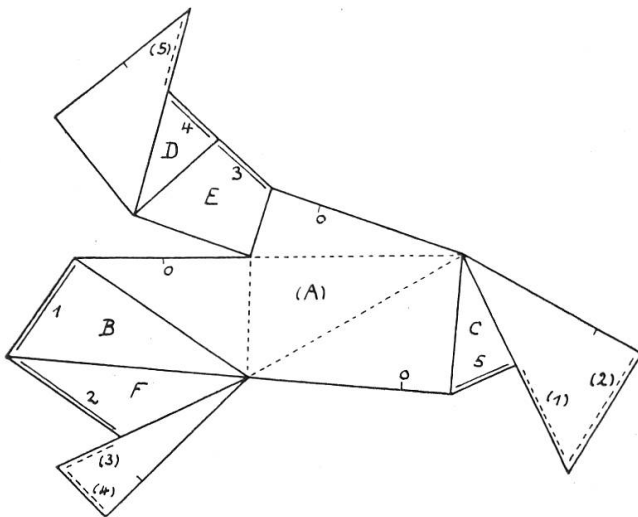
1. **9Flach zu 9Flach 67.** Durch zwei Gegenkanten des regelmäßigen Tetraeders wird je eine Ebene gelegt und die dritte Ebene durch eine weitere dritte Kante, wobei jede der Ebenen rechtwinklig sei zur bezüglichen Gegenkante, so daß

die drei Ebenen kongruente gleichschenklige Dreiecke als Achsenschnitte ergeben:  $QPM$ ,  $RSN$  und  $RPV$ . Diese Dreiecke durchdringen einander in den drei Doppelstrecken: in  $MN$  als Verbindung der Mitten der zwei Gegenkanten, und in  $PU$  und  $RT$ , als Tetraederhöhen. Von den Flächen des Tetraeders werden zwei durch je eine ihrer Höhen geteilt und die andern durch je zwei Höhen, so daß als Teilflächen 10 Dreiecke und 2 Vierecke entstehen. Ein Scheitelgebiet davon hat 5 Dreiecke  $A, B, C, D, F$  und 1 Viereck  $E$ , die samt den 3 Achsenschnitten ein 9Flach bilden 67. Für dessen Netz 68 ist jeder Achsenschnitt geteilt durch eine Doppelstrecke, an der  $o$  angegeben ist. Nach Aufklappung der drei Achsenschnitthälften, die an  $(A)$  liegen, nach oben, fallen drei  $O$  in den dreifachen Punkt  $O$  als Schnitt der drei Doppelstrecken, womit die erste Zelle geschlossen ist, worauf durch Einklappung gegen  $O$  die übrigen drei Zellen entstehen. Die vier Zellen sind alle voneinander verschieden:



9Flach zu 9Flach

68

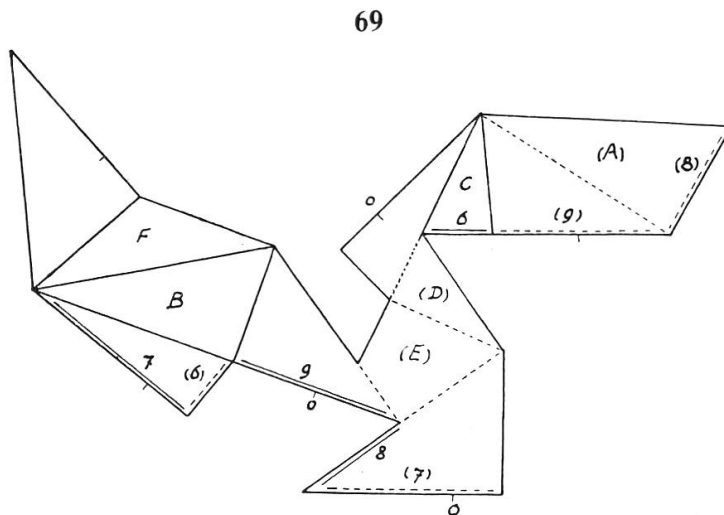


ander verschieden: über  $A$  und  $C$  sind ungleiche 4Flache und über  $B$  und  $D$  ungleiche 5Flache. Diese Zellen stoßen nur in von  $O$  ausgehenden Teilen der Doppelstrecken aneinander, und nur die durchgehenden Achsenschnittflächen halten sie im Modell zusammen.

Für das Netz 68

schließen sich Möbiusbänder an den Wendestrecken 1 bis 5, welche die Lücke gegenüber  $A$  begrenzen. Diese Lücke und ihre Gegenzelle  $A$  zeigen  $u$ , im übrigen zeigen die anderen

Zellen  $o$  des Netzes. Die vier Lücken bilden zusammen auch ein solches 9Flach. Durch Drehung des 9Flachs **67** um  $PS$  bis  $Q$  mit  $l$  in die Ebene von  $G$  kommt und durch eine weiter



folgende Drehung um  $l$  bis dann  $B$  in die Grundebene fällt, kommt das 9Flach in diejenige Lage seiner Zellen, welche die Lücken an **67** einnehmen. Die beiden aus dem Tetraeder entstehenden 9Flache sind deckungsgleich. Das Netz **69** ergibt bei seiner Aufklappung, die bei  $(D)$   $(E)$  beginnt, als Wendestrecken zwei Doppelstrecken  $7 \equiv RT$  und  $9 \equiv MN$  nebst den Kanten  $6 \equiv NT$  und  $8 \equiv RM$ , die zusammen das überschlagene Viereck  $MNT R$  bilden. Dabei wird am entstandenen 9Flach  $o$  an zwei Zellen  $B$  und  $C$  sichtbar, während die Zellen  $A$  und  $D$  dann  $u$  zeigen. Wenn die drei Schnittebenen nicht rechtwinklig zu den Gegenkanten gelegt werden, so entstehen zwei verschiedene 9Flache.

**Satz:** Werden durch ein Tetraeder drei Schnittebenen gelegt, die je durch eine von drei nicht in der nämlichen Ebene liegenden Kanten gehen, so wird das Tetraeder in zwei einseitige 9Flache zerlegt, als Teilvielflache kleinster Summe der Anzahl ihrer Flächen für eine Zerlegung des Tetraeders. Denn durch alle Ecken des Tetraeders gehen dabei Schnittebenen und auch durch die größtmögliche Anzahl seiner Kanten, nämlich durch deren drei.

Auf den Netzen des 9Flachs lassen sich, wie bei **3** und **4**, auch Wege einzeichnen, die von einem Punkte  $P$  der Fläche zu dessen Gegenpunkte ( $P$ ) führen. In **68** kann von einem Punkte der Wendestrecke  $2$  aus durch  $F$ ,  $B$ ,  $(A)$  und  $C$  bis zum entsprechenden Punkte auf  $(2)$  ein solcher Weg ange-

zeigt werden. In **69** führt ein solcher Weg von einem Punkte der Wendestrecke  $9$  aus durch  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  und  $(D)$  bis zum entsprechenden Punkte auf  $(9)$ . In **70** führt ein solcher Weg von einem Punkte der Wendestrecke  $7$  aus durch  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  und  $(D)$  bis zum entsprechenden Punkte auf  $(7)$ . In **71** führt ein solcher Weg von einem Punkte der Wendestrecke  $8$  aus durch  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  und  $(D)$  bis zum entsprechenden Punkte auf  $(8)$ .

nommen werden, zur Aufklappung auf 67. Einen kürzeren Weg erhält man auf 69 von 7 aus über  $B$  und  $(E)$  nach (7). Modelle.<sup>6</sup>

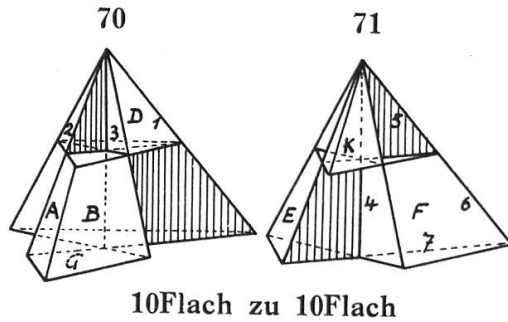
### Vier Fälle des Vielflaches aus einem Netz.

Zu einem gegebenen Netz bestehen, bei Unterscheidung der Netzseiten  $o$  und  $u$ , vier Fälle für das durch Aufklappung daraus zu bildende Vielflach, wenn an diesem keine Symmetrieebene vorkommt, wie beim vorhin beschriebenen 9Flach. Aus Netz 68, auf  $o$  gezeichnet, entsteht durch die erste Aufklappung: um die gestrichelten Seiten von  $(A)$  nach oben, um die anderen nach unten, das 9Flach 67  $F_1$ , das  $o$  zeigt an den Zellen  $B, C, D$  und  $u$  an der Zelle  $A$ . Würde aber an diesem Netz eine zweite Aufklappung, entgegengesetzt der ersten, ausgeführt, um die Seiten von  $(A)$  nach unten, sonst nach oben, so entsteht ein  $F_2$ , gegengleich zu  $F_1$  und mit den entgegengesetzten Netzseiten,  $u$  an  $B, C, D$  und  $o$  an  $A$ . Das nämliche Netz 68 aber auf die Netzseite  $u$  gezeichnet, gibt auf jene erste Art als dritte Aufklappung:  $F_3 \cong F_1$ , nämlich deckungsgleich, aber mit vertauschten Netzseiten, und auf die zweite Art als vierte Aufklappung:  $F_4 \cong F_2$  wieder  $o$  und  $u$  an diesen beiden vertauscht. Unter den vier erhaltenen Vielflachen sind also diese zwei Paare je deckungsgleich, abgesehen von den entgegengesetzt angeordneten Netzseiten. Im übrigen bestehen zu jedem der vier Vielflache zwei gegengleiche, das eine mit gleicher Anordnung von  $o$  und  $u$ , das andere mit entgegengesetzter:  $F_1$  zu  $F_4$  sowie  $F_3$  zu  $F_2$  gegengleich als gleichseitig, aber  $F_1$  zu  $F_2$  und  $F_3$  zu  $F_4$  ungleichseitig gegengleich. Vollständige Gegengleichheit oder Symmetrie besteht also bei zwei Paaren dieser Vielflache, aber vollständige Deckungsgleichheit nach Gestalt und Netzseiten entsteht dabei nicht, man müßte denn dazu eine der vier verschiedenen Konstruktionen wiederholen. Besteht an dem Vielflach eine Symmetrieebene, so entstehen nur die zwei deckungsgleichen Vielflache mit entgegengesetzter Anordnung der Netzseiten, aber keine nur gegengleiche. Von verschiedenen Netzen mit Änderung der

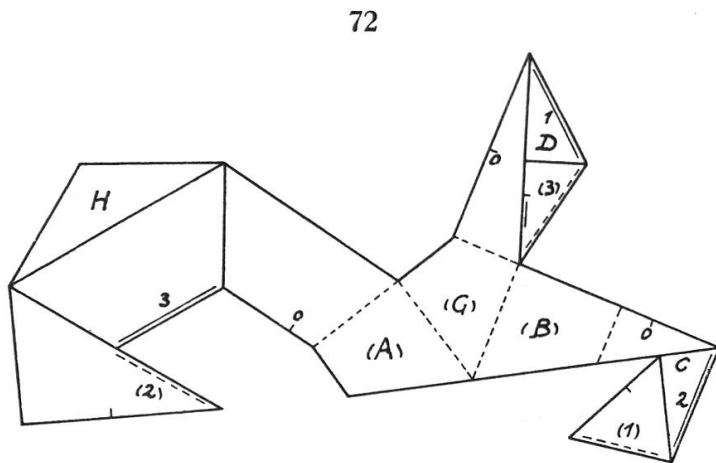
Wendestrecken entstehen die nämlichen vier Vielfache mit abgeänderter Verteilung der Netzseiten.

2. **9Flach zu 10Flach.** Durch die drei Kanten einer Fläche des Tetraeders wird je eine Schnittebene gelegt. Diese Fläche bleibt also ganz, und die übrigen drei Flächen werden je in vier Teile zerlegt. Davon gehören 6 Flächen zum 9Flach und 6 Flächen samt der ungeteilten Fläche zum 10Flach. Ein Beispiel sind Enneaeder und Dekaeder.<sup>6</sup>

3. **10Flach zu 10Flach, 70 und 71.** Eine Ebene ist mittelsenkrecht zu einer Höhe des Tetraeders gelegt, und die beiden anderen Ebenen gehen durch diese Höhe und je eine Kante, so daß als Achsenschnitte drei Dreiecke entstehen. Die Grundfläche wird durch zwei ihrer Höhen geteilt, so daß das Viereck *G* und das gleichschenklige Dreieck *H* die Grundflächen des ersten 10Flachs bilden, während das andere über zwei Dreiecken in Scheitellage steht. Aus dem



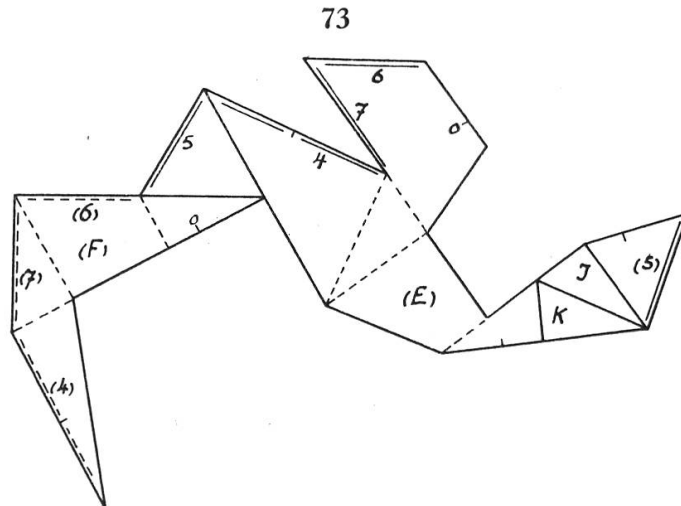
10Flach zu 10Flach



Netz 72 entsteht das 10Flach 70 mit den Wendestrecken 1, 2, 3, welche die Lücke oben hinten begrenzen, die als Gegenzelle das 6Flach unten vorn über *G* hat, mit *A* und *B* als Seitenflächen.  $f = 10, e = 12, k =$

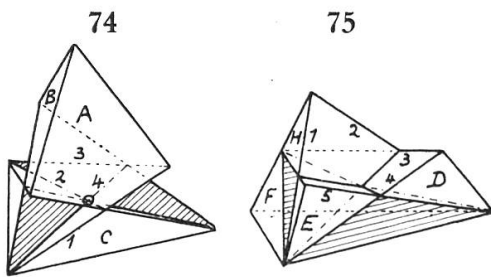
21. Aus dem Netz 73 entsteht das zweite 10Flach 71 mit den Wendestrecken 4 als Doppelstrecke und 5, 6, 7 als Kanten, zusammen in einem Dreieck.  $f = 10, e = 11, k = 20$ . In den beiden Zeichnungen sind die Zellen des einen 10Flachs in

der nämlichen Lage wie die Lücken des andern, so daß sie durch Parallelverschiebung zum ganzen Tetraeder einander ergänzen. Das erste 10Flach hat eine Ecke mehr als das zweite, weil es die untere vordere Ecke des Tetraeders für sich allein einnimmt; an den übrigen Ecken sind beide 10Flache beteiligt.



4. 9Flach 74 zu 12Flach 75.

Eine Schnittebene geht durch die vordere Grundkante des Tetraeders, und die beiden anderen Ebenen gehen je von einem

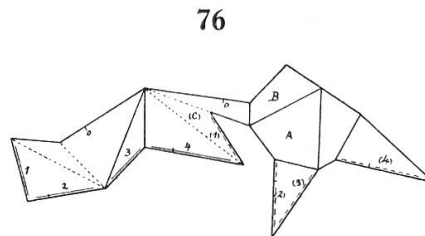


9Flach zu 12Flach

Endpunkt dieser Kante aus. Deren Gegenkante ist in drei Strecken geteilt, die an Flächen *B, H, F* liegen, wobei die erste Ebene nach dem oberen Teilpunkt ob *H* geht. Die beiden anderen Ebenen gehen nach dem unteren Teilpunkt

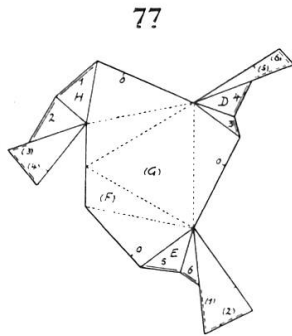
unter *H* und zwar so, daß sie auch gleichschenklige Dreiecke aus dem Tetraeder schneiden. Dessen Grundfläche wird dabei nicht geteilt und gehört als *G* zum 12Flach, während das 9Flach statt dessen unten eine Lücke hat, die von drei 4Flachen

umgeben ist, die je ein Dreieck wie *C* haben und zusammen einen nach hinten gehobenen Fuß bilden, auf dem das 6Flach mit *A, B* als Block aufgelegt ist auf drei Doppelstrecken. Dieser Block paßt am 12Flach in die obere Lücke, die von drei 5Flachen umgeben ist, vorn an *D* und *E*, die einen Sitz einschließen, der aber von drei seit-





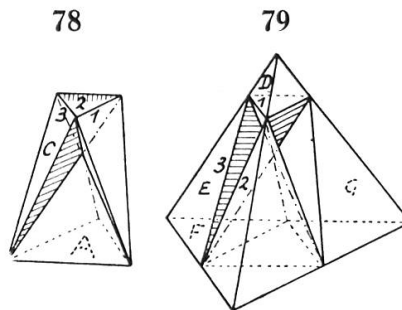
lichen Lücken unterhöhlt ist, die dem Fuß am 9Flach entsprechen. Aus dem Netz 76 entsteht das 9Flach mit den Wende-



strecken 1 bis 4, von denen 2 und 4 Doppelstrecken sind, die mit den Kanten 1 und 3 zwei Dreiecke oder ein überschlagenes Vierseit bilden mit O als Doppelpunkt. Aus dem Netz 77 erhält das 12Flach als Wende-

strecken die Kanten 1 bis 5, welche die obere Lücke begrenzen, zu welcher die Gegenzelle unten aus dem 6Flach an F über G besteht.  $f = 9, e = 10, k = 18; f = 12, e = 10, k = 21$ . 9Flach und 10Flach haben von dem Tetraeder je eine Ecke für sich, und die beiden anderen Ecken unten vorn haben sie gemeinsam als Eckpunkte, weshalb sie gleiche Eckenzahl haben.

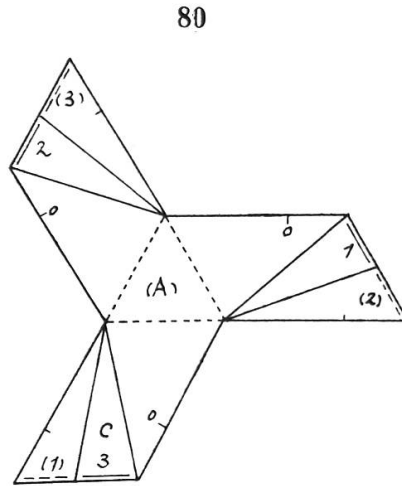
5. **7Flach 78 zu 15Flach 79.** Diese beiden Vielflache entstehen aus dem Tetraeder durch drei Ebenen, welche durch drei Verbindungsstrecken je zweier



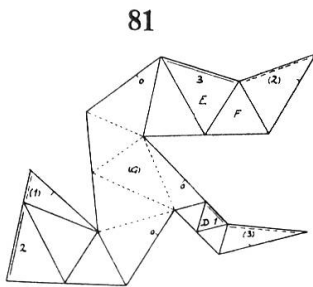
7Flach zu 15Flach

gehen. Damit erhält man die beiden Vielflache kleinster und größter Anzahl der Flächen und somit ihrer größten Differenz, aus dem Tetraeder, weil dabei die vier Ecken des Tetraeders in Scheitelpunkten zu liegen kommen, so daß das 15Flach alle diese vier Ecken erhält und die vier Körperteile des 7Flachs an Ausschnitten aus den Flächen des Tetraeders entstehen. In dem gezeichneten Beispiel sind die Grundkanten des Tetraeders halbiert und von deren Mitte gehen die Achsen nach den Teilpunkten für das oberste Viertel der Seitenkanten, so daß als Achsenschnitte drei kongruente Trapeze entstehen. Die vier inneren Dreiecke, die aus den Tetraederflächen geschnitten werden, ein gleichseitiges und drei gleichschenklige, bilden mit den drei Achsenschnitten das 7Flach, an dem neben den Dreiecken drei seitliche Lücken einspringen und eine kleinere obere, die der Grundfläche A gegenüber liegt. Damit erscheint

dieses 7Flach als ein von der Pyramide über  $A$  als Fuß, von den drei seitlichen Stützen, wie an  $C$ , getragener Becher mit einem Dreieck als Rand. Das 15Flach hat drei Eckpyramiden, zwischen denen sich drei seitliche Lücken nach oben zu den Spitzen erweitern, aus denen eine Doppelpyramide herausragt, so daß mit den emporstrebenden Nischen die Wirkung eines Monumentes mit der verborgenen Grundlücke erreicht wird, das der Bestimmung seiner Bedeutung harret. Aus dem Netz 80

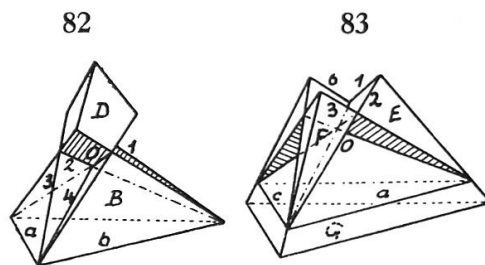


entsteht am 7Flach aus Wendestrecken das Kantendreieck 1, 2, 3 der oberen Lücke. Das Netz 81 ergibt aus den Wendestrecken 1, 2, 3 die Begrenzung einer seitlichen Lücke.  $f = 7$ ,  $e = 6$ ,  $k = 12$ ;  $f = 15$ ,  $e = 10$ ,  $k = 24$ .



Als Enden der Doppelstrecken die Mitten aller Tetraederkanten genommen, entstehen Heptaeder und Pentaedekaeder.<sup>3</sup> Die Achsenschnitte sind dabei Quadrate. Verallgemeinerung im Tetraedertyp.<sup>6</sup>

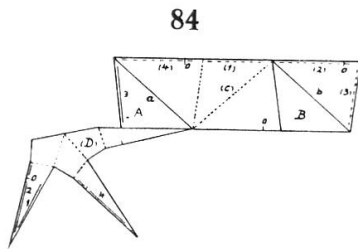
6. 9Flach 82 zu 13Flach 83. Am Tetraeder wird durch jede der Kanten der Grundfläche eine zu dieser gleich geneigte Ebene gelegt und dann parallel nach oben um eine gleiche Strecke verschoben, so daß unten an den Seitenflächen Streifen durch  $a$ ,  $b$ ,  $c$  abgeschnitten werden und daß als Achsenschnitte daran gleichschenklige Dreiecke entstehen.



9Flach zu 13Flach

Das 9Flach trägt oben an  $D$  wie eine Laterne ein 6Flach, bis zu dessen unterer Ecke in  $O$  die Lücke heraufreicht, die von dem unten offenen Kantendreiseit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eindringt. Aus dem

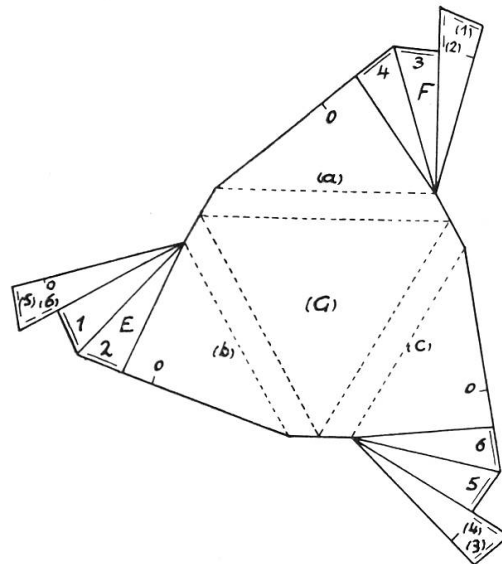
Netz 84, dessen Zusammensetzung wegen Fehlens einer Grundfläche schwierig ist, erhält das 9Flach als Wendestrecken die Doppelstrecken 2 und 4



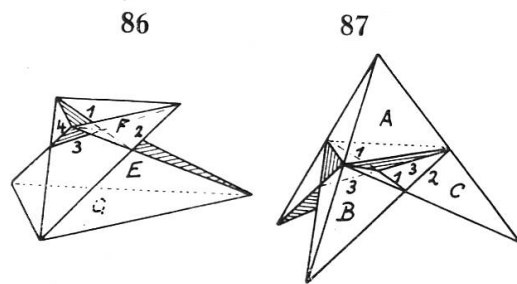
und die Seitenkanten 1 und 3 zu einem überschlagenen Vierseit mit Doppelpunkt in O. Neben den Seitenkanten fallen als Lücken drei Rinnen von der Laterne ab. Das 13Flach 83 hat die Grundfläche G des Tetraeders, an

welche die Streifen bis a, b, c ansetzen, über denen drei breite Lücken nach innen bis O neigen, während daneben an den Kanten vierseitige Pyramiden aufliegen, deren Grundflächen nach oben gekehrt die Lücke bilden für ein Leuchfeuer. Aus dem Netz 85, das um G übersichtlich angeordnet ist, entstehen die Wendestrecken 1 bis 6, die den gezackten Rand der oberen Lücke bilden.  $f = 9, e = 10, k = 18; f = 13, e = 12, k = 24$ .

85



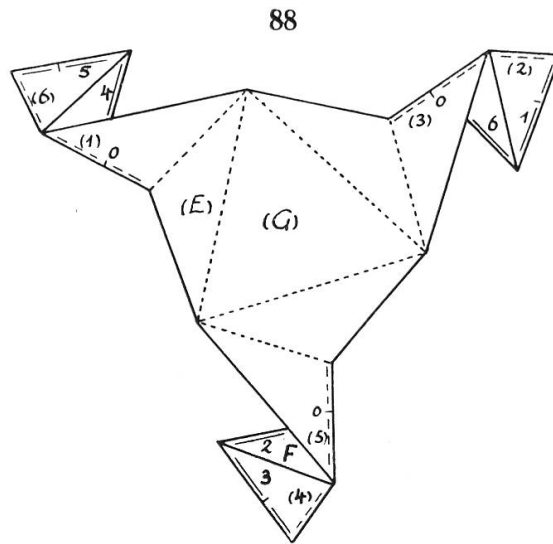
7. 10Flach 86 zu 12Flach 87 entstehen aus dem Tetraeder durch den Schnitt von drei Ebenen, die je von einer Ecke der Grundfläche G ausgelegt werden, so daß sie die Gegenflächen in Mittelparallelen zu den Grundkanten schneiden. G bleibt ungeteilt, und die drei Seitenflächen werden je in fünf Dreiecke zerlegt, von denen diejenigen wie A, B, C zum 12Flach und die wie E, F zum 10Flach gehören. Am 10Flach bilden über G drei Flächen wie E einen Fuß, auf dem über drei Seitenlücken eine Schale aufgesetzt ist mit drei



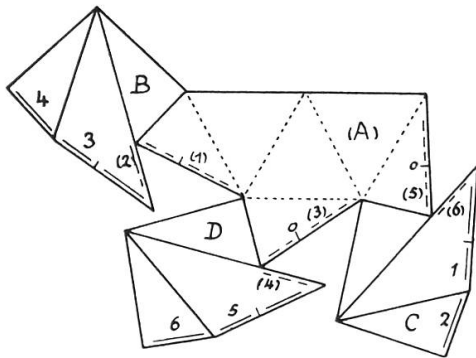
10Flach zu 12Flach

G bleibt ungeteilt, und die drei Seitenflächen werden je in fünf Dreiecke zerlegt, von denen diejenigen wie A, B, C zum 12Flach und die wie E, F zum 10Flach gehören. Am 10Flach bilden über G drei Flächen wie E einen Fuß, auf dem über drei Seitenlücken eine Schale aufgesetzt ist mit drei

Flächen wie  $F$  um die obere Lücke. Das Netz 88 ist um  $G$  symmetrisch angeordnet, und es entstehen bei der Klappung als Wendestrecken 1 bis 6 die Doppelstrecken 1, 3, 5, welche durch die seitlichen Kanten 2, 4, 6 zu drei Dreiecken geschlossen werden oder zu einem zweifach überschlagenen windschiefen Sechseck mit dem dreifachen Punkt  $O$ . Das 12Flach stellt einen Dreispitz nach unten dar, um die weite Grundlücke mit Flächen  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und mit über den drei kleinen Seitenlücken aufgesetzter Doppelpyramide an  $A$ . Das Netz 89, das von  $(A)$  aus zusammengesetzt ist mit den an-



89

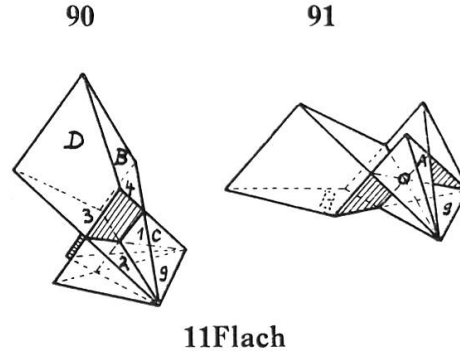


gehängten Flächen  $B$ ,  $C$ ,  $D$  für die Spitzen, ergibt wie vorhin als Wendestrecken die Doppelstrecken 1, 3, 5 und dazu die Seitenkanten 2, 4, 6. Diese Anordnung der Wendestrecken ist aus der Form dieser Vielfache bedingt.  $f = 10$ ,  $e = 9$ ,  $k = 18$ ;  $f = 12$ ,  $e = 10$ ,  $k = 21$ .

Dem 10Flach fehlt die obere Ecke des Tetraeders, die ganz dem 12Flach bleibt, so daß dieses eine Ecke mehr erhält.

8. **11Flach zu 11Flach**, deckungsgleich, 90 und 91. Dieses 11Flach entsteht aus dem Tetraeder mittelst einer Ebene, gelegt durch eine Grundkante  $g$  senkrecht zur Gegenkante und durch weitere zwei Ebenen, die je von den Enden dieser Kante aus gehen und deren Gegenflächen in Mittelparallelen, wie 3, schneiden, welche rechtwinklig sind zu den von der ersten Ebene herausgeschnittenen Dreieckshöhen, wie 2. Das Tetraedernetz wird dadurch in 16 Flächen zerlegt, die in zwei

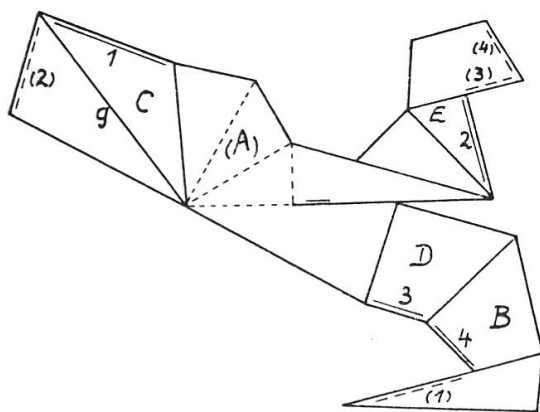
gleiche Scheitelgebiete zerfallen von je 8 Flächen, bestehend aus  $B$ ,  $C$  und zweimal  $D$  und viermal  $E$ . Dazu treten als Achsenschnitte drei gleichschenklige Dreiecke: eines über  $g$  und zwei über den Mittelparallelen, alle mit Höhen von Tetraederflächen als Schenkel. Die mittelsenkrechte Ebene zu  $g$  ist Symmetrieebene der beiden einzelnen 11Flache, und die durch  $g$  gelegte Schnittebene ist solche zwischen den beiden 11Flachen, wie sie zusammen im Tetraeder liegen und wie sie in **90** und **91** gezeichnet sind. Als zu einander



11Flach

symmetrisch und mit einer eigenen Symmetrieebene, sind sie kongruent. Aus der Grundfläche  $G$  des Tetraeders entnimmt das eine 11Flach **90** zwei Dreiecke wie  $E$  und das andere **91** die Flächen  $B$  und  $C$ . Das erste 11Flach erscheint als überhängender Block, getragen von einem dreiteiligen Fuß. Um das 11Flach aus dieser Lage in die des anderen zu bringen, muß es nach einer halben

92

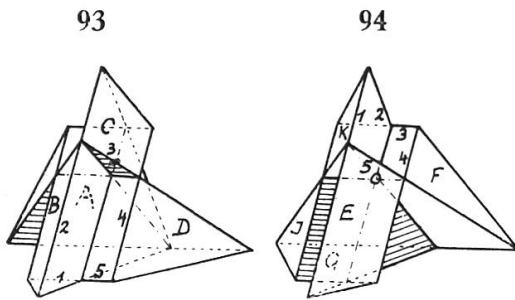


Netz zum 11Flach

ben Drehung zurück gestürzt werden, dann kann das eine in die Lücken des anderen verschoben gedacht werden, so daß beide 11Flache das Tetraeder zusammensetzen. Das Netz **92** um Seiten von  $(A)$  aufgeklappt und im übrigen zurückgeklappt, ergibt die Wendestrecken 1 bis 4 als windschiefes Kantenviereck, das die Lücke gegenüber  $A$  umgrenzt, welche  $u$  zeigt, wie auch ihre Gegenzelle von  $A$ , während sonst am 11Flach  $o$  außen sichtbar ist. Wird das nämliche Netz entgegengesetzt geklappt, so entsteht ein deckungsgleiches 11Flach mit entgegengesetzt angeordneten Netzseiten. Von den vier Arten der aus dem Netz ent-

stehenden Vielflache bestehen hier also nur diese zwei deckungsgleichen.

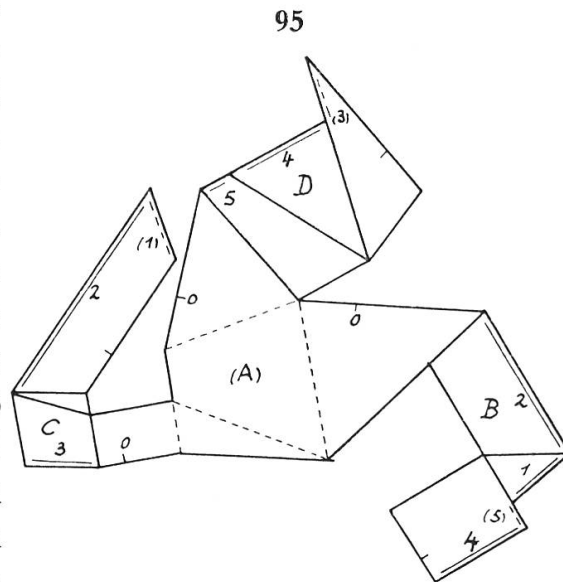
9. **11Flach zu 11Flach**, teilweise symmetrisch, **93** und **94**. Diese beiden 11Flache entstehen aus dem Tetraeder durch



11Flach zu 11Flach

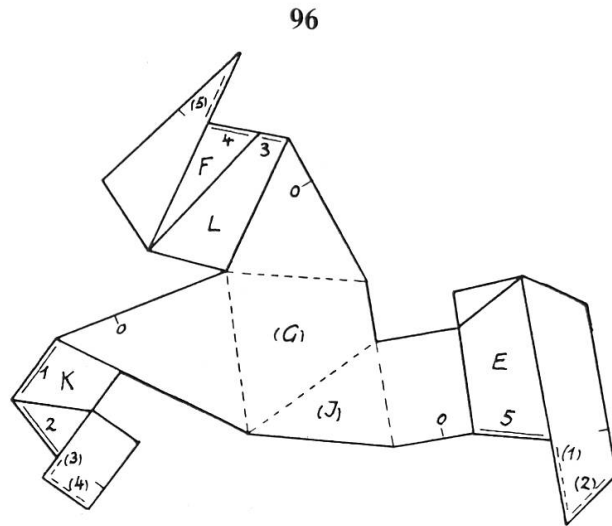
zwei Ebenen, die durch je eine von zwei windschiefen Kanten gehen, und durch eine dritte Ebene, die zu diesen beiden Kanten parallel liegt, und zwar so, daß die durch die drei Ebenen geschnittenen Kanten alle im gleichen Verhältnis geteilt,

dabei aber nicht halbiert werden; in den Zeichnungen ist dafür 1 : 2 angenommen. Als Achsenschnitte entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke und ein Rechteck. Für die Netze wird das Rechteck durch eine Doppelstrecke in zwei Rechtecke geteilt, eines der Dreiecke in Trapez und Dreieck und das andere in zwei Dreiecke. Die beiden 11Flache haben auch die übrigen Flächen gleich, vier Trapeze G, E, L, K und vier an diese je einzeln anstoßende Dreiecke. Aus dem Netz **95** entsteht das 11Flach **93** mit den Wendestrecken 1 bis 5 an der Lücke, in welche vom anderen 11Flach die Zelle E paßt. Aus dem

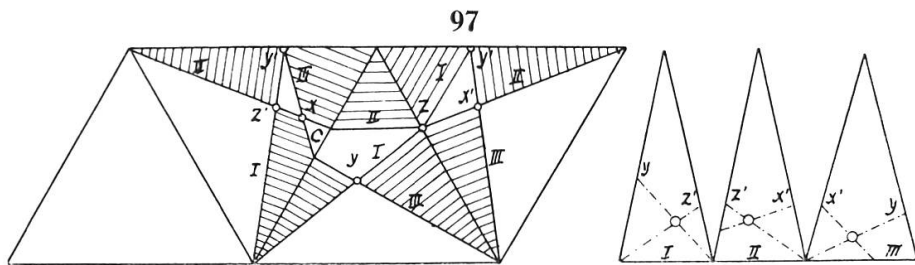


Netz **96** entsteht das 11Flach **94** mit den Wendestrecken 1 bis 5 an der Lücke, in welche die Zelle C des anderen 11Flachs paßt. Jede der vier Zellen beider 11Flache ist für sich ein 5Flach mit zwei Trapezen, zwei Dreiecken und einem Rechteck. Die acht Zellen sind aber alle voneinander verschieden. Die beiden 11Flache lassen sich längs einem Paar der zuerst

genannten Gegenkanten so aneinander legen, daß  $C$  und  $D$  des einen Vielflaches symmetrisch liegen zu  $K$  und  $J$  des anderen auf der einen Seite, und auf der anderen Seite liegt dann  $B$  symmetrisch zu  $E$ . Die beiden anderen Tetraederflächen aber sind dabei untereinander ungleich. Sie kommen zu einander in symmetrische Lage nach einer halben Drehung des einen Tetraeders. Nimmt man die Teilung der Tetraederkanten  $1 : 1$ , so werden alle acht Zellen deckungs- oder gegengleich, und man erhält das Hendekaeder.<sup>6</sup>  $f = 11$ ,  $e = 14$ ,  $k = 24$ .



10. 11Flach 98 zu 12Flach 99 entstehen aus dem Tetraeder 97, wenn durch zwei Ecken seiner Grundfläche  $G$  die Ebenen

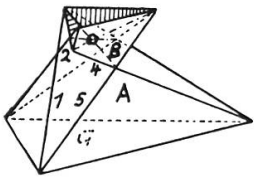


Tetraedernetz geteilt zu 11- und 12Flach      Achsenschnitte

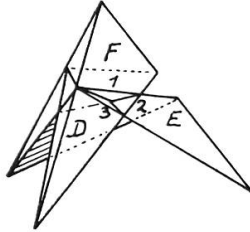
I und II gelegt werden, welche die Gegenflächen in gleichen Strecken parallel zu den Grundkanten schneiden und wenn dazu durch deren dritte Ecke noch die Ebene III angenommen wird, welche aber eine schräge Strecke  $X Y_1$  ausschneidet, so daß an  $X$  noch ein neues Dreieck  $C$  entsteht, wodurch die Summe 23 der Anzahl der Flächen beider Teilvielflache erzielt wird. Die drei Achsen durch  $O$  haben damit die Spurpunkte  $X$  und  $X_1$  sowie  $Y$  und  $Z_1$  innert Flächen des Tetraeders, während  $Y_1$  und  $Z$  auf Kanten liegen. Die Achsenschnitte,

neben 97 sind zwei gleichschenklige Dreiecke I und II und ein ungleichseitiges Dreieck III mit je zwei Doppel-

98



99



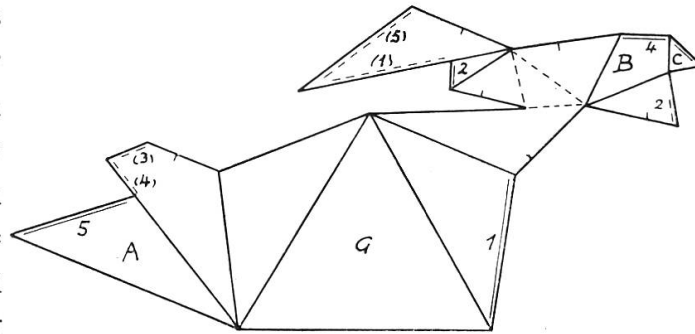
11Flach zu 12Flach

die Einseitigkeit bestimmt sind. Das von den Spuren eingeschlossene Scheitelgebiet für das 12Flach ist im Tetraeder-

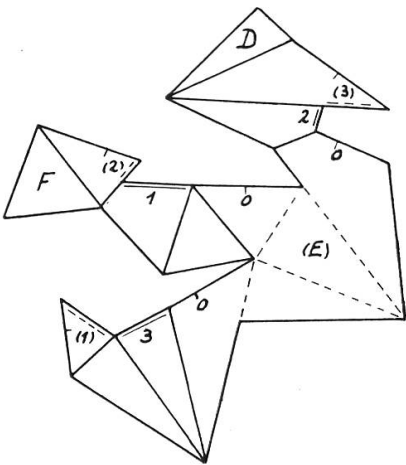
netz 97 schraffiert. Die vier Teile des Gebietes zu je einer Zelle stoßen nur in Spurpunkten der Achsen als in Ecken zusammen. Das 11-

Flach 98 stellt einen breiten Fuß A mit einer Schale B dar, welche an ihrem Rande eine Einknickung hat an der Fläche C neben B. Die Möbiusbänder schließen

100



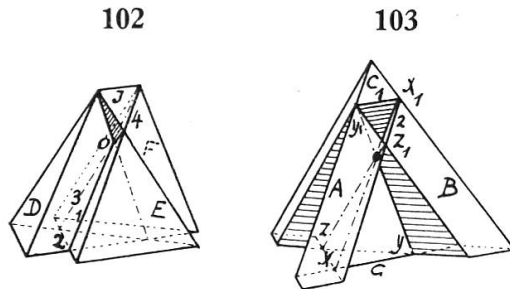
101



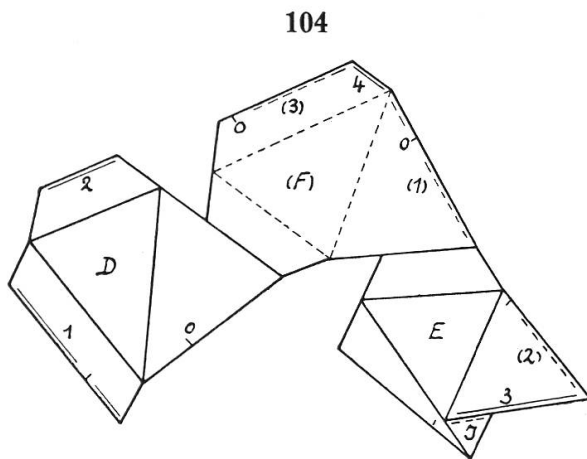
sich in den Wendestrecken 1 bis 5 an einer seitlichen Lücke, während die obere Lücke die Vertiefung der Schale bis O bildet. Das 12Flach 99 stellt einen nach unten gerichteten Dreispitz dar, der an der Seite zwischen E und F den Einschnitt für C hat. Die Wendestrecken 1, 2, 3 begrenzen hier die vordere Lücke und bilden damit den kleinsten möglichen Kantenzug.  $f = 11, e = 12, k = 22; f = 12, e = 11, k = 22.$



11. 10Flach 102 zu 14Flach 103 entstehen durch Annahme der Spurpunkte  $X, Y, Z$  der Achsen in der Grundfläche des Tetraeders 103, von  $Z_1$  in der Vorderfläche und von  $X_1, Y_1$  auf den einschließenden Seitenkanten, aber so, daß  $XX_1, YY_1, ZZ_1$  einander in  $O$  schneiden. Die Achsenschnitte sind in dem ausgeführten Beispiel ein Trapez und zwei gleichseitige Dreiecke. Für das 10Flach bleiben in der Grundfläche drei seitliche Trapeze, die das leere Dreieck der unteren Lücke einschließen. Darüber erheben sich drei Pyramiden, eine vordere an  $E$  und zwei seitliche wie an  $D$ , die oben zwischen den Spitzen ein Dreieck  $J$  als Schildchen

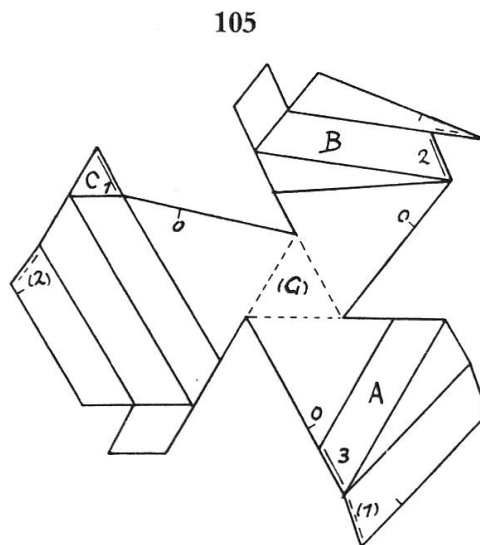


10Flach zu 14Flach



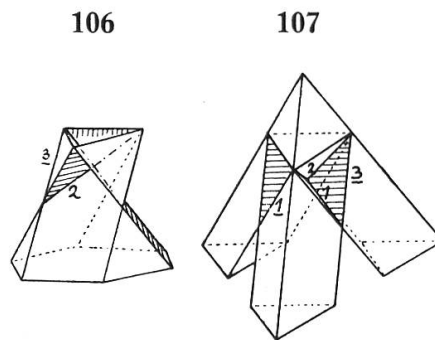
tragen an einem Vierflach, von dem aus drei seitliche Rinnen als Lücken abfallen. Das Netz 104 zu 102 gibt als Wendestrecken zwei Doppelstrecken  $XX_1 \equiv 1$  und  $ZZ_1 \equiv 3$  und ihre Verbindungskanten 2 und 4, in einem überschlagenen Viereck. Das 14Flach 103 mit einer inneren Pyramide über dem Dreieck  $XYZ$  in  $G$ , hat über den in den Ecken anstoßenden Rauten zwei seitliche Säulen an  $A$  und  $B$  und eine hintere Säule, die über der oberen Lücke, von den Wendestrecken 1, 2, 3 105 begrenzt, oben herauf ragt mit dem Dreieck  $C$ .  $f = 10$ ,

tragen an einem Vierflach, von dem aus drei seitliche Rinnen als Lücken abfallen. Das Netz 104 zu 102 gibt als Wendestrecken zwei Doppelstrecken  $XX_1 \equiv 1$  und  $ZZ_1 \equiv 3$  und ihre Verbindungskanten 2 und 4, in einem überschlagenen Viereck. Das 14Flach 103 mit einer inneren Pyramide über dem Dreieck  $XYZ$  in  $G$ , hat über den in den Ecken anstoßenden Rauten zwei seitliche Säulen an  $A$  und  $B$  und eine hintere Säule, die über der oberen Lücke, von den Wendestrecken 1, 2, 3 105 begrenzt, oben herauf ragt mit dem Dreieck  $C$ .  $f = 10$ ,

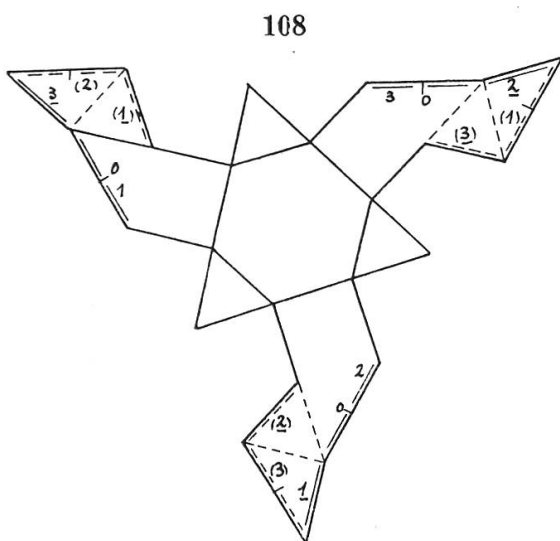


$e = 12, k = 21; f = 14, e = 16, k = 29$ . Die bedeutenden Differenzen zwischen diesen Zahlen der Elemente entstehen durch Zuteilung der vier Ecken des Tetraeders zum 10Flach. In der Grundfläche liegen besondere Ecken, weil jeder Achsenschnitt darin mit drei Flächen zusammenstößt, beim 10Flach mit drei Trapezen, beim 14Flach mit dem inneren Dreieck und zwei Rauten. In einer solchen inneren Ecke der Grundflächen stoßen also vier Flächen zusammen, deren Kanten in zwei Geraden liegen, zu denen als weitere Schnittgerade die Doppelstrecke tritt, die aber nicht als Kante zählt.

12. 10Flach 106 zu 15Flach 107. Von der Grundfläche des Tetraeders werden in den Ecken Dreiecke abgeschnitten, so daß innen ein regelmäßiges Sechseck entsteht. Durch dessen innere Seiten wird je eine Ebene gelegt parallel zur nächsten schiefen Kante des Tetraeders, so daß drei Rechtecke als Achsenschnitte entstehen, die einander in den drei Doppelstrecken



10Flach zu 15Flach

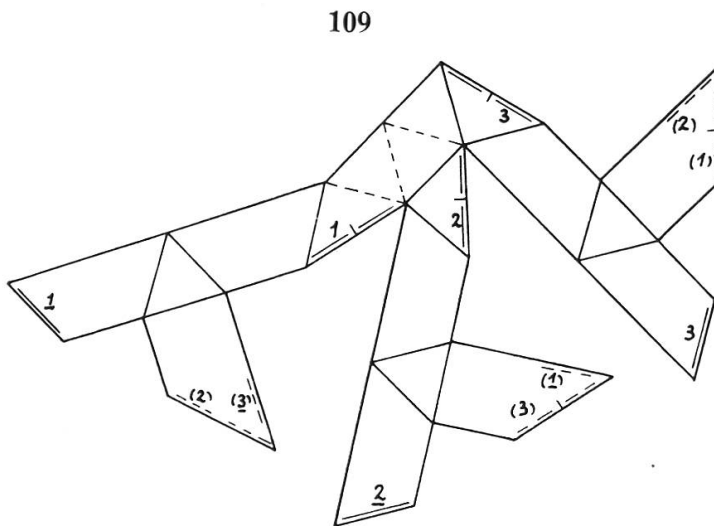


und ergibt durch Aufklappung als Wendestrecken die drei Doppelstrecken 1, 2, 3 sowie  $1_1, 2_1, 3_1$  von den oberen Seiten-

durchdringen, welche oben von Kanten herab zu den Mitten der Seitenflächen des Tetraeders gehen. Das 10Flach hat über dem inneren Sechseck der Grundfläche einen Fuß, der oben ein Becken trägt, das umgrenzt ist von drei Dreiecken, die in Scheitellage zu den Dreiecken des Fußes sind. Das Netz 108 ist regelmäßig um das Sechseck angeordnet

kanten, so daß drei Dreiecke abgeschlossen werden, die mit dem dreifachen Punkt  $O$  ein windschiefes, zweimal überschlagenes Sechseck bilden.

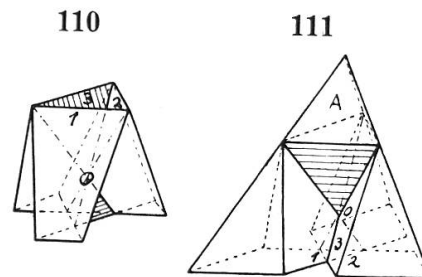
Das 15Flach **107** hat drei Säulen als Stützen mit sechs Trapezen über den Eckdreiecken der Grundfläche und darüber



drei Lücken, über denen eine Doppelpyramide als 6Flach aufgesetzt ist. Aus dem Netz **109** entstehen dazu in gleicher Art wie vorhin die Wendestrecken, doch sind dabei die andern obern seitlichen Kanten beteiligt. Alle

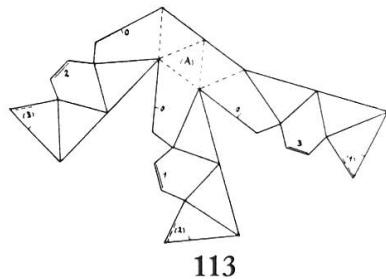
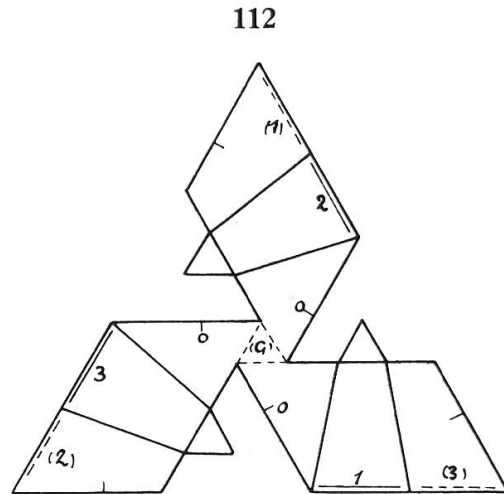
Ecken des Tetraeders sind am 15Flach. Die Ecken am 10Flach entstehen neu an den neun Ecken der Achsenschnitte und in den drei Schnittpunkten ihrer Längsseiten. Daher entstehen die bedeutenden Differenzen zwischen den Zahlen der Elemente.  $f = 10, e = 12, k = 21$ ;  $f = 15, e = 16, k = 30$ .

13. **10Flach 110 zu 15Flach 111.** In besonders schöner Gestaltung auch in den Netzen erhält man diese beiden Vielfläche durch die Annahme von drei Spurpunkten der Achsen im Innern der Grundfläche und von den drei übrigen auf den Seitenkanten in der besonderen Anordnung, daß ihre drei Ebenen deckungsgleiche Trapeze aus dem Tetraeder schneiden. Die Grundfläche wird durch deren Spuren parallel zu den Seiten in vier Dreiecke und drei Fünfecke zerlegt. Diese vier Dreiecke in Scheitellage bilden die Grundflächen des 10Flachs **110**, das



10Flach zu 15Flach

mit dem inneren Fuß und drei seitlichen Stützen mit der oberen Lücke einen Becher darstellt. Das Netz **112** dazu ist um das innere Dreieck ( $G$ ) regelmäßig angeordnet und gibt als Wendestrecken 1, 2, 3 den oberen Rand, unter dessen Ecken die seitlichen Lücken von unten her sich schließen. Das 15Flach **111**, als ein Monument betrachtet, hat jenen Lücken entsprechend drei seitliche Pyramiden, über den drei Fünfecken der Grundfläche um das innere leere Dreieck 1, 2, 3 der unteren Lücke und als Aufsatz eine Doppelpyramide an  $A$  über den drei seitlichen Lücken, welche von den Einschnitten in der Grundfläche sich emporheben. Das übersichtliche, in drei gleichen

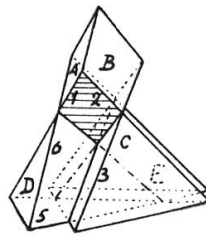


Teilen angeordnete Netz **113** gibt durch Aufklappungen, die bei ( $A$ ) nach oben beginnen, als Wendestrecken das Dreieck 1, 2, 3 der unteren Lücke, als den kleinsten möglichen Kantenzug an diesem 15Flach.  $f = 10$ ,  $e = 12$ ,  $k = 21$ ;  $f = 15$ ,  $e = 16$ ,  $k = 30$ . Der Unterschied in der Flächenzahl ist, wie vorhin, der nächstgrößte nach dem von 7Flach und 15Flach. Das 15Flach hat auch hier wieder alle Ecken des Tetraeders für sich allein.

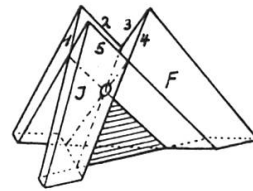
**14. 12Flach 114 zu 13Flach 115.** Drei Ebenen gleicher Neigung, je durch die Kanten der Grundfläche des Tetraeders, werden parallel nach unten verschoben um die gleiche Strecke, so daß ihre Spuren aus der Grundfläche ein inneres Dreieck  $G$  schneiden, an dessen Ecken in Scheitellage Raute  $B$  und an dessen Seiten Trapeze  $J$  und  $F$  liegen. Die Seitenflächen werden geteilt in ein Dreieck  $C$ , eine Raute  $B$  und zwei seitliche Vierecke  $J$  und  $F$ . Die Achsenschnitte sind gleich

schenkliche Dreiecke, in denen die Doppelstrecken von den Ecken des Dreiecks  $G$  nach Punkten, wie der gemeinsame Punkt von  $J$  und  $F$ , gehen. Das 12Flach **114** hat in seiner Grundfläche die drei Trapeze um das leere Dreieck der unteren Lücke, welche von drei Stützen, mit Dreiecken wie  $C$ , eingeschlossen ist, die oben ein 6Flach tragen. Aus Netz **116**

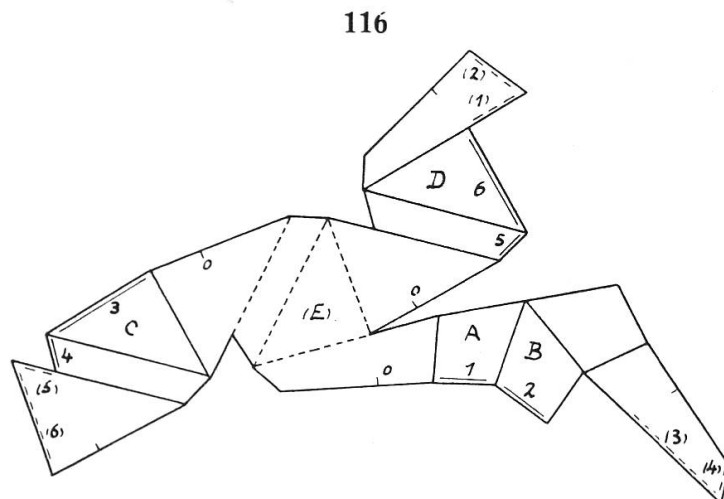
114



115

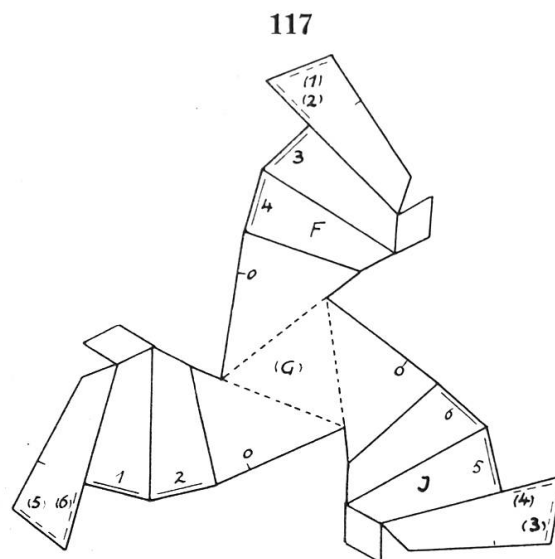


12Flach zu 13Flach

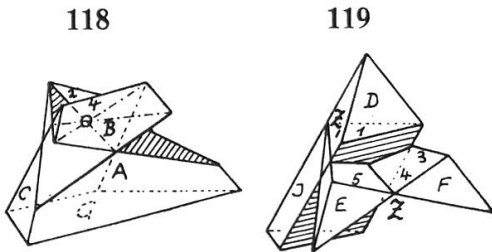


entstehen dazu die Wendestrecken 1 bis 6 an der seitlich abfallenden Lücke gegenüber  $E$ . Das 13Flach **115** hat über  $G$  eine Pyramide, an deren Seitenkanten die Streben über den Rauten anlehnen, zur

oben geöffneten Lücke für das lodernde Feuer des Dreifußes. Die Ränder 1 bis 6 dieser Lücke entstehen als Wendestrecken aus dem Netz **117**, das um  $(G)$  regelmäßig angeordnet ist. Das 13Flach hat die drei Grundecken des Tetraeders, während dem 12Flach die Spitze bleibt. Die übrigen Ecken entstehen neu als sechs Endpunkte der Doppelstrecken und als neun Schnittpunkte der Spuren mit Tetraederkanten.  $f = 12$ ,  $e = 16$ ,  $k = 27$ ;  $f = 13$ ,  $e = 18$ ,  $k = 30$ .



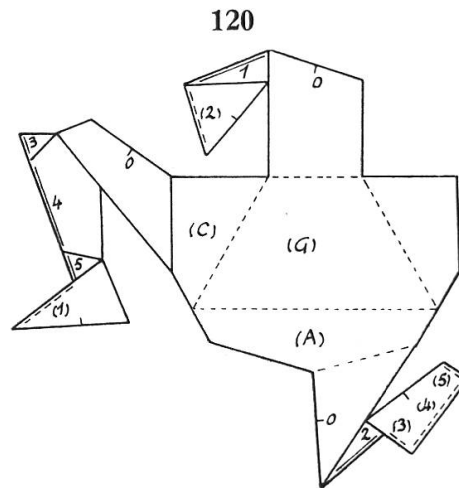
15. 12Flach 118 zu 13Flach 119. Von  $Z$  in der Mittellinie der vorderen Tetraederfläche geht eine Achse nach  $Z_1$  auf der Rückkante und durch  $ZZ_1$



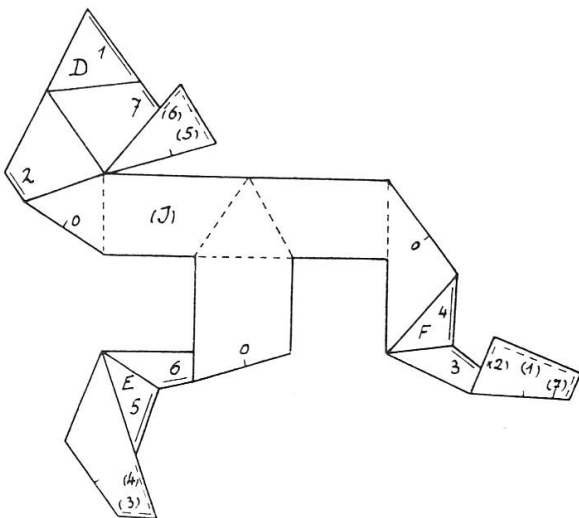
12Flach zu 13Flach

werden zwei Ebenen gleicher Neigung zur Grundfläche gelegt. Ferner ist noch die dritte Ebene parallel zur Rückkante und ihrer Gegenkante angenommen. Damit wird die Vorderfläche in zwei Fünfecke  $A$

und  $B$  und in drei Dreiecke  $D$ ,  $E$ ,  $F$  geteilt und die Grundfläche in das Trapez  $G$  und in ein Dreieck, während die beiden Seitenflächen je in zwei Dreiecke und vier Vierecke zerfallen. Damit entstehen 19 Flächen, die in zwei Scheitelgebieten von 9 und 10 Flächen angeordnet sind, für die beiden Teilvielfläche. Das 12Flach hat auf dem Trapez  $G$  einen breiten Fuß, der über den drei seitlichen Lücken oben die Schale trägt, bestehend aus der oberen Lücke mit fünfeckigem Rand, der von den Wendestrecken 1 bis 5 gebildet wird und der aus dem Netz 120 entsteht bei dessen Aufklappung. Das 13Flach 119 hat um die untere weite Lücke ein schief abgeschnittenes Prisma und zwei gekürzte Spitzen  $E$  und  $F$  angeordnet; über diesen beiden öffnet sich die vordere Lücke mit dem Rande 1 bis 7 als Wendestrecken, welche aus dem Netz 121



121

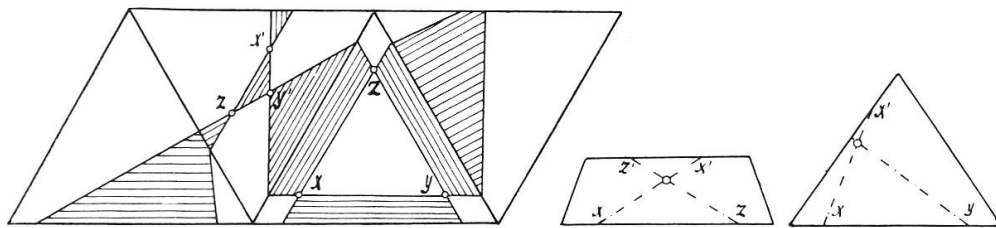


wird und der aus dem Netz 120 entsteht bei dessen Aufklappung. Das 13Flach 119 hat um die untere weite Lücke ein schief abgeschnittenes Prisma und zwei gekürzte Spitzen  $E$  und  $F$  angeordnet; über diesen beiden öffnet sich die vordere Lücke mit dem Rande 1 bis 7 als Wendestrecken, welche aus dem Netz 121

entstehen. Darüber und ob den beiden kleineren seitlichen Lücken ist das 6Flach mit  $D$  aufgesetzt von der Spitze des Tetraeders.  $f = 12, e = 16, k = 27$ ;  $f = 13, e = 16, k = 28$ . Die beiden Teilvielfläche haben je zwei Ecken des Tetraeders, so daß sie gleiche Eckenzahl erhalten, weil die übrigen 14 neuen Ecken an den Achsenschnitten beiden gemeinsam sind. Das 13Flach hat eine Kante mehr, weil die Rückkante des Tetraeders dazu in zwei Kanten geteilt ist.

16. **12Flach 123 zu 14Flach 124.** Von den Spurpunkten der Achsen sind  $XYZ$  in der Grundfläche des Tetraeders und  $X_1Y_1Z_1$  in der Vorderfläche, in der besonderen Annahme

122

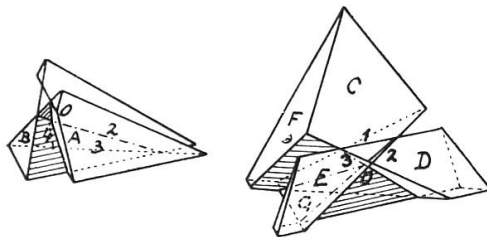


Tetraedernetz geteilt zu 12- und 14Flach

122, daß die drei Ebenen ein Trapez und zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke ausschneiden. Die schraffierten Flächen bilden das eine Scheitelgebiet von neun Flächen, eingeschlossen von Spuren und zusammenstoßend in Spur-

123

124

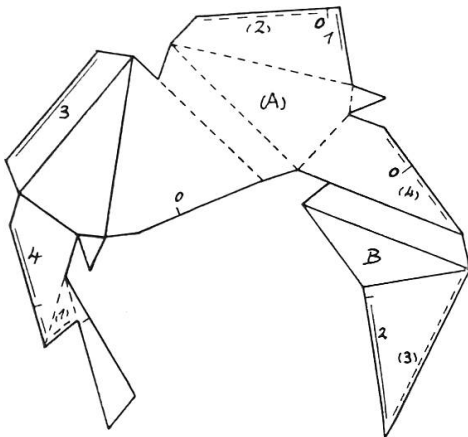


12Flach zu 14Flach

punkten. Diese neun Flächen samt den drei Achsenschnitten bilden das 12Flach 123, für dessen Netz 125 jeder Achsenschnitt geteilt wurde durch eine der beiden Doppelstrecken, kenntlich an den Punkten  $O$ , an sechs Stellen der kurzen Striche. Durch Aufklappung

entsteht daraus das 12Flach mit den Wendestrecken 1 bis 4, von denen 2 und 4 Doppelstrecken sind, die durch  $O$  gehen, und deren Enden durch Kanten 1 und 3 zu zwei Dreiecken oder einem überschlagenen Viereck verbunden sind. Der mittlere Körperteil von  $B$ , der  $o$  zeigt, und die beiden seit-

125

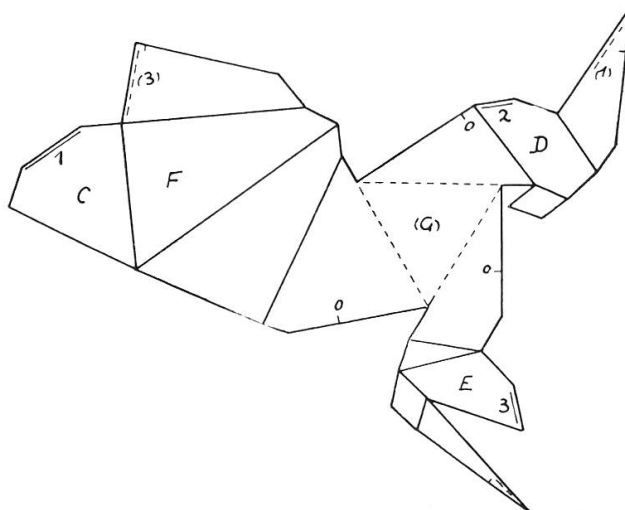


lichen Teile, mit ungleichen Netzseiten, wie der an *A*, der *u* zeigt, ruhen zusammen über den drei Trapezen um die untere Lücke, die von *XYZ* aus nach *O* geht und über welcher der vierte Teil eingesetzt ist, als das mit dem kleinen gleichschenkligen Dreieck in Scheitellage zu *B* befindliche Vierflach, das zwischen den beiden seitlichen Lücken liegt und

vor der oberen breiten Lücke, die längs der Doppelstrecke 2 sich erstreckt. Die in

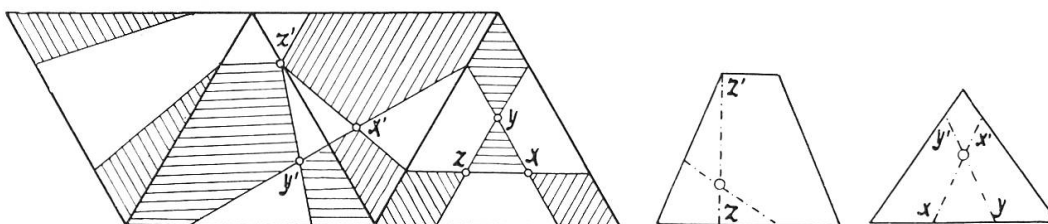
122 nicht schraffierten elf Flächen sind das zweite Scheitelgebiet, das mit den drei Achsenschnitten das Netz 126 gibt, aus dem durch Aufklappung am 14Flach 124 die Wendestrecken 1, 2, 3 entstehen an der vorderen kleinen Lücke, die *u* zeigt, so daß die drei umgebenden Teile *o* zeigen, während der untere Teil auch *u* zeigt. Dieser steht

126



über dem inneren Dreieck der Grundfläche, und die übrigen drei Teile erheben sich über den drei Rauten. Dieses 14Flach

127

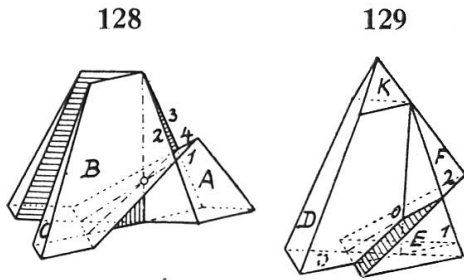


Tetraedernetz geteilt zu zwei 13Flachen



hat alle Ecken des Tetraeders, also vier mehr als das 12Flach.  
 $f = 12, e = 16, k = 27; f = 14, e = 20, k = 33.$

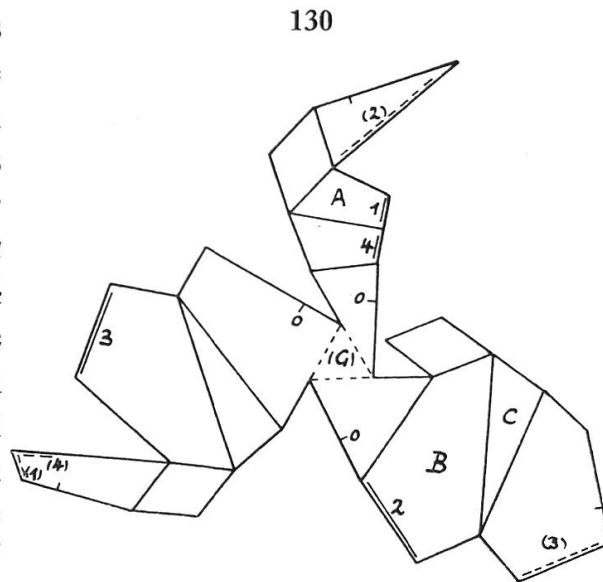
17. 13Flach 128 zu 13Flach 129. Drei Spurpunkte  $XYZ$  der Achsen liegen in der Grundfläche des Tetraeders, von



13Flach zu 13Flach

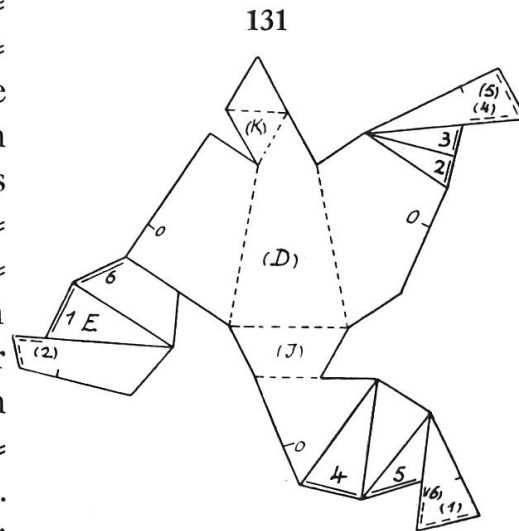
den anderen sind  $X_1$  und  $Y_1$  in zwei Seitenflächen und  $Z_1$  ist auf der diesen gemeinsamen Kante. Zu dem Tetraedernetz 127, mit der Teilung durch die Spuren  $XY X_1 Y_1, YZ Y_1 Z_1 ZX Z_1 X_1$  entstehen noch als Achsenschnitte zwei kongruente Trapeze und ein Dreieck, die je zwei Doppelstrecken enthalten. Die schraffierten 10 Flächen bilden, als das eine Scheitelgebiet, samt den drei Achsenschnitten das erste 13Flach 128, bestehend aus dem  $u$  zeigenden 4Flach über dem inneren Dreieck  $XYZ \equiv G$  als Fuß, sowie aus einem  $o$  zeigenden 6Flach  $A$  als Körper und aus zwei Flügeln, auch  $o$  zeigenden 5Flachen, wie an  $B$ . Das Netz 130 dazu gibt an der vorderen Lücke, die  $u$  zeigt, die Kanten 1 bis 4 als Wendestrecken. Die hintere Lücke öffnet sich breit bis oben, und zwei untere seitliche Lücken sind hinter dem Vorsprung  $A$ . Die in 127 nicht schraffierten Flächen gehören zum zweiten 13Flach 129, das über den drei Trapezen der Grundfläche, um das leere Dreieck  $XYZ$  der unteren Lücke, die nach  $O$  reicht, den Körper mit dem Rücken  $D$  und dem Kopf  $K$  besitzt, sowie noch unten zwei niedere seitliche Flügel, wie einer an  $E$ , über denen mit  $F$

eck, die je zwei Doppelstrecken enthalten. Die schraffierten 10 Flächen bilden, als das eine Scheitelgebiet, samt den drei Achsenschnitten das erste 13Flach 128, bestehend aus dem  $u$  zeigenden 4Flach über dem inneren Dreieck  $XYZ \equiv G$  als Fuß, sowie aus einem  $o$  zeigenden 6Flach  $A$  als Körper und aus zwei Flügeln, auch  $o$  zeigenden 5Flachen, wie an  $B$ . Das Netz 130 dazu gibt an der vorderen Lücke, die  $u$  zeigt, die Kanten 1 bis 4 als Wendestrecken. Die hintere Lücke öffnet sich breit bis oben, und zwei untere seitliche Lücken sind hinter dem Vorsprung  $A$ . Die in 127 nicht schraffierten Flächen gehören zum zweiten 13Flach 129, das über den drei Trapezen der Grundfläche, um das leere Dreieck  $XYZ$  der unteren Lücke, die nach  $O$  reicht, den Körper mit dem Rücken  $D$  und dem Kopf  $K$  besitzt, sowie noch unten zwei niedere seitliche Flügel, wie einer an  $E$ , über denen mit  $F$

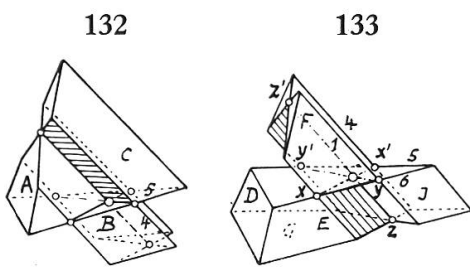


den anderen sind  $X_1$  und  $Y_1$  in zwei Seitenflächen und  $Z_1$  ist auf der diesen gemeinsamen Kante. Zu dem Tetraedernetz 127, mit der Teilung durch die Spuren  $XY X_1 Y_1, YZ Y_1 Z_1 ZX Z_1 X_1$  entstehen noch als Achsenschnitte zwei kongruente Trapeze und ein Dreieck, die je zwei Doppelstrecken enthalten. Die schraffierten 10 Flächen bilden, als das eine Scheitelgebiet, samt den drei Achsenschnitten das erste 13Flach 128, bestehend aus dem  $u$  zeigenden 4Flach über dem inneren Dreieck  $XYZ \equiv G$  als Fuß, sowie aus einem  $o$  zeigenden 6Flach  $A$  als Körper und aus zwei Flügeln, auch  $o$  zeigenden 5Flachen, wie an  $B$ . Das Netz 130 dazu gibt an der vorderen Lücke, die  $u$  zeigt, die Kanten 1 bis 4 als Wendestrecken. Die hintere Lücke öffnet sich breit bis oben, und zwei untere seitliche Lücken sind hinter dem Vorsprung  $A$ . Die in 127 nicht schraffierten Flächen gehören zum zweiten 13Flach 129, das über den drei Trapezen der Grundfläche, um das leere Dreieck  $XYZ$  der unteren Lücke, die nach  $O$  reicht, den Körper mit dem Rücken  $D$  und dem Kopf  $K$  besitzt, sowie noch unten zwei niedere seitliche Flügel, wie einer an  $E$ , über denen mit  $F$

ein Schutzteil vorspringt. Vom Netz 131 entsteht aus den Wendestrecken 1 bis 6 der Kantenzug um die vordere Lücke, die  $u$  zeigt, wie deren Gegenkörper an  $D$ , während die übrigen drei Teile  $o$  zeigen, wie an  $E$  und  $F$ . Die zwei seitlichen Lücken sind breit offen, als entsprechend den beiden Flügeln des ersten 13Flachs. Dieses hat die drei unteren Ecken des Tetraeders, während nur die oberste Ecke zum zweiten 13Flach gehört, so daß die Differenz der Eckenzahlen 2 ist.  $f_1 = 13$ ,  $e = 18$ ,  $k = 30$ ;  $f_2 = 13$ ,  $e = 16$ ,  $k = 28$ . Zu der hier erhaltenen Summe 26 der Anzahl der Flächen können noch weitere eigenartige Gestaltungen der Teilvielfläche erhalten werden.



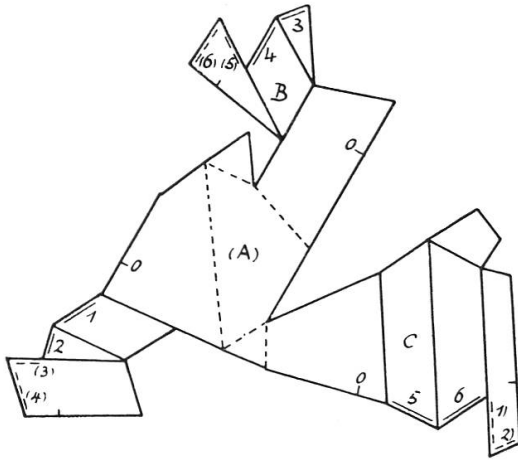
18. 13Flach 132 zu 14Flach 133. Eine Schnittebene ist parallel zur Grundfläche des Tetraeders gelegt, und sie enthält ein Dreieck mit den Achsen  $XX_1$  und  $YY_1$ , durch deren Schnitt  $O$  die dritte Achse  $ZZ_1$  parallel zu einer Kante geht, so daß die beiden anderen Ebenen Trapeze ausschneiden. Das 13Flach hat in der Grundfläche nur zwei kleine Dreiecke, über denen zwei prismatische Zellen mit Raute wie  $B$  stehen, so daß unten zwei Lücken neben ihnen



13Flach zu 14Flach

bleiben, über denen die anderen beiden Zellen sich erheben, die eine mit dem Fünfeck  $A$  und die andere mit dem Trapez  $C$ , getrennt durch die oberen zwei seitlichen Lücken. Das Netz 134 ergibt dazu die Wendestrecken 1 bis 5 an der Lücke unten rechts, die  $u$  zeigt, so daß die drei anstoßenden Zellen  $o$  zeigen, während die Zelle  $A$  auch  $u$  zeigt, wie ihre Gegenlücke. Das 14Flach 133 hat die größte Fläche, das

134

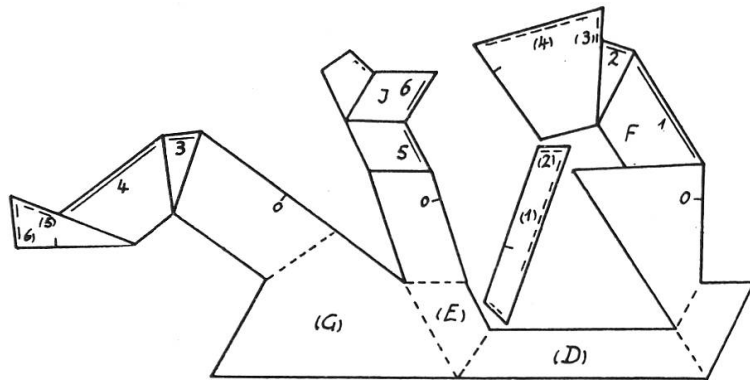


Fünfeck  $G$  nebst einem Viereck als Grundflächen, über welchen mit Seitenflächen  $D$ ,  $E$  und  $J$  die zwei unteren Zellen liegen, neben zwei Lücken, über denen die beiden oberen prismatischen Zellen aufgerichtet sind neben den zwei großen oberen Lücken. Aus dem Netz 135, dessen Aufklappung nach oben mit den Flächen beginnt, die um  $(G)$  angeordnet sind, entstehen die

Wendestrecken 1 bis 6 an der oberen Lücke, die der Zelle von  $G$  gegenüber liegt und die beide  $u$  zeigen, während die drei an diese Lücke anstoßenden Zellen  $o$  zeigen.

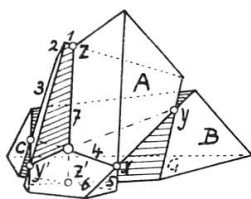
$f = 13$ ,  
 $e = 18$ ,  $k = 30$ ;  
 $f = 14$ ,  $e = 20$ ,  
 $k = 33$ . Das 13-Flach hat nur die oberste Ecke des Tetraeders; die Ecken an der

135

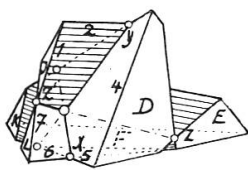


Grundfläche kommen zum 14-Flach, so daß dieses zwei Ecken mehr besitzt, da die 17 neu entstehenden Ecken beiden Teilvielflachen gemeinsam sind.

136



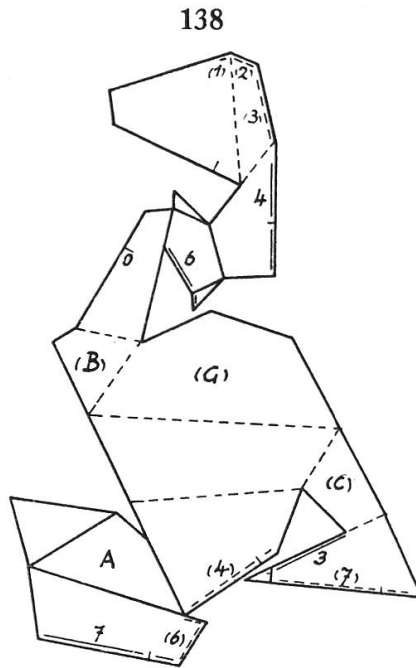
137



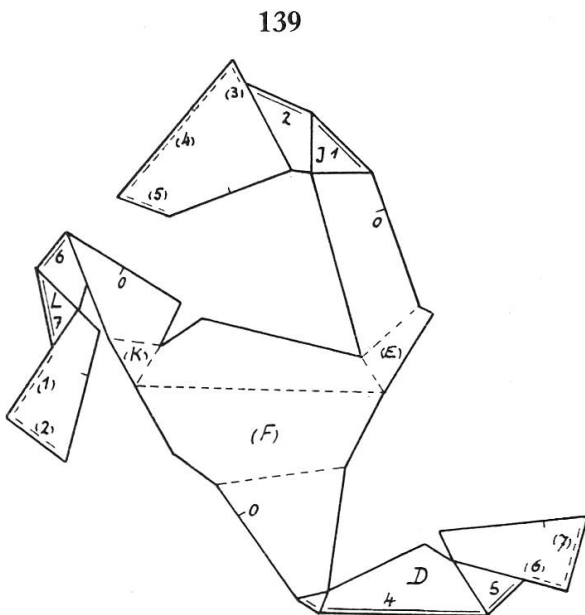
14-Flach zu 14-Flach

19. 14-Flach 136 zu 14-Flach 137. Die drei Schnittebenen durch das Tetraeder sind so gelegt, daß alle drei Achsenschnitte Vierecke werden, um die größte Summe aus der Anzahl der Flächen zu erhalten. In zwei

Tetraederflächen liegen je zwei Spurpunkte  $XY$  und  $X_1Y_1$  der Achsen, und in den anderen ist je ein Spurpunkt  $Z$  und  $Z_1$ . Daher werden die ersten zwei Flächen je in sechs und die anderen je in fünf Flächen geteilt, so daß für jedes Teilvielflach 11 Flächen entstehen, als zwei Scheitelgebiete, zu denen je noch die drei Achsenschnitte kommen. Aus dem Netz 138 entsteht das 14Flach 136 mit sieben Wendestrecken, darunter zwei Doppelstrecken  $XX_1 \equiv 4$  und  $ZZ_1 \equiv 7$ , deren Enden durch die Kanten 1, 2, 3 zu einem Fünfeck und durch 5, 6 zu einem Viereck geschlossen werden, so daß ein Siebeneck entsteht mit zwei durch  $O$  gehenden überschlagenden Seiten 4 und 7. Der Hauptteil dieses 14Flachs ruht auf dem großen Fünfeck  $G$ , mit zwei Seitenflächen  $B$  und  $C$ , die alle die



Unterseite  $u$  des Netzes zeigen, wie auch der an  $C$  anstoßende Teil mit 1, 2, 3, während der Teil  $A$  und der untere Teil mit 5, 6 ganz die Oberseite  $o$  zeigen. Aus dem Netz 139 entsteht das 14Flach über  $F$  und über zwei Dreiecken mit 5, 6 in der Grundfläche. An der Gegenlücke zu  $F$  schließen sich die Möbiusbänder in den Wendestrecken 1 bis 7, indem sie  $u$  in der

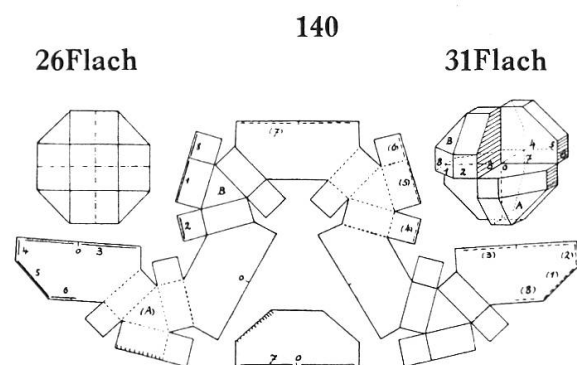


Lücke mit  $o$  an  $D, J, L$  verbinden, während  $E$  und  $K$  wieder  $u$  zeigen, wie überhaupt der ganze Teil über  $F$ . Diese Verteilung von  $o$  und  $u$  tritt immer ein, wenn die Wendestrecken

den Kantenzug an einer Lücke bilden, also keine Doppelstrecken dazutreten. In diese vordere Lücke von **137** paßt der Teil mit *G, B, C* von **136**. Da jedes dieser 14Fläche vom Tetraeder zwei Ecken hat, haben sie auch gleiche Anzahl von Ecken und Kanten:  $f = 14$ ,  $e = 20$ ,  $k = 33$ .

## VI. Ikoehexaeder zerlegt in zwei 31Fläche

Zur Zerlegung durch drei zueinander senkrechte Ebenen eignen sich besonders Polyeder mit drei Symmetrieebenen. Hier sei ein Beispiel ausgeführt für ein Ikoehexaeder des *Archimedes*, das von 8 Dreiecken und 18 Quadraten **140** begrenzt ist.



Möbiusbänder (1)—1 bis (8)—8

Die Schnittebenen sind so gelegt, daß als Achsenschnitte drei regelmäßige Achtecke entstehen, wobei die acht Dreiecke am 26Flach ungeteilt bleiben, während die Quadrate in 24 Quadrate und 24 Rechtecke zerfallen. Auf vier Scheitelachtel kommen daher 4 Dreiecke, 12 kleine Quadrate und 12 Rechtecke zu den drei Achsenschnitten, so daß ein einseitiges Teilvielflach 31 Flächen erhält. Das Netz dazu ist in symmetrischer Anordnung zusammengesetzt, wodurch unter den Wendestrecken 1 bis 8 zwei Doppelstrecken 3 und 7 entstehen, welche mit den übrigen als Kanten in einer der Achsenschnittebenen ein überschlagenes Achteck bilden mit dem Schnitt von 3 und 7 in *O* als Doppelpunkt, was zwei in *O* zusammenstoßende Fünfecke in Scheitellage gibt. Die beiden Teile rechts wie *A* zeigen *u*, die links *o*.  $f = 31$ ,  $e = 42$ ,  $k = 72$ ,  $c = 1$ .

Auf diese Weise können beliebige konvexe Polyeder in zwei einseitige Vielfläche mit drei Doppelstrecken zerlegt werden mittelst dreier Schnittebenen, welche einander in

enthalten sind, so daß als Achsenschnitte drei regelmäßige Achtecke entstehen, wobei die acht Dreiecke am 26Flach ungeteilt bleiben, während die Quadrate in 24 Quadrate und 24 Rechtecke zerfallen. Auf vier Scheitelachtel kommen daher

drei Achsen schneiden, die durch einen Punkt im Innern des Polyeders gehen.

*Satz:* Vier Scheitelachtel eines konvexen Polyeders bilden zusammen ein einseitiges Vielflach.<sup>4</sup>

Damit wurde, anschließend an das Heptaeder, eine Reihe  $F=(12t+7)$ Fläche<sup>4</sup> gebildet aus Polyedern mit drei Symmetrieebenen, mit Ausführung der Netze für zwei 19Fläche und mit Angabe des Grenzfalles.

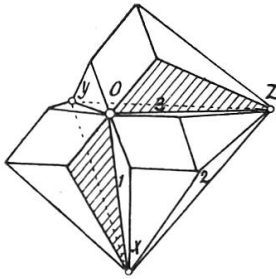
### b) $O$ liegt auf dem Polyeder oder außerhalb

Die drei Schnittebenen wurden bisher so angenommen, daß ihr Schnittpunkt  $O$  ins Innere des gegebenen konvexen Polyeders fiel. Dabei entstehen stets zwei einseitige Teilvielfläche von der Charakteristik  $c = 1$ . Diese Konstruktionen lassen sich aber auch erweitern, vorerst durch die Annahme, daß  $O$  auf dem gegebenen Polyeder angenommen wird, in einer Fläche, Kante oder Ecke, wobei es nicht mehr in acht, sondern nur noch in sieben Teile zerlegt wird. Das Teilvielflach, zusammengesetzt aus drei Scheitelteilen, bleibt einseitig mit  $c = 1$ ; seine drei Zellen sind um die innere Lücke angeordnet, neben noch drei seitlichen Lücken. Das andere Teilvielflach aus vier Zellen mit drei äußeren Lücken wird dagegen zweiseitig mit  $c = 2$ , trotz der Durchdringungen in den drei Doppelstrecken. Ferner kann  $O$  auch außerhalb des Polyeders angenommen werden, wodurch eine das Vielflach durchbrechende innere Lücke entsteht, um welche drei Zellen und drei Lücken liegen, die ein einseitiges Vielflach bilden mit der Charakteristik  $c = 0$ . Die übrigen vier Zellen, die mit drei seitlichen Lücken um eine Mittelzelle angeordnet sind, bilden dazu ein zweiseitiges Vielflach mit  $c = 2$ .

## VII. Oktaeder zerlegt in ein- und zweiseitiges Vielflach

1. 15Flach zu 10Flach.  $O$  ist in der Mitte einer Fläche des regelmäßigen Oktaeders 141 angenommen, und die drei Achsen  $xyz$  gehen von  $O$  aus nach den Ecken  $XYZ$  der parallelen Gegenfläche  $G$ . Die drei Achsenschnitte sind kon-

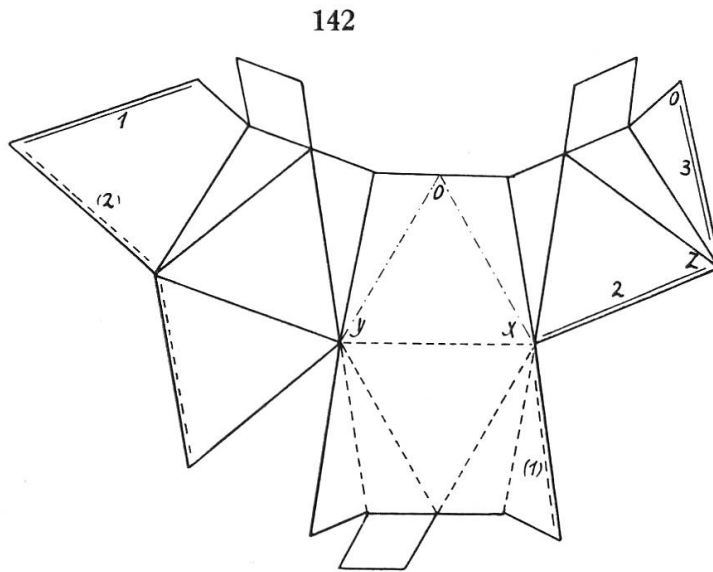
gruente Trapeze. Die Grundfläche  $G$  und drei Seitenflächen werden nicht geteilt, und die übrigen drei Seitenflächen zerfallen in ein mittleres gleichschenkliges Dreieck und zwei seitliche Dreiecke. Die Deckfläche, die  $O$  enthält, zerfällt in drei Rauten, die nach den Ecken gehen, und in drei dazwischen liegende Dreiecke. Über  $G$  steht ein zweiseitiges 10Flach, bestehend aus einer mittleren Pyramide, an deren Kanten drei seitliche Pyramiden liegen, die nach den oberen Dreiecken sich erstrecken. Das Ergänzungs-  
 141  
 15Flach  
 O in einer Fläche



vielflach ist ein einseitiges 15Flach 141, dem  $G$  fehlt, da von den Grundkanten aus die mittlere Lücke bis in die Mitte  $O$  der Deckfläche reicht. Um diese Lücke sind die drei Zellen angeordnet, die bis zu den Rauten um  $O$  gehen, mit drei dazwischen liegenden Lücken, wie eine an 3 ist.

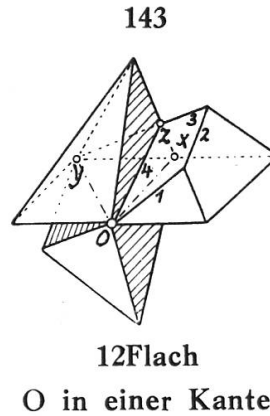
Aus dem Netz

142 entstehen als Wendestrecken die Doppelstrecken 1 und 3 nebst 2 als verbindende Grundkante.  $f = 10$ ,  $e = 10$ ,  $k = 18$ ,  $c = 2$ ;  $f = 15$ ,  $e = 13$ ,  $k = 27$ ,  $c = 1$ . Das 15Flach hat drei Oktaederecken für sich allein, nämlich die oberen, während an den anderen beide Teilvielfläche beteiligt sind.



2. Zwei 12Flache.  $O$  liegt in der Mitte einer Kante des Oktaeders 143,  $X$  in der Mitte der parallelen Gegenkante,  $Y$  in einer Ecke von dieser, und  $Z$  ist in der Mitte einer anliegenden Fläche. Der Achsenschnitt der Ebene  $OXY$  wird ein Quadrat, derjenige durch  $OXZ$  eine Raute, und die

Ebene  $OYZ$  schneidet ein Fünfeck heraus über 1, 2, 3. Die Hohlpyramide  $OXYZ$  ist die innere Lücke des einseitigen 12Flachs, um welche seine drei Zellen angeordnet sind. Für das Netz 144 dieses 12Flachs ist das Quadrat mit den Doppelstrecken  $OX$  und  $OY$  ganz gelassen, dafür ist die Raute durch  $OX$  und  $OY$  in drei Flächen geteilt und das Fünfeck durch  $OY$  in deren zwei. Durch die Aufklappung entstehen als Wendestrecken die Doppelstrecke 4 und die Kanten 1, 2, 3, die ein Viereck in der Ebene des Fünfecks bilden.  $f = 12, e = 12, k = 23, c = 1$ . Das Ergän-

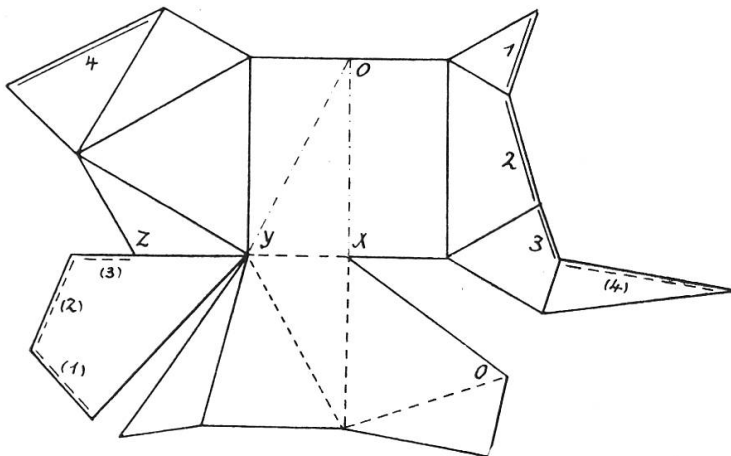


12Flach

O in einer Kante

zungsvielflach ist ein zweiseitiges 12Flach, bestehend aus der Pyramide  $OXYZ$  als Mittelzelle, an welche die drei seitlichen Zellen angefügt sind, welche aus den Seitenlücken von 143 kommen.  $f = 12, e = 12, k =$

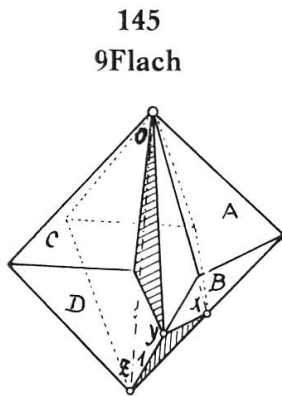
144



22,  $c = 2$ . Beide 12Flache sind an allen Ecken des Oktaeders beteiligt.

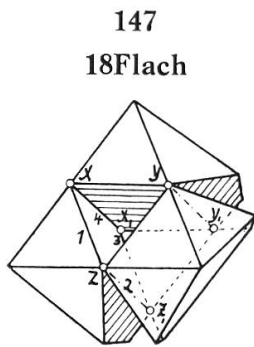
3. **9Flach zu 10Flach.**  $O$  ist in einer Ecke des Oktaeders 145, und  $Z$  ist in der Gegenecke.  $X$  und  $Y$  sind auf zueinander benachbarten Kanten, die von  $Z$  aus gehen, so daß  $XY$  eine Mittelparallele in deren Fläche ist. Zwei der Ebenen schneiden Quadrate heraus, und die Ebene  $OXY$  enthält ein Fünfeck als Schnitt mit dem Oktaeder. Als ein Teilvielflach entsteht ein einseitiges 9Flach mit drei Zellen, angeordnet um die Lücke  $OXYZ$ . Aus dem Netz 146 wird durch die Aufklappung die Hauptachse  $OZ$ , als der Schnitt





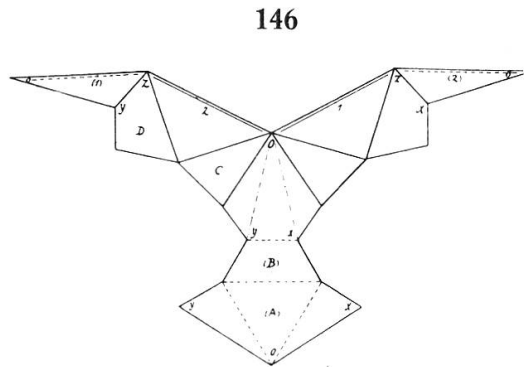
145  
9Flach  
O in einer Ecke  
k = 18. Beide Vielfache sind an allen Ecken des Oktaeders beteiligt.

4. 18Flach zu 17Flach. O liegt *außer* dem Oktaeder, durch die Annahme der Achsen  $x \parallel y \parallel z$ . Durch die Mitten X, Y, Z der drei Kanten einer Fläche des Oktaeders 147 sind Lote gefällt auf die Gegenfläche. Damit wird das Oktaeder in einem Prisma von X, Y, Z nach  $X_1, Y_1, Z_1$  durchstoßen als der inneren Lücke für das einseitige 18Flach, bestehend aus drei um diese Lücke angeordneten Zellen, von denen jede für sich ein 8Flach ist über einem Trapez der Grundfläche. Diese drei Trapeze umschließen darin das Dreieck  $X_1 Y_1 Z_1$  der inneren Lücke. Aus dem Netz 148 entstehen als Wendestrecken an 147 zwei Doppelstrecken  $2 \equiv Z Z_1$  und  $4 \equiv X X_1$  die durch die Kanten  $1 \equiv X Z$  und  $3 \equiv X_1 Z_1$  auch als Wendestrecken zu einem Rechteck geschlossen werden. Eine Zelle zeigt u und zwei Zellen zeigen o.  $f = 18, e = 21, k = 39$ . Dieses 18Flach hat also die *Charakteristik*  $c = o$ . Das Er-



147  
18Flach  
O im  $\infty$

der beiden Quadrate in Schnittebenen, zur Doppelwendestrecke  $1 \equiv 2$ , in der sich zwei Möbiusbänder schließen, da beide Quadrate ihre Netzseiten in ihr wenden. Das Fünfeck bleibt ungeteilt, wodurch das Netz sich symmetrisch anordnen läßt, mittelst einer weiteren Teilung von zwei Quadrathälften je in zwei Dreiecke mit einer Ecke o.  $f = 9, e = 10, k = 18, c = 1$ . Das Ergänzungsvielflach aus vier Zellen wird ein zweiseitiges 10Flach:  $f = 10, e = 10,$

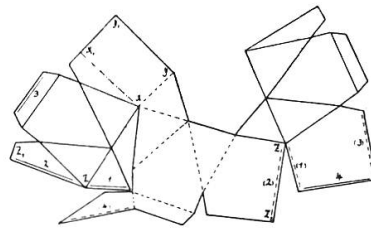


146  
Doppelwendestrecke  $1 \equiv 2$

Das Er-

gänzungsvielflach, bestehend aus dem mittleren Prisma und aus an den drei Seitenkanten angefügten 6Flachen, ist zweiseitig:  $f = 17$ ,  $e = 21$ ,  $k = 36$ ,  $c = 2$ . Die drei Seitenzellen zeigen die andere Netzseite als die Mittelzelle.

148

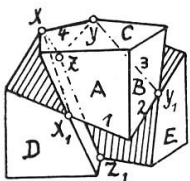


### VIII. Würfel zerlegt in ein- und zweiseitiges Vielflach.

12Flach zu 18Flach.  $O$  ist außerhalb des Würfels 149 auf der Verlängerung einer Körperdiagonale, indem die Spurpunkte  $XYZ$  auf den drei Kanten der einen ihrer Ecken liegen und  $X_1 Y_1 Z_1$  in den Mitten der Quadrate der Gegenecke.  $XX_1, YY_1, ZZ_1$  bestimmen einen Pyramidenstumpf, als inneren den Würfel durchstoßende Lücke, um welche die drei Zellen des 12Flachs liegen. Die Achsenschnitte sind Fünfecke, von denen eines im Netz 150 ganz gelassen ist, das mit  $XX_1$  und  $ZZ_1$ ; ein anderes ist durch die Doppelstrecke 5 geteilt, und das dritte ist zweifach geteilt mit (3). Die Aufklappung gibt als Wendestrecken zwei Doppelstrecken  $YY_1 \equiv 3$  und  $XX_1 \equiv 5$  und die Kanten 1, 2, 4, die zusammen ein Fünfeck bilden in der Ebene von  $XX_1 YY_1$ , wobei aber 3 Wendestrecke ist für Teile der Ebene  $YY_1 ZZ_1$ . Die Zelle mit  $D$  zeigt  $u$  des Netzes, die übrigen beiden Zellen mit  $A$  und  $E$  zeigen dessen Oberseite  $o$ .  $f = 12$ ,  $e = 18$ ,  $k = 30$ , also wieder  $c = 0$ . Das Ergänzungsvielflach ist ein zweiseitiges 18Flach; um den inneren Pyramidenstumpf sind an den Doppel-

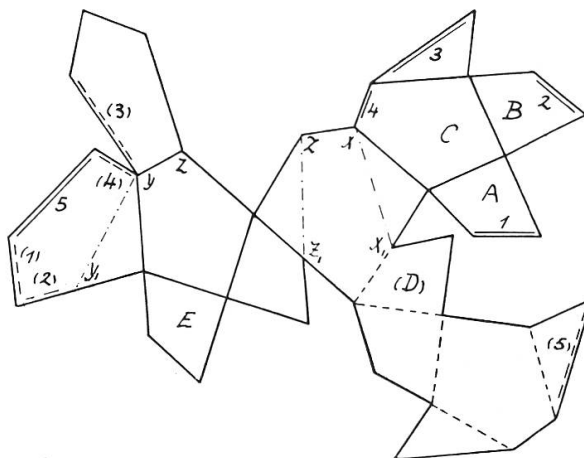
149

12Flach



$O$  außen

150



um den inneren Pyramidenstumpf sind an den Doppel-

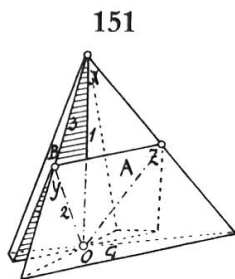
strecken drei seitliche Zellen angefügt, welche alle die entgegengesetzte Netzseite zeigen als die mittlere Zelle. Dadurch entsteht ein geschlossener Umlauf in jeder der beiden Netzseiten mit dreimaliger Durchsetzung von Doppelstrecken, so daß Zweiseitigkeit bestehen muß, weil die beiden Untergebiete  $o$  und  $u$  in dem Scheitelgebiet einander trennen. Bei drei Zellen mit ungleichen Netzseiten neben drei Lücken um eine innere Lücke angeordnet, entsteht dagegen im Scheitelgebiet ihrer Flächen ein Übergang zwischen den beiden Untergebieten der Flächen von  $o$  und  $u$ , wodurch die Einseitigkeit eintritt (siehe Abschnitt XIII).

## IX. Tetraeder zerlegt in ein- und zweiseitiges Vielflach

Diese verschiedenen Fälle der Zerlegungen lassen sich wiederum am Tetraeder noch leichter eingehender verfolgen. Der dreifache Punkt  $O$ , von dem aus die drei Achsen durch das Tetraeder gehen, liege zuerst in einer Fläche, dann auf einer Kante, in einer Ecke und schließlich noch außerhalb des Tetraeders. Dabei sei zuerst von Fällen kleiner Flächenanzahl ausgegangen.

### a) $O$ auf dem Tetraeder.

1. **9Flach zu 11Flach.**  $O$  liegt in der Mitte der Grundfläche  $G$  des Tetraeders **151**,  $X$  in der Gegenecke und  $Y, Z$  auf zwei Kanten nach dieser, in deren Mitte. Die Achsenschnitte der

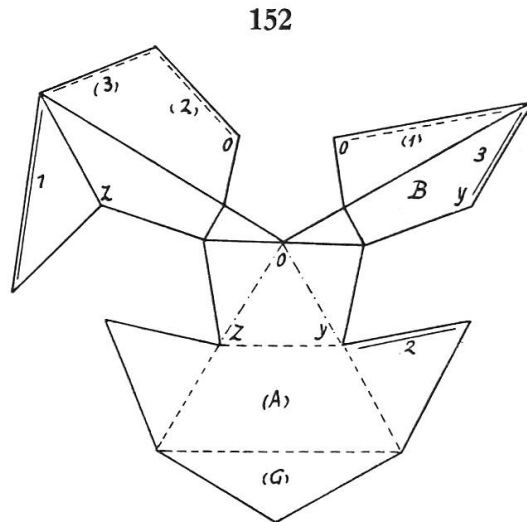


9Flach  
 $O$  in  $G$

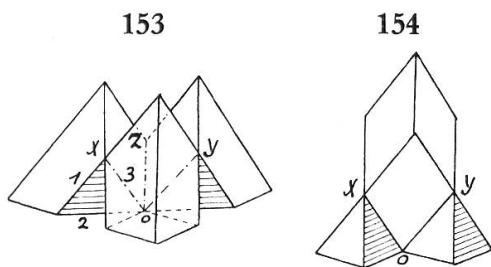
Ebenen  $OXY$  und  $OXZ$  sind gleichschenkelige Dreiecke, und die Ebene  $OYZ$  schneidet ein Trapez heraus. Das Netz **152**, in welchem das Trapez mit  $OY$  und  $OZ$  ganz gelassen ist, wodurch Symmetrie in der Anordnung der Flächen entsteht, ergibt als Wendestrecken zwei Doppelstrecken  $OX \equiv 1$  und  $OY \equiv 2$ , welche durch die Kante 3 zu einem Dreieck verbunden sind. Dabei entsteht das ein-

seitige 9Flach **151** mit der inneren Lücke  $OXYZ$ , um welche die drei Zellen angeordnet sind, eine vordere mit  $A$ , die  $u$

zeigt, und zwei seitliche, zueinander symmetrisch, die  $o$  zeigen, wie die von  $B$ , zwischen denen hinten eine breite Lücke ist, während vor ihnen seitlich noch zwei kleine Lücken unten sind. Das zugehörige 11Flach ist zweiseitig.  $f = 9$ ,  $e = 10$ ,  $k = 18$ ,  $c = 1$ ;  $f = 11$ ,  $e = 11$ ,  $k = 20$ ,  $c = 2$ .



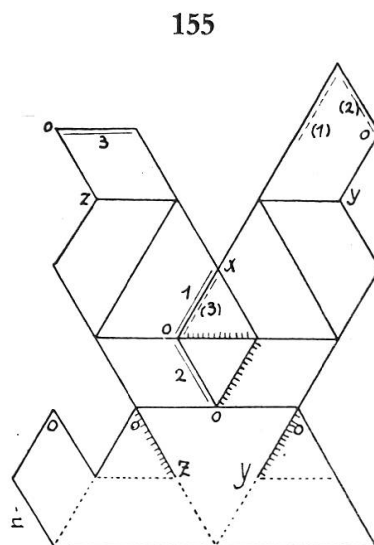
2. 12Flach einseitig 153 zu 12Flach zweiseitig 154.  $O$  ist in der Mitte der Grundfläche  $G$ , und  $X Y Z$  sind in der Mitte der Seitenflächen. Die innere Lücke des einseitigen 12Flachs geht von  $O$  aus nach  $Y$ ,  $Y$ ,  $Z$  und ist von drei deckungsgleichen prismatischen Zellen eingeschlossen über Rauten in der Grundfläche. Dessen Netz



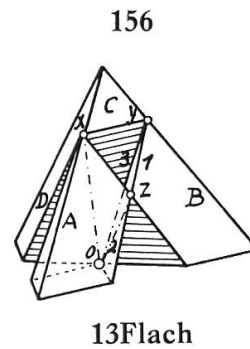
12Flach zu 12Flach

155 ergibt als Wendestrecken eine Doppelstrecke  $3 \equiv O X$ , eine Grundkante 2 und eine Seitenkante 1.  $f = 12$ ,  $e = 16$ ,  $k = 27$ ,  $c = 1$ . Das zweiseitige 12Flach 154 hat drei untere Zellen über Dreiecken neben drei Lücken und eine mittlere Zelle darüber, von sechs Rauten begrenzt.  $f = 12$ ,  $e = 14$ ,  $k = 24$ ,  $c = 2$ .

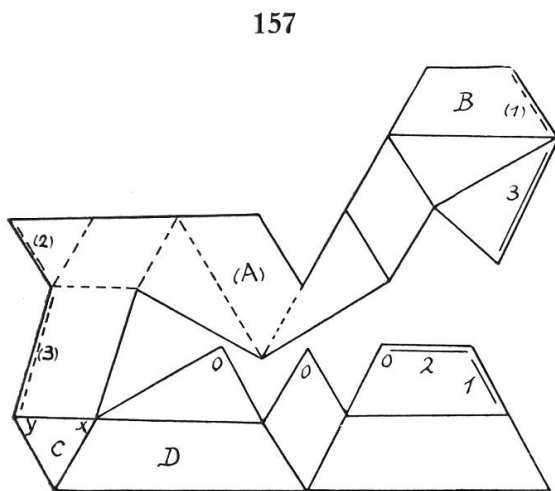
3. 10Flach zweiseitig zu 13Flach einseitig 156.  $O$  ist in der Mitte der Grundfläche,  $Z$  in der Mitte einer Seitenfläche, und  $X$  und  $Y$  sind darüber auf deren Seitenkanten, so daß die Ebene durch  $O X Y$  ein Trapez herauschneidet, während die beiden anderen Ebenen gleichseitige Dreiecke



als Achsenschnitte ergeben. Das 13Flach hat  $OXYZ$  als mittlere Lücke, um welche über den Rauten der Grundfläche drei Zellen mit  $A, B$  und  $D$  angeordnet sind, von denen die letztere mit  $C$  die Lücke überragt. Daneben sind noch drei untere Lücken. Das Netz 157 ergibt als Wendestrecken zwei Doppelstrecken  $OZ \equiv 2$  und  $OY \equiv 3$  und die Kante  $YZ \equiv 1$  zu einem Dreieck. Das zugehörige 10Flach, das die den Lücken des 13Flachs entsprechenden vier Zellen besitzt, hat nur drei Lücken. Es besitzt keine Ecken

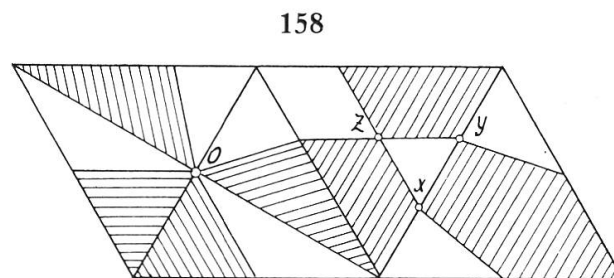


des Tetraeders, es hat  $O, X, Y, Z$  als Ecken und noch die sechs äußeren Ecken der drei Dreiecke in der Grundfläche.  $f = 10, e = 10, k = 18, c = 2; f = 13, e = 14, k = 26, c = 1$ .



4. 10Flach einseitig 159 und 11Flach zweiseitig 160.  $O$  ist in der Mitte einer Kante des Tetraeders.  $X$  und  $Y$  sind auf der Gegen-

kante, und  $Z$  liegt in einer an diese anstoßenden Fläche. In 158 sind die sieben Flächen schraffiert, die zum 10Flach als das eine Scheitelgebiet gehören, das von den Spuren  $OXY, OYZ, OZX$  der drei Schnittebenen eingeschlossen ist und aus drei Teilen besteht, die in  $O, X, Y, Z$  zusammenstoßen. Dazu kommen noch

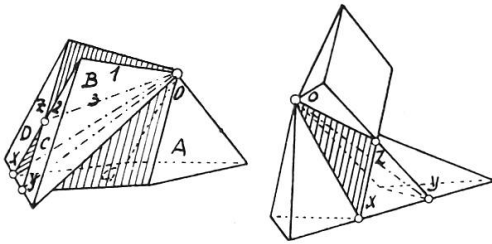


Scheitelgebiet des 10Flachs

als Achsenschnitte ein Dreieck und zwei Trapeze. Das einseitige 10Flach hat um die Mittellücke  $OXYZ$  drei Zellen: die mittlere über  $G$  mit  $A$  und zwei seitliche an  $C$  und  $D$ .

159

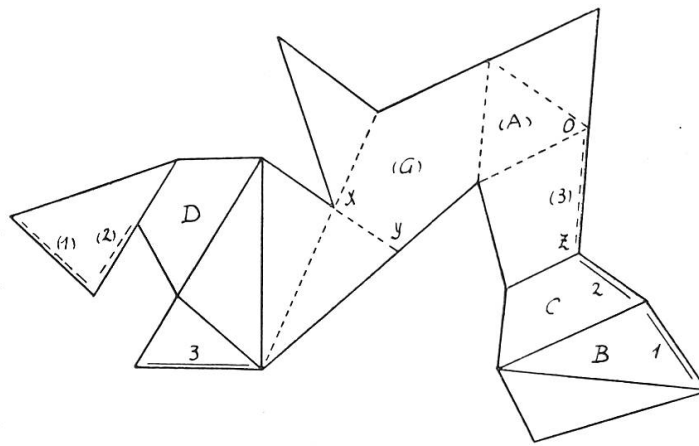
160



10Flach zu 11Flach

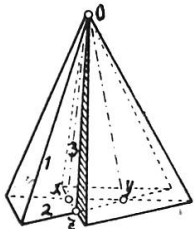
Das Netz **161** ergibt durch Aufklappung die Wendestrecken 1 und 2 als Kanten und  $3 \equiv OZ$  als Doppelstrecke.  $f = 10$ ,  $e = 11$ ,  $k = 20$ ,  $c = 1$ . Das zugehörige 11Flach **160** ist zweiseitig; es besitzt die Mittelzelle  $OXYZ$  und daran drei Seitenzellen, zwischen denen die drei Lücken liegen.  $f = 11$ ,  $e = 11$ ,  $k = 20$ ,  $c = 2$ . Die Eckenzahlen sind gleich bei 10Flach und 11Flach, denn jedes hat eine Ecke des Tetraeders für sich allein, und die übrigen zwei Ecken sind gemeinsam als geteilt. Die Fläche  $XYZ$  **160** paßt in die Lücke  $XYZ$  **159** und in diese Lage gebracht ergänzen die beiden Teilvielfläche einander zum ganzen Tetraeder.

161



5. **9Flach 162 einseitig und 13Flach zweiseitig.**  $O$  ist in einer *Ecke* des Tetraeders, und  $YYZ$  sind in der Gegenfläche  $G$ , so daß die drei Ebenen, gelegt durch die Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , kongruente gleichschenklige Dreiecke als Achsenschnitte ergeben. Das 9Flach hat um die innere Lücke  $OXYZ$  drei Zellen, von denen zwei gleiche Netzseite zeigen. Zwischen diesen Zellen sind die drei Seitenlücken als Rinnen an den Doppelstrecken. Das Netz **163** dazu gibt als Wendestrecken zwei Kanten 1 und 2 und die sie zu einem Dreieck schließende Doppelstrecke  $3 \equiv OZ$ .  $f = 9$ ,

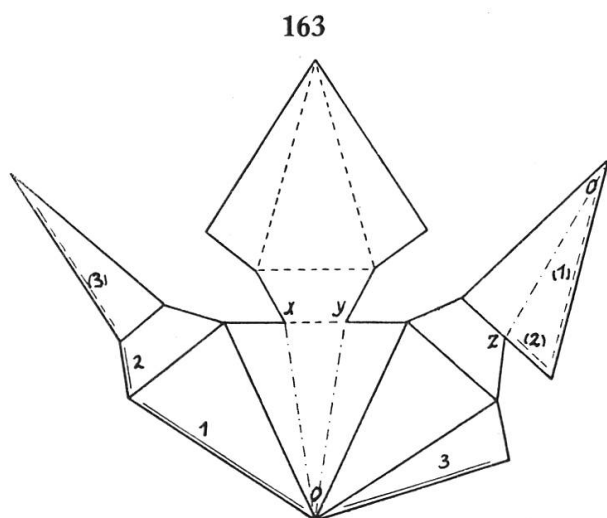
162



9Flach

 $O$  in einer Ecke

$e = 10, k = 18, c = 1$ . Das zugehörige 13Flach hat  $OXYZ$  als Mittelzelle und drei seitliche, an die Doppelstrecken ange-



gefügte Zellen über den Eckrauten in  $G$ . Diese drei Zellen zeigen untereinander die gleiche Netzseite, verschieden von der der Mittelzelle.  $f = 13, e = 13, k = 24, c = 2$ . Dieses 13Flach hat die drei Ecken an der Grundfläche des Tetraeders für sich allein, die vierte Ecke in  $O$  aber

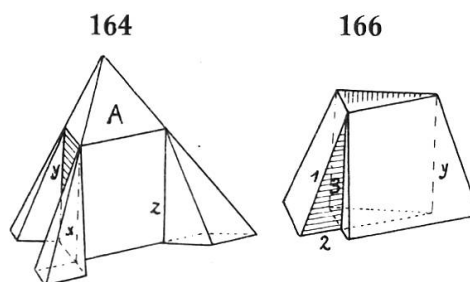
gemeinsam mit dem 9Flach. Für die Annahme von  $O$  in einer Ecke bestehen nur wenige Fälle. Man kann dabei die Schnittebenen noch durch Seitenkanten des Tetraeders legen. Legt man alle drei Ebenen von  $O$  aus je durch eine Seitenkante, so erhält man 9Flach und 10Flach, mit *kleinster* Flächenanzahlsumme 19 für  $O$  in einer Ecke.

### b) $O$ außer dem Tetraeder.

6. 9Flach 166 einseitig und 16Flach 164 zweiseitig.  $O$  liegt außerhalb des Tetraeders durch die Annahme der Achsen

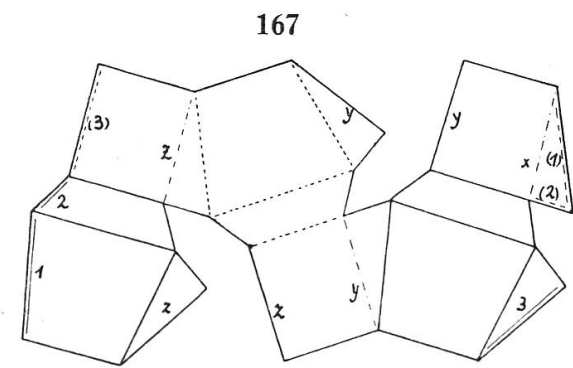
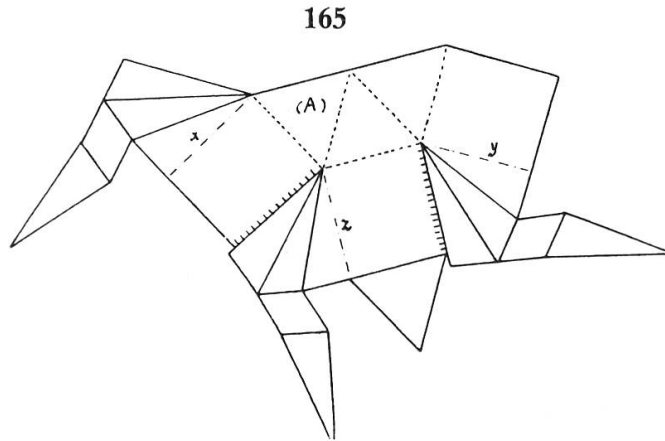
$x \parallel y \parallel z$  und zwar senkrecht zur Grundfläche und so, daß die Seitenkanten getroffen werden in Punkten gleicher Entfernung von der Spitze. Das entstandene 9Flach erhält eine *durchgehende* innere prismatische Lücke, eingeschlossen von drei Zellen als Keile an Trapezen.

Aus dem Netz 167 dazu ergeben sich als Wendestrecken zwei Kanten 1 und 2 und eine Doppelstrecke 3.  $f = 9, e = 12, k = 21$ , also ist die *Charakteristik*  $c = 0$ . Die Zusammenhangszahl ist somit  $h = 3$ , wenn das Vielflach mit drei Doppelstrecken



16Flach zu 9Flach

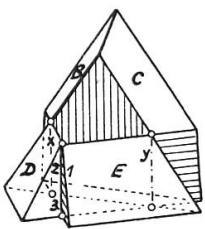
eine innere durchgehende Lücke besitzt, prismatisch oder auch als Pyramidenstumpf, umgeben von drei Zellen. Das zu dem angegebenen 9Flach zugehörige 16Flach **164** stellt das aus dem Tetraeder erhaltene Teilvielflach größter Flächenanzahl dar. Zugleich ist die Differenz ihrer Flächenanzahlen als 7 die nächste unter der größten, die zwischen 7Flach und 15Flach besteht. Auch hier gehören alle Ecken des Tetraeders zum zweiten Vielflach.



Dieses 16Flach hat eine Mittelzelle als Prisma mit aufgesetzter Pyramide *A* und drei seitliche Pyramiden über Rauten, zwischen denen Lücken einspringen über den leeren Trapezen der Grundfläche.  $f = 16, e = 16,$

$k = 30, c = 2$ . Das Netz **165** ergibt keine Wendestrecken; an allen bei der Aufklappung entstehenden Kanten schließt das Netz sich gleichseitig. Doch zeigt die Mittelzelle die andere Netzseite als die drei Außenzellen.

168



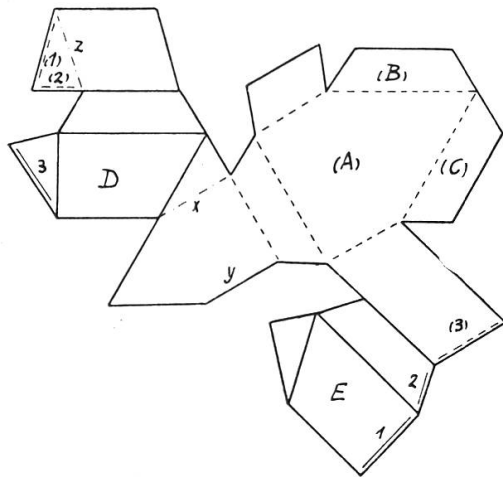
11Flach  
h = 3

**7. 11Flach einseitig 168 und 15Flach zweiseitig.** Die Achsen sind  $x \parallel y \parallel z$  und so angenommen, daß sie durch die Grundfläche des Tetraeders gehen und daß  $z$  die vordere Seitenkante schneidet, während  $x$  und  $y$  je die benachbarten Seitenflächen innen treffen, so daß die zwei vorderen Achsenschnitte Trapeze werden und daß der dritte ein Dreieck ist, parallel zur Rückfläche. Das 11Flach hat vorn an der zwischen  $x y z$



liegenden inneren Lücke zwei Keile an  $D$  und  $E$  und hinten mit  $B$  und  $C$  am Fünfeck der Rückfläche eine schräg aufgerichtete Platte. Das Netz

169

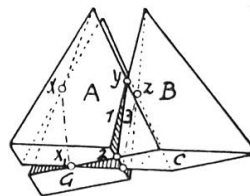


169, dessen Aufklappung bei ( $A$ ) nach oben beginnt, ergibt als Wendestrecken die Kanten 1 und 2 und die Doppelstrecke  $3 \equiv z$ .  $f = 11$ ,  $e = 16$ ,  $k = 27$ , also  $c = 0$  oder  $h = 3$ . Die Zellen an  $D$  und  $E$  zeigen  $o$ , und die Zelle an  $B$  zeigt  $u$ . Das 15Flach ist entsprechend wie 164, nur bildet das Dreieck oben auf der Rückseite mit der anstoßenden Prismenfläche

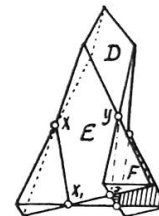
zusammen eine Fläche, ein Fünfeck wie ( $A$ ).  $f = 15$ ,  $e = 18$ ,  $k = 31$ ,  $c = 2$ . Das 15Flach hat die drei unteren Ecken des Tetraeders und das 11Flach die obere Ecke.

8. 12Flach 170 einseitig und 13Flach 171 zweiseitig. Die Achsen treffen die drei Seitenflächen des Tetraeders in  $X, Y, Z$ , je in der Mitte, und die Grundfläche  $G$  in  $X_1, Y_1, Z_1$ , so daß die Achsen nach einem Punkte unter  $G$  zusammenlaufen, der in der Verlängerung des Lotes liegt, von der Spitze gefällt zu  $G$ . Damit erhält das 12Flach eine durchgehende innere Lücke mit einem offenen Dreieck in  $G$ , die umgeben ist von drei Pyramiden. Das

170

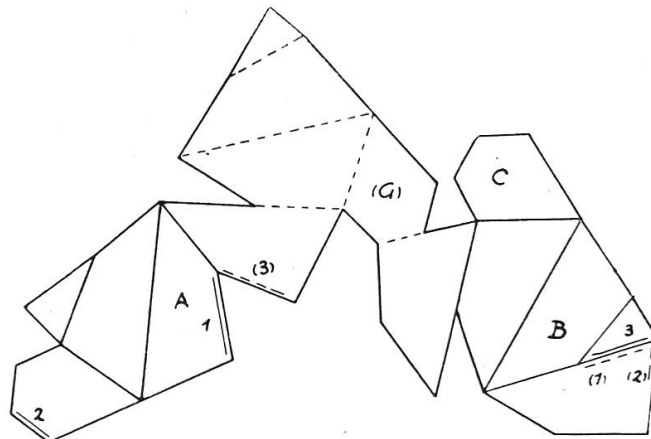


171

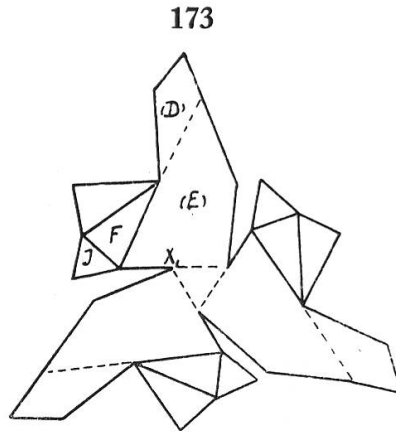


12Flach zu 13Flach

172



Netz 172 schließt sich nach Aufklappung in den Wendestrecken 1, 2, 3, von denen  $3 \equiv YY_1$  eine Doppelstrecke ist. Das 13Flach 171, bestehend aus der Mittelzelle  $D$  und drei sie unten umgebenden Seitenzellen, wie  $F$ , hat im Netz 173 die Flächen regelmäßig angeordnet in einem hübschen Drehstern.  $f = 12$ ,  $e = 18$ ,  $k = 30$ ,  $c = 0$ ;  $f = 13$ ,  $e = 16$ ,  $k = 27$ ,  $c = 2$ .

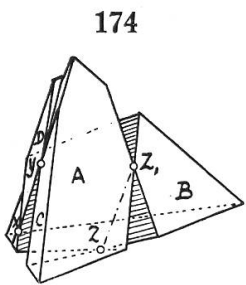


9. 13Flach 174 einseitig und 15Flach zweiseitig. In zwei Flächen

des Tetraeders sind je zwei Spurpunkte  $XY$  und  $X_1Y_1$  und in den übrigen beiden ist je einer  $Z$  und  $Z_1$  so angenommen, daß bei drei parallelen Achsen alle drei Achsenschnitte Vierecke werden, wodurch die größte Zahl der Flächenanzahlsumme 28 erreicht wird. Die innere Lücke des 13Flachs ist prismatisch zwischen den parallelen Doppelstrecken  $XX_1 \parallel YY_1 \parallel ZZ_1$ . Sie ist umgeben von der stehenden Zelle  $A$ , der liegenden  $B$  und der diese beiden zusammenschließenden Zelle  $D$  als Platte. Das Netz 175 dazu ergibt durch die Aufklappung als Wendestrecken die Kanten 1

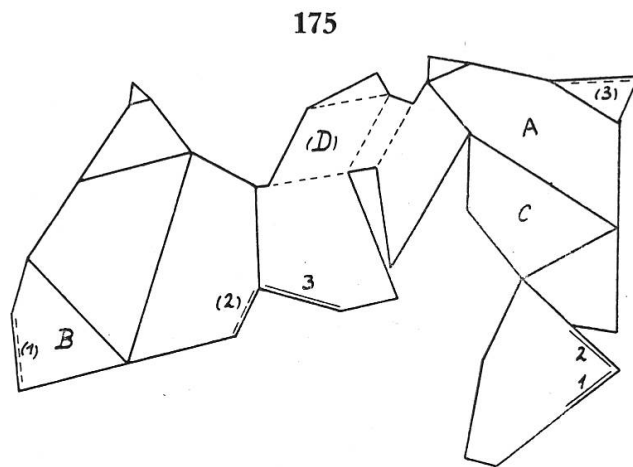
und 2 und die Doppelstrecke  $3 \equiv ZZ_1$ . Das 15Flach besteht aus Mittelzelle und drei seitlichen Zellen.  $f = 13$ ,  $e = 21$ ,  $k = 34$ ,  $c = 0$ ;  $f = 15$ ,  $e = 17$ ,  $k = 30$ ,  $c = 2$ .

Damit ist ein Einblick in die vielen Möglichkeiten der Zerlegung des Tetraeders durch drei Ebenen in ein einseitiges und ein zweiseitiges Vielflach gegeben.



174

13Flach zu 15Flach



175