

# Verallgemeinerung des Begriffs der Dimension einer physikalischen Grösse

Autor(en): **Roth, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Luzern**

Band (Jahr): **17 (1955)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-523435>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**Verallgemeinerung  
des Begriffs der Dimension  
einer physikalischen Größe**

**von Dr. E. Roth**



## Inhalt

|  |     |
|--|-----|
| 1. Die Dimension einer physikalischen Größe . . . . .              | 147 |
| 2. Der geometrische Raum . . . . .                                 | 149 |
| 3. Definition der geometrischen Größe . . . . .                    | 151 |
| 4. Affinoren im $E_n$ . . . . .                                    | 152 |
| 5. Algebra der Affinoren . . . . .                                 | 153 |
| 6. Symmetrieeigenschaften von Affinoren . . . . .                  | 155 |
| 7. Affinor- $\Delta$ -Dichten . . . . .                            | 157 |
| 8. Gewöhnliche Dichten und $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektoren . . . . . | 160 |
| 9. Identifikationen . . . . .                                      | 163 |
| 10. Invariante Differentialoperationen (Affinoranalysis) . . . . . | 165 |
| 11. Zusammenfassung . . . . .                                      | 166 |
| 12. Physikalische Größen . . . . .                                 | 167 |
| 13. Beispiele . . . . .  | 170 |
| Literaturverzeichnis . . . . .                                     | 176 |





## 1. Die Dimension einer physikalischen Größe

### 1.1 Größengleichungen

Die Überzeugung, daß die in der Physik auftretenden Gleichungen nicht bloß Zahlenwertgleichungen (Beziehungen zwischen reinen Zahlen) sind, sondern Beziehungen zwischen benannten Größen, also *Größengleichungen* darstellen, dürfte bald allgemein durchgedrungen sein<sup>1)</sup>. Da offenbar die physikalischen Erscheinungen unabhängig sind von den willkürlich wählbaren Maßeinheiten, so ergibt sich die

*1. Invarianzforderung*: Die Größengleichungen sollen in der Weise geschrieben werden, daß sie invariant sind gegenüber beliebigen zulässigen *Transformationen der Maßeinheiten*.

Es soll hier nicht näher auseinandergesetzt werden, welche Folgerungen sich daraus für die zugehörigen Einheitensysteme ergeben.

### 1.2 Anzahl der Grundgrößen

Zwischen den verschiedenartigen Größen gibt es qualitative *Verknüpfungen*<sup>2)</sup>, die sich allgemein in die Form  $A \cdot B = C$  bringen lassen. Sie definieren normalerweise eine neue Größe, indem zwei schon definierte Größen mit einer neuen verknüpft werden, wie zum Beispiel die Beschleunigung  $b$  mit Hilfe der Geschwindigkeit  $v$  und der Zeit  $t$  durch die Beziehung  $b \cdot t = v$  erklärt wird. Es können aber auch drei schon definierte Größen verknüpft werden; eine solche *abhängige* Verknüpfung ist hier weiter nicht von Interesse. Schließlich können auch zwei neue Größen auftreten; in diesem Falle er-

<sup>1)</sup> Bodea [1], Landolt [6], Langhaar [7], Wallot [14].

<sup>2)</sup> Fleischmann [5], Landolt [6].

halten wir eine *neue unabhängige Größe*. Daraus ergibt sich sofort die Anzahl der unabhängigen Größen oder Grundgrößen. Ist nämlich die Anzahl der eingeführten Größen  $m_1$ , die Anzahl der unabhängigen Verknüpfungen (Definitionen)  $m_2$ , dann gilt für die Anzahl der Grundgrößen

$$(1.2.1) \quad m = m_1 - m_2$$

Je nach dem in Betracht stehenden Gebiet der Physik ist die Zahl der Grundgrößen 1 (Geometrie), 2 (Kinematik), 3 (Mechanik), 4 (Elektrodynamik) oder mehr. Mit dieser Frage werden wir uns nicht befassen.

### 1.3 Dimensionsformeln

Jede Größenart läßt sich in der Form eines *Dimensionsproduktes* darstellen<sup>3)</sup>

$$(1.3.1) \quad [X] = B_1^{a_1} B_2^{a_2} \cdots B_m^{a_m},$$

wo die  $B_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) die Grundgrößen, die  $a_i$  (ganze Zahlen) die Dimensionsexponenten sind. Die Dimensionen bilden eine *freie Abel'sche Gruppe*, d. h. eine kommutative, torsionsfreie Gruppe mit einem endlichen Erzeugendensystem (Basis). Auf diese Weise gelangt man zu eindeutigen Dimensionssystemen und entsprechenden Einheitensystemen. Diese Dimensionssysteme gestatten übrigens eine einfache Darstellung in einem affinen Vektorraum  $E_n$ <sup>4)</sup>.

### 1.4 Der geometrische Charakter

Die physikalischen Gleichungen lassen sich unter Verwendung eines entsprechenden Einheitensystems so formulieren, daß sie invariant gegenüber den zulässigen Transformationen der Maßeinheiten sind. Aber die Zuordnung der physikalischen Begriffe und der Dimensionen ist *nicht eindeutig*, indem verschiedene physikalische Größen, wie etwa Arbeit und Drehmoment, dieselbe Dimension erhalten können. Soll auch hier die Eindeutigkeit hergestellt werden, dann muß der *geometrische Charakter* der physikalischen Größe berücksichtigt werden<sup>5)</sup>. Wir stellen hier allgemein die

<sup>3)</sup> Fleischmann [5].

<sup>4)</sup> Roth [9].

<sup>5)</sup> Dies ist möglich, im Gegensatz zur Auffassung von Wallot [14], S. 141.

**2. Invarianzforderung:** Die Größengleichungen sollen so formuliert werden, daß sie auch gegenüber zulässigen *Koordinatentransformationen* invariant sind.

Um diese Forderung zu erfüllen, müssen die physikalischen Gleichungen als *Affinorgleichungen* geschrieben werden. Wir werden im folgenden daher zunächst kurz untersuchen müssen, welche geometrischen Größen (Objekte) in Betracht zu ziehen sind. Auf Einzelheiten kann allerdings nicht eingegangen werden, sondern es muß auf die einschlägige Literatur verwiesen werden <sup>6)</sup>.

Das Ziel dieser Mitteilung besteht darin, den Begriff der Dimension einer physikalischen Größe so zu erweitern, daß aus den *Dimensionsformeln* auch sofort der *geometrische Charakter* abgelesen werden kann. Einen diesbezüglichen, allerdings nicht völlig befriedigenden Versuch machten auch P. Moon und D. E. Spencer <sup>7)</sup>.

## 2. Der geometrische Raum

### 2.1 Der affine Raum $E_n$

In einem  $n$ -dimensionalen Raum (gewöhnlich wird  $n = 3$  oder  $n = 4$  sein) seien beliebige (schiefwinklige) kartesische Koordinaten  $x^x$  eingeführt, die einer homogenen linearen Transformation unterworfen werden sollen <sup>8)</sup>

$$(2.1.1) \quad x^{x'} = A_x^{x'} x^x .$$

Es ist  $A_x^{x'} = \text{const.}$  und  $\text{Det}(A_x^{x'}) = \Delta \neq 0$ . Diese Transformationen bilden die *affine Gruppe*  $G_a$ , und der zugehörige Raum heißt der affine Raum  $E_n$ .

In einem linearen Teilraum  $E_p$  ( $p < n$ ) des  $E_n$  können wir eine *innere Orientierung* definieren durch die Angabe der Reihenfolge von

<sup>6)</sup> Vgl. vor allem Schouten [10] und [11]; die in dieser Arbeit verwendete Schreibweise lehnt sich eng an Schouten [11]. Ferner etwa Brillouin [2], Duschek [4], Sokolnikoff [13].

<sup>7)</sup> Moon [8].

<sup>8)</sup> Wir verwenden die Kern-Index-Methode.  $A$ ,  $x$  sind die Kernbuchstaben, die sich hier, da es sich um eine Koordinatentransformation und nicht um eine Punkttransformation handelt, nicht ändern. Die verschiedenen Koordinatensysteme werden durch verschiedene laufende Indizes  $x$ ,  $x'$  ( $1, \dots, n$ ;  $1', \dots, n'$ ) angedeutet. — Es gilt immer die Einsteinsche Summationsvorschrift.

$p$  linear unabhängigen Richtungen. Eine innere Orientierung eines nicht in  $E_p$  enthaltenen Raumes  $E_{n-p}$  definiert im  $E_p$  eine *äußere Orientierung*. (Man vergleiche etwa die Figuren  $b$  und  $b'$  oder  $c'$  und  $c$  der Abbildung 1.)

An Stelle der affinen Gruppe  $G_a$  können auch *Untergruppen* betrachtet werden. Die wichtigsten sind:

1) Die Gruppe  $G_{eq}$  der inhaltstreuen linear homogenen Transformationen mit  $\Delta = \pm 1$ ; sie legt ein Einheitsvolumen fest.

2) Die Gruppe  $G_{sa}$  der inhaltstreuen Transformationen mit der Determinante  $\Delta = +1$ ; sie bestimmt ein Einheitsvolumen und eine Orientierung.

3) Die Gruppe  $G_{or}$  der homogenen orthogonalen Transformationen (Drehungen und Spiegelungen) mit  $\Delta = \pm 1$ . Sie ergibt sich durch Einführung eines Fundamentaltensors  $g_{\lambda\kappa}$ . Einen solchen Raum bezeichnen wir mit  $R_n$ ; in ihm lassen sich Längen und Winkel in der bekannten Weise definieren.

4) Die Gruppe  $G_{ro}$  der Drehungen mit  $\Delta = +1$ . Es ist ein Fundamentaltensor und eine Orientierung einzuführen: *Orientierter  $R_n$* . Die Koordinatensysteme sind alle orthogonale Rechtssysteme (oder alle Linkssysteme) mit demselben Einheitsvolumen.

## 2.2 Die Räume $X_n$ und $V_n$

Wir wählen beliebige krummlinige Koordinaten  $\xi^x$  ( $x = 1, \dots, n$ ) und führen die Transformation

$$(2.2.1) \quad \xi^x = \xi^{x'}(\xi^x)$$

aus, wo die  $\xi^{x'}$  Funktionen von  $\xi^x$  mit stetigen Ableitungen genügend hoher Ordnung sind. Es sei

$$(2.2.2) \quad A_x^{x'} = \frac{\partial \xi^{x'}}{\partial \xi^x}$$

und die Jacobische Determinante  $\text{Det}(A_x^{x'}) = \text{Det}\left(\frac{\partial \xi^{x'}}{\partial \xi^x}\right)$  sei  $\neq 0$ .

In einem gewissen Bereich existieren dann die Umkehrfunktionen

$$(2.2.3) \quad \xi^x = \xi^x(\xi^{x'}).$$

Wir erhalten so einen topologischen differenzierbaren Raum  $X_n$ .

Aus (2.2.1) folgt

$$(2.2.4) \quad d\xi^{x'} = A_x^{x'} d\xi^x.$$

Damit kann jedem Punkt  $\xi^x$  des  $X_n$  ein *lokal affiner Raum*  $E_n$  zugeordnet werden. Im allgemeinen besteht zwischen den lokalen  $E_n$ , die zu verschiedenen Punkten des  $X_n$  gehören, kein Zusammenhang.

Wird im  $X_n$  ein Fundamentaltensor  $g_{x\lambda}$  eingeführt, dann erhalten wir einen *metrischen Raum*  $V_n$  (Riemannscher Raum).

### 3. Definition der geometrischen Größe

#### 3.1 Geometrische Größen im $E_n$

*Definition* <sup>9)</sup>: Eine geometrische Größe ist ein geordnetes System von  $N$  Zahlen  $z_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ), für welche bei allen zulässigen Transformationen des Koordinatensystems ( $x$ ) des  $E_n$  folgendes gilt:

- 1) Zu jedem ( $x$ ) gehört genau ein System  $z_\nu$ .
- 2) Das System  $z_{\nu'}$  in ( $x'$ ) läßt sich
  - a) homogen linear durch  $z_\nu$  und
  - b) homogen algebraisch durch  $A_x^{x'}$  ausdrücken.

Werden die Bedingungen 2 a) und 2 b) durch schwächere ersetzt, dahin, daß  $z_{\nu'}$  allein durch  $z_\nu$  und  $A_x^{x'}$  aber in irgendeiner Weise ausgedrückt werden kann, dann handelt es sich um ein geometrisches Objekt.

#### 3.2 Geometrische Größen im $X_n$

Die Definition der geometrischen Größe des  $X_n$  lautet entsprechend wie im  $E_n$ , nur ist zu berücksichtigen, daß die Größe in einem bestimmten Punkt  $\xi^x$  des  $X_n$  zu erklären ist; dazu kommt noch die Forderung

2 c) In den Transformationsformeln dürfen keine Ableitungen von  $A_x^{x'}$  auftreten.

Auch in diesem Falle läßt sich der allgemeine Begriff des geometrischen Objektes einführen, doch bedürfen wir seiner im folgenden nicht.

<sup>9)</sup> Schouten [10], S. 2.

## 4. Affinoren im $E_n$

### 4.1 Definition des Affinors

Ein *Affinor* ist eine geometrische Größe  $v^{x_1 \cdots x_p \lambda_1 \cdots \lambda_q}$ , die sich bei einer Koordinatentransformation (2.1.1.) nach dem Gesetz

$$(4.1.1) \quad v^{x'_1 \cdots x'_p \lambda'_1 \cdots \lambda'_q} = A^{x'_1}_{x_1} \cdots A^{x'_p}_{x_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} v^{x_1 \cdots x_p \lambda_1 \cdots \lambda_q}$$

transformiert.

Genauer heißt diese Größe entsprechend der Stellung der Indizes ein  $p$ -fach kontravarianter und  $q$ -fach kovarianter Affinor der Stufe  $r = p + q$ . Er hat im allgemeinen  $n^r$  Komponenten.

Ist  $q = 0$ , so ist der Affinor kontravariant, für  $p = 0$  kovariant und in den übrigen Fällen gemischt.

### 4.2 Einfache Spezialfälle

**4.2.1 Skalar.** Ein Skalar  $p$  besitzt eine einzige Komponente, die bei einer Koordinatentransformation invariant bleibt. Ein Skalar ist ein Affinor 0. Stufe.

**4.2.2 Kontravarianter Vektor.** Ein kontravarianter Vektor besitzt  $n$  Komponenten  $v^x$  mit dem Transformationsgesetz

$$(4.2.1) \quad v^{x'} = A^{x'}_x v^x.$$

Er kann durch eine gerichtete Strecke dargestellt werden; seine Komponenten  $v^x$  sind die Projektionen dieser Strecke auf die Koordinatenachsen.

**4.2.3 Kovarianter Vektor.** Der kovariante Vektor besitzt  $n$  Komponenten  $w_\lambda$ , die sich nach der Formel

$$(4.2.2) \quad w_{\lambda'} = A^\lambda_{\lambda'} w_\lambda$$

transformieren. Er läßt sich durch zwei parallele Hyperebenen  $E_{n-1}$  darstellen, mit festgelegter Reihenfolge dieser Hyperebenen. Seine Komponenten sind durch die reziproken Abschnitte auf den Koordinatenachsen festgelegt.

Die kontravarianten und kovarianten Vektoren sind Affinoren 1. Stufe.

### 4.3 Die Maßvektoren des Koordinatensystems ( $x$ ) :

In jedem zulässigen Koordinatensystem ( $x$ ) des  $E_n$  gibt es  $n$  kontravariante Vektoren  $e_\lambda^x$  ( $\lambda = 1, \dots, n$ ) mit den Komponenten

$$(4.3.1) \quad e_\lambda^x = \delta_\lambda^x \quad (\delta_\lambda^x: \text{Kronecker-Symbol}).$$

Wir nennen sie die *kontravarianten Maßvektoren*.

Entsprechend sind die *kovarianten Maßvektoren* erklärt

$$(4.3.2) \quad e_\lambda^x = \delta_\lambda^x.$$

### 4.4 Zuordnung eines Symbols

Um einen allgemeinen Affinor charakterisieren zu können, ordnen wir ihm das folgende Zeichen zu

$$(4.4.1) \quad \left[ v^{x_1 \dots x_p}{}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \right] = \left[ C_q^p \right].$$

Daraus ersieht man sofort die Anzahl der kontravarianten und der kovarianten Indizes. Es ist speziell:

|                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| Skalar                 | $\left[ C_0^0 \right]$   |
| Kontravarianter Vektor | $\left[ C_0^1 \right]$   |
| Kovarianter Vektor     | $\left[ C_1^0 \right]$ . |

## 5. Algebra der Affinoren

### 5.1 Rechenoperationen

Mit den Affinoren lassen sich in bekannter Weise die Operationen der linearen Algebra ausführen. Wir stellen sie hier kurz zusammen.

#### a) Addition

$$(5.1.1) \quad v_{x\lambda}{}^\mu = s_{x\lambda}{}^\mu + t_{\lambda x}{}^\mu.$$

#### b) Allgemeine Multiplikation

$$(5.1.2) \quad t_{u\lambda}{}^{x\rho}{}_\sigma = r_{u\lambda}{}^x s^\rho{}_\sigma.$$

#### c) Verjüngung

$$(5.1.3) \quad t_{x\mu}{}^{x\lambda} = \sum_x t_{x\mu}{}^{x\lambda} = t^\lambda{}_\mu.$$



#### d) Überschiebung

$$(5.1.4) \quad r^{x\rho} = s_{\lambda\mu}^x t^{\lambda\rho\mu}.$$

Als Spezialfall der Überschiebung haben wir das Hinauf- und Herunterziehen eines Indexes

$$(5.1.5) \quad \begin{cases} t^x = s^{x\lambda} r_\lambda \\ t_x = s_{x\lambda} r^\lambda. \end{cases}$$

#### 5.2 Kriterium für den Affinorcharakter

Hat man beispielsweise eine von drei Indizes  $x, \lambda, \mu$  abhängige Größe  $t(x, \lambda, \mu)$ , ohne zu wissen, ob die  $x, \lambda, \mu$  kontravariante oder kovariante Indizes seien, dann bildet man die Überschiebungen der Größe mit drei beliebigen Vektoren derart, daß für alle Koordinatentransformationen eine Invariante entsteht. Sei diese etwa

$$(5.2.1) \quad t(x, \lambda, \mu) \cdot u^x v^\lambda w_\mu = \text{invariant},$$

dann ist die Größe in der Form  $t_{x\lambda}{}^\mu$  zu schreiben.

Dieses Kriterium, das man ebensogut an Stelle von (4.1.1) zur Definition des Affinors verwenden kann, ist oft nützlich bei den Anwendungen.

#### 5.3 Das Rechnen mit den Symbolen $[C_q^p]$

Aus den im Abschnitt 5.1 erklärten Operationen ergeben sich sofort für das Rechnen mit den  $[C_q^p]$  die folgenden *Regeln*:

a) *Addition*: Es können nur Affinoren mit *demselben Symbol*  $[C_q^p]$  addiert oder subtrahiert werden.

b) *Multiplikation*: Die entsprechenden Indizes der Symbole addieren sich.

$$(5.3.1) \quad [C_{q_1}^{p_1}] \cdot [C_{q_2}^{p_2}] = [C_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}].$$

c) *Verjüngung*: Die Verjüngung über je einen Index ergibt

$$(5.3.2) \quad [C_q^p]' = [C_{q-1}^{p-1}]$$

und über je zwei Indizes

$$(5.3.3) \quad [C_q^p]'' = [C_{q-2}^{p-2}]$$

und entsprechend für die Verjüngung über mehr als zwei Indizes. Die Operation der Verjüngung ist durch einen Strich beim Symbol angedeutet.

d) *Überschiebung*: Aus (5.3.1) und (5.3.2) folgt ohne weiteres für die Überschiebung

$$(5.3.4) \quad [C_{q_1}^{p_1}] | [C_{q_2}^{p_2}] = [C_{q_1+q_2-1}^{p_1+p_2-1}]$$

und analog bei mehrfacher Überschiebung.

## 6. Symmetrieeigenschaften von Affinoren

Die in der Physik auftretenden Affinoren zeichnen sich meist durch gewisse Symmetrieeigenschaften aus.

### 6.1 Symmetrische Affinoren oder Tensoren

Ist ein rein kontra- oder kovarianter Affinor invariant gegenüber Permutationen seiner Indizes, dann heißt er *symmetrisch*, und man nennt ihn kurz *Tensor*. Beispiel:

$$s_{x\lambda} = s_{\lambda x}.$$

Ein symmetrischer Affinor  $p$ -ter Stufe besitzt genau  $\binom{n+p-1}{p}$  unabhängige Komponenten. Die Symmetrieeigenschaft gilt in allen zulässigen Koordinatensystemen. In einem zentrierten  $E_n$  kann ein kovarianter (kontravarianter) Tensor durch eine Hyperfläche  $p$ -ten Grades (Ordnung) dargestellt werden:

$$\begin{aligned} s_{(\lambda_1 \dots \lambda_p)} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_p} &= I \\ t^{(x_1 \dots x_p)} x_{x_1} \dots x_{x_p} &= I. \end{aligned}$$

### 6.2 Schiefsymmetrische Affinoren oder $p$ -Vektoren

Ändert bei einem rein kontravarianten oder kovarianten Affinor  $p$ -ter Stufe eine gerade Permutation seiner Indizes nichts, eine ungerade Permutation dagegen nur das Vorzeichen, dann heißt er  $p$ -*Vektor* (oder Multivektor). Beispiel:

$$\begin{cases} s_{x\lambda} = -s_{\lambda x} & (x \neq \lambda) \\ s_{xx} = -s_{xx} = 0. \end{cases}$$

Alle Komponenten mit zwei gleichen Indizes verschwinden. Ein  $p$ -Vektor hat noch  $\binom{n}{p}$  unabhängige Komponenten, und es muß  $p \leq n$  sein.

Ein  $p$ -Vektor heißt *einfach*, wenn er das äußere Produkt von  $p$  Vektoren ist

$$(6.2.1) \quad v^{x_1 \cdots x_p} = p! \underset{1}{v}^{[x_1} \cdots \underset{p}{v}^{x_p]} = \begin{vmatrix} v^{x_1} & \cdots & v^{x_p} \\ 1 & & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ v^{x_1} & \cdots & v^{x_p} \\ p & & p \end{vmatrix}.$$

Beispielsweise ist das *Vektorprodukt* im  $R_3$  ein einfacher Bivektor.

$$t^{x\lambda} = 2! \underset{1}{v}^{[x} \underset{2}{v}^{\lambda]} = v^x \underset{1}{v}^{\lambda} - v^{\lambda} \underset{1}{v}^x.$$

Die  $p$ -Vektoren besitzen anschauliche geometrische Bilder. Für den Fall des  $E_3$  sind sie auf der linken Hälfte der Abbildung 1 wiedergegeben.

### 6.3 $n$ -Vektoren

Ein  $n$ -Vektor ist darstellbar als ein mit einem Schraubsinn versehenes Volumen im  $E_n$ . Er hat nur eine wesentliche Komponente, die für  $v^1 \cdots v^n$  gleich dem Volumen, für  $w_1 \cdots w_n$  gleich dem reziproken Volumen ist. Das Transformationsgesetz lautet

$$(6.3.1) \quad v^{1' \cdots n'} = \Delta \cdot v^{1 \cdots n},$$

beziehungsweise

$$(6.3.2) \quad w_{1' \cdots n'} = \Delta^{-1} \cdot w_{1 \cdots n}.$$

Man kann als  $n$ -Vektoren speziell die folgenden wählen

$$(6.3.3) \quad \begin{aligned} E^{x_1 \cdots x_n} &= n! \underset{1}{e}^{[x_1} \cdots \underset{n}{e}^{x_n]} \\ e_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{(x)} &= n! \underset{1}{e}_{[\lambda_1} \cdots \underset{n}{e}_{\lambda_n]}, \end{aligned}$$

wo die  $e_{\lambda}^x$  die im Abschnitt 4.3 eingeführten Maßvektoren sind.

Die andern  $n$ -Vektoren unterscheiden sich davon nur durch einen skalaren Faktor.

Es gilt

$$(6.3.4) \quad E^{l \cdots n} = 1, \quad e_{l \cdots n}^{(x)} = 1.$$

## 7. Affinor- $\Delta$ -Dichten

### 7.1 Skalare $\Delta$ -Dichten

Die Komponente  $v^{l \cdots n}$  eines kontravarianten  $n$ -Vektors ist kein Skalar, denn es gilt das Transformationsgesetz (6.3.1), wofür man auch schreiben kann

$$(7.1.1) \quad \tilde{\mathbf{v}}[x'] = \Delta \cdot \tilde{\mathbf{v}}[x].$$

$\tilde{\mathbf{v}}$  ist eine skalare  $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $-1$  (auch  $\Delta$ -Kapazität genannt).

Das Analoge gilt für den kovarianten  $n$ -Vektor. Nach (6.3.2) gilt

$$(7.1.2) \quad \tilde{\mathbf{w}}[x'] = \Delta^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{w}}[x],$$

wo  $\tilde{\mathbf{w}}$  eine skalare  $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $+1$  (oder kurz eine  $\Delta$ -Dichte) ist.

Allgemein ist eine *skalare  $\Delta$ -Dichte* vom Gewicht  $k$  durch das Transformationsgesetz definiert

$$(7.1.3) \quad \tilde{\mathfrak{p}}[x'] = \Delta^{-k} \tilde{\mathfrak{p}}[x].$$

### 7.2 Affinor- $\Delta$ -Dichten

Multiplizieren wir einen Affinor mit einer skalaren  $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $k$ , dann erhalten wir eine *Affinor- $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $k$*  mit dem Transformationsgesetz

$$(7.2.1) \quad \tilde{\mathbf{v}}^{x'_1 \cdots x'_p}_{\lambda'_1 \cdots \lambda'_q} = \Delta^{-k} A^{x'_1}_{x_1} \cdots A^{x'_p}_{x_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} \tilde{\mathbf{v}}^{x_1 \cdots x_p}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}.$$

Im besondern lassen sich die *invarianten*, dem Skalar 1 entsprechenden  $n$ -Vektor- $\Delta$ -Dichten einführen

$$(7.2.2) \quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{C}}^{1 \dots n} = 1 & (\text{Gewicht } +1) \\ \tilde{\mathfrak{n}}_{1 \dots n} = 1 & (\text{Gewicht } -1). \end{cases}$$

Für die Affinor- $\Delta$ -Dichten gelten die analogen Gesetze wie sie im Abschnitt 5 für die gewöhnlichen Affinoren angegeben wurden.

Von Bedeutung ist die aus der Definition (7.2.1) sich ergebende Folgerung, daß das Produkt aus einer Affinor- $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $+1$  und einer Affinor- $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $-1$  einen gewöhnlichen Affinor ergibt. Beispiele:

$$(7.2.3) \quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \tilde{\mathfrak{w}} & = p \\ \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \tilde{\mathfrak{w}}^{x\lambda} & = v^{x\lambda}. \end{cases}$$

### 7.3 Zuordnungen

Mit Hilfe der  $n$ -Vektor- $\Delta$ -Dichten lassen sich die  $p$ -Vektoren und die  $(n-p)$ -Vektor- $\Delta$ -Dichten einander eindeutig zuordnen. Es gelten die Beziehungen ( $n = 3$ )

$$(7.3.1) \quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{v}}_{\lambda} = \frac{1}{2!} \tilde{\mathfrak{n}}_{\lambda x \mu} v^{x\mu} \\ v^{x\mu} = \frac{1}{1!} \tilde{\mathfrak{v}}_{\lambda} \tilde{\mathfrak{C}}^{\lambda x \mu} \\ \tilde{\mathfrak{w}}^{x\mu} = \frac{1}{1!} w_{\lambda} \tilde{\mathfrak{C}}^{\lambda x \mu} \\ w_{\lambda} = \frac{1}{2!} \tilde{\mathfrak{n}}_{\lambda x \mu} \tilde{\mathfrak{w}}^{x\mu}, \end{cases}$$

die sich leicht für ein beliebiges  $n$  verallgemeinern lassen. Unter Berücksichtigung der Definitionen (7.2.2) von  $\tilde{\mathfrak{C}}^{x_1 \dots x_n}$  und  $\tilde{\mathfrak{n}}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  erhalten wir auch kürzer

$$(7.3.2) \quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{v}}^{\mu_1 \dots \mu_p} & = v^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} \\ \tilde{\mathfrak{w}}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} & = w_{\mu_1 \dots \mu_p}, \end{cases}$$

wo  $\mu_1, \dots, \mu_n$  eine gerade Permutation von  $1, \dots, n$  ist.

Daraus ergibt sich, daß die geometrische Deutung der Multivektor- $\Delta$ -Dichten dieselbe ist wie für die entsprechenden Multivektoren. Es wurden somit *keine neuen* Größen eingeführt, sondern nur eine andere Schreibweise, die aber oft von Vorteil ist, weil man mit weniger Indizes auskommt.

#### 7.4 Symbole

Einer Affinor- $\Delta$ -Dichte vom Gewicht  $k$  ordnen wir das folgende Symbol zu

$$(7.4.1) \quad [\tilde{\mathbf{v}}^{x_1 \cdots x_p} \lambda_1 \cdots \lambda_q] = [\Delta_q^k].$$

Man sieht sofort, daß die folgende Beziehung gilt

$$(7.4.2) \quad [\Delta_0^k] \cdot [C_q^p] = [\Delta_q^k].$$

Es ist speziell für die  $n$ -Vektoren  $v^{x_1 \cdots x_n}$ ,  $w_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$

$$(7.4.3) \quad [C_0^n] = [\Delta_0^{-k}], \quad [C_n^0] = [\Delta_0^{+1}].$$

und für die  $n$ -Vektor- $\Delta$ -Dichten

$$(7.4.4) \quad [\tilde{\mathbf{c}}^{1 \cdots n}] = [\Delta_0^{+1}], \quad [\tilde{\mathbf{n}}_1 \cdots n] = [\Delta_n^{-1}].$$

Die Zuordnungen (7.3.1) ergeben

$$(7.4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\Delta_p^{-1}] = [\Delta_n^{-1}] | [C_0^{n-p}] \\ [C_0^{n-p}] = [\Delta_p^{-1}] | [\Delta_0^{+1}] \\ [\Delta_0^{n-p}] = [C_p^0] | [\Delta_0^{+1}] \\ [C_p^0] = [\Delta_n^{-1}] | [\Delta_0^{n-p}]. \end{array} \right.$$

Ferner zeigt sich, daß auf Grund der Definition (7.2.1) allgemein gilt

$$(7.4.6) \quad \overset{-k}{\Delta} \cdot \overset{+k}{\Delta} = C.$$

Aus den Beziehungen (5.3.1), (7.4.2) und (7.4.6) liest man ab, daß sich die Symbole  $C$  und  $\Delta$  verhalten wie die Zahlen  $+1$  und  $-1$  bei der Multiplikation, mit der Einschränkung, daß im Falle, wo beide Faktoren Dichten sind, diese von entgegengesetzt gleichem Gewicht sein müssen.

## 8. Gewöhnliche Dichten und $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektoren <sup>10)</sup>

### 8.1 Gewöhnliche Dichten

Die gewöhnlichen oder *Weylschen Dichten* genügen demselben Transformationsgesetz (7.2.1) wie die  $\Delta$ -Dichten, nur haben sie an Stelle des Faktors  $\Delta$  den Faktor  $|\Delta|$ . Beispiele:

$$(8.1.1) \quad \begin{cases} \mathbf{w}^{x'\lambda'} = |\Delta|^{-1} A_x^{x'} A_\lambda^{\lambda'} \mathbf{w}^{x\lambda} & (\text{Gewicht } +1) \\ \mathbf{v}_{\lambda'x'} = |\Delta| A_{\lambda'}^\lambda A_{x'}^x \mathbf{v}_{\lambda x} & (\text{Gewicht } -1). \end{cases}$$

Die Massendichte der Physik ist eine skalare Dichte vom Gewicht  $+1$ .

$$(8.1.2) \quad \mathbf{m}[x'] = |\Delta|^{-1} \mathbf{m}[x].$$

Für  $\Delta > 0$  fallen die  $\Delta$ -Dichten und die Weylschen Dichten zusammen.

Als *Symbole* für die Weylschen Dichten vom Gewicht  $+1$  oder  $-1$  verwenden wir die Zeichen

$$(8.1.3) \quad \begin{cases} [\mathbf{w}^{x_1 \cdots x_p}] = [D_0^p] \\ [\mathbf{v}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}] = [D_q^{-1}] \end{cases}$$

und entsprechend für ein beliebiges Gewicht  $k$ .

### 8.2 $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektoren

Um die geometrische Darstellung der Weylschen Dichten vom Gewicht  $+1$  oder  $-1$  zu finden, definiert man den  *$\mathcal{W}$ -Skalar* oder *Pseudoskalar*. Es handelt sich um eine geometrische Größe mit dem Transformationsgesetz

$$(8.2.1) \quad \tilde{p}[x'] = \frac{|\Delta|}{\Delta} \tilde{p}[x].$$

Der  $\mathcal{W}$ -Skalar ändert das Vorzeichen bei einer Änderung der Orientierung des Koordinatensystems.

Allgemein ergibt das Produkt aus dem  $\mathcal{W}$ -Skalar  $\tilde{p}$  und einem Affinor einen  $\mathcal{W}$ -Affinor, und im besondern ist ein  $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektor durch

<sup>10)</sup> Schouten [12].

# Geometrische Größen

$n = 3$

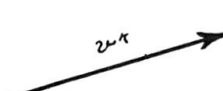

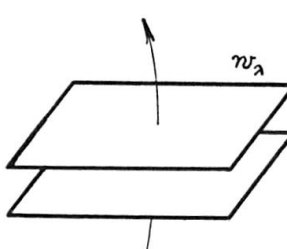
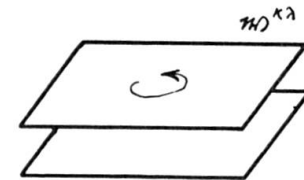

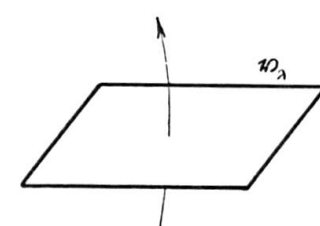
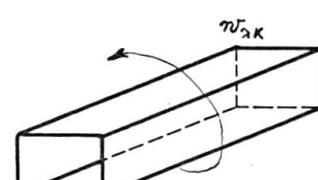
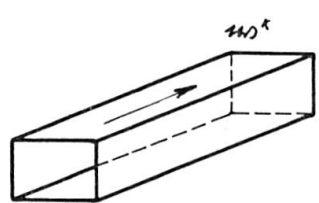
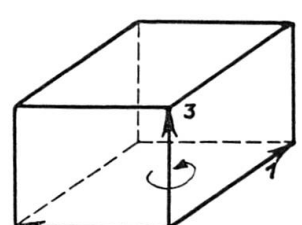
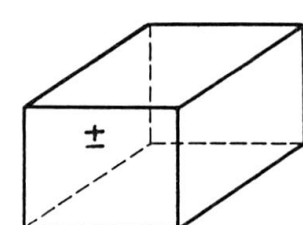
|   |   |   |    |  |   |
|---|---|---|----|--|---|
| a | Skalar $p$  | $C_0^0 = \overset{+1}{\Delta}_0^3$ $= \overset{-1}{\Delta}_3^0$       | a' | Pseudoskalar $\tilde{p}$   | $\Gamma_0^0 = \overset{-1}{D}_3^0$ $= \overset{+1}{D}_0^3$            |
|   |    | $C_0^1 = \overset{-1}{\Delta}_2^0$                                    |    |    | $\overset{-1}{D}_2^0 = \Gamma_0^1$                                    |
| b |   |   | b' |  |   |
|   |    | $C_1^0 = \overset{+1}{\Delta}_2^0$                                    |    |    | $\overset{+1}{D}_0^2 = \Gamma_1^0$                                    |
| c |   |   | c' |  |   |
|   |   | $C_0^2 = \overset{-1}{\Delta}_1^0$                                    |    |   | $\overset{-1}{D}_1^0 = \Gamma_0^2$                                    |
| d |   |   | d' |  |   |
|   |  | $C_2^0 = \overset{+1}{\Delta}_1^0$                                    |    |  | $\overset{+1}{D}_0^1 = \Gamma_2^0$                                    |
| e |   |   | e' |  |   |
|   |  | $C_0^3 = \overset{-1}{\Delta}_0^0$ $C_3^0 = \overset{+1}{\Delta}_0^0$ |    |  | $\overset{-1}{D}_0^0 = \Gamma_0^3$ $\overset{+1}{D}_0^0 = \Gamma_3^0$ |
| f |   |   | f' |  |   |
| g |   |   | g' |  |   |

Abb. 1. Geometrische Größen im dreidimensionalen Raum.



$$(8.2.2) \quad \tilde{v}^{x_1 \cdots x_p} = \tilde{p} v^{x_1 \cdots x_p}, \quad \tilde{p}[x] = +1$$

definiert. Man überlegt sich, daß beim *kontravarianten*  $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektor die *äußere Orientierung invariant* ist; entsprechend ist beim *kovarianten*  $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektor die *innere Orientierung invariant*. Das Transformationsgesetz der  $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektoren lautet

$$(8.2.3) \quad \begin{cases} \tilde{v}^{x'_1 \cdots x'_p} = \frac{|\Delta|}{\Delta} A^{x'_1}_{x_1} \cdots A^{x'_p}_{x_p} \tilde{v}^{x_1 \cdots x_p} \\ \tilde{w}_{\lambda'_1 \cdots \lambda'_p} = \frac{|\Delta|}{\Delta} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots A^{\lambda_p}_{\lambda'_p} \tilde{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} \end{cases}$$

Wir ordnen ihnen die folgenden *Symbole* zu:

$$(8.2.4) \quad \begin{cases} [\tilde{v}^{x_1 \cdots x_p}] = [\Gamma^p_0] \\ [\tilde{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}] = [\Gamma^0_p] \end{cases}$$

Auch hier kann wieder mit Hilfe der  $n$ -Vektor- $\Delta$ -Dichten  $\tilde{\mathfrak{C}}$  und  $\tilde{\mathfrak{n}}$  eine Zuordnung von gewöhnlichen Dichten und  $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektoren gestiftet werden. Sie lautet in den einfachsten Fällen

$$(8.2.5) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_\lambda = \frac{1}{2!} \tilde{\mathfrak{n}}_{\lambda\mu} \tilde{v}^{x\mu} \\ \tilde{v}^{x\mu} = \frac{1}{1!} \mathbf{v}_\lambda \tilde{\mathfrak{C}}^{\lambda x\mu} \\ \mathbf{w}^{x\mu} = \frac{1}{1!} \tilde{w}_\lambda \tilde{\mathfrak{C}}^{\lambda x\mu} \\ \tilde{w}_\lambda = \frac{1}{2!} \tilde{\mathfrak{n}}_{\lambda\mu} \mathbf{w}^{x\mu} \end{cases}$$

Oder auch

$$(8.2.6) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{\mu_1 \cdots \mu_p} = \tilde{v}^{\mu_{p+1} \cdots \mu_n} \\ \mathbf{w}^{\mu_{p+1} \cdots \mu_n} = \tilde{w}_{\mu_1 \cdots \mu_p}, \end{cases}$$

wenn  $\mu_1, \dots, \mu_n$  eine gerade Permutation von  $1, \dots, n$  ist.

Es handelt sich somit auch hier wieder wie bei den gewöhnlichen Dichten und den zugeordneten  $\mathcal{W}$ - $p$ -Vektoren um dieselben geometrischen Größen, die sich nur in der Schreibweise unterscheiden. Die einfachsten Deutungen dieser Größen im  $E_3$  sind in der Abbildung 1 wiedergegeben. — Vorzugsweise verwendet man die Weylschen Dichten.

Auf Grund der Definitionen (7.2.1), (8.1.1) und 8.2.3) erkennt man, daß für reelle Transformationen die folgenden, symbolisch geschriebenen Beziehungen gelten

$$(8.2.7) \quad \begin{cases} \overset{\pm 1}{D} = \overset{\pm 1}{\Delta} \cdot \Gamma \\ \Gamma = \overset{\pm 1}{D} \cdot \overset{\mp 1}{\Delta}. \end{cases}$$

Schließlich folgt noch

$$(8.2.8) \quad \begin{cases} \overset{k}{[D_{q_1}^{p_1}]} \cdot [C_{q_2}^{p_2}] = \overset{k}{[D_{q_1 + q_2}^{p_1 + p_2}]} \\ \overset{+k}{[D_{q_1}^{p_1}]} \cdot \overset{-k}{[D_{q_2}^{p_2}]} = [C_{q_1 + q_2}^{p_1 + p_2}] \end{cases}$$

und entsprechend für die Überschiebungen der links stehenden Größen.

## 9. Identifikationen

Werden nur Untergruppen der affinen Gruppe  $G_a$  betrachtet, dann können verschiedene der in den vorhergehenden Abschnitten definierten Größen identifiziert werden. Trotzdem wird es, um das anschauliche geometrische Bild beizubehalten, bei den physikalischen Anwendungen oft zweckmäßig sein, nicht alle möglichen Identifikationen wirklich durchzuführen.

### 9.1 Gruppe $G_{eq}$ der inhaltstreuen Transformationen

Ein Einheitsvolumen kann durch eine gewöhnliche skalare Dichte  $q = \pm 1$  vom Gewicht  $+1$  eingeführt werden. Es fallen zusammen

$$\text{Dichten} \longleftrightarrow \text{Nichtdichten.}$$

Es gilt

$$(9.1.1) \quad \begin{cases} \mathbf{v}^x = q v^x & \tilde{\mathbf{v}}^x = q \tilde{v}^x \\ \mathbf{w}_\lambda = q^{-1} w_\lambda & \tilde{\mathbf{w}}_\lambda = q^{-1} \tilde{w}_\lambda \end{cases}$$

oder

$$(9.1.1^*) \quad \begin{cases} \overset{+1}{[D_0^p]} \longleftrightarrow [C_0^p] & \overset{+1}{[\Delta_0^p]} \longleftrightarrow [\Gamma_0^p] \\ \overset{-1}{[D_q^0]} \longleftrightarrow [C_q^0] & \overset{-1}{[\Delta_q^0]} \longleftrightarrow [\Gamma_q^0]. \end{cases}$$

Es sind im  $E_3$  noch die folgenden Größen zu unterscheiden: polare Vektoren und Bivektoren, axiale Vektoren und Bivektoren, Skalare und Pseudoskalare.

## 9.2 Gruppe $G_{or}$ der orthogonalen Transformationen

Es wird der Fundamentaltensor  $g_{x\lambda}$  eingeführt. Es sei  $\mathfrak{g} = \text{Det}(g_{x\lambda})$  (gewöhnliche skalare Dichte vom Gewicht 2). Die folgenden Größen sind zu identifizieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{kovariante Größen} & \xleftrightarrow{\quad} & \text{kontravariante Größen} \\ \text{Dichten} & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Nichtdichten.} \end{array}$$

Dies ergibt sich auf Grund der Beziehungen

$$(9.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^x = g^{x\lambda} w_\lambda \\ \mathfrak{v}^x = \mathfrak{g} g^{x\lambda} \mathfrak{w}_\lambda \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \tilde{v}^x = g^{x\lambda} \tilde{w}_\lambda \\ \tilde{\mathfrak{v}}^x = \mathfrak{g} g^{x\lambda} \tilde{\mathfrak{w}}_\lambda \end{array} \right.,$$

oder anders ausgedrückt

$$(9.2.1^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} [C_0^p] \longleftrightarrow [C_p^0] \\ [D_0^p] \xrightarrow{+1} [D_p^0] \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} [\Gamma_0^p] \longleftrightarrow [\Gamma_p^0] \\ [\Delta_0^p] \xrightarrow{+1} [\Delta_p^0] \end{array} \right.$$

Es gilt natürlich auch (9.1.1), da der Fundamentaltensor auch ein Einheitsvolumen festlegt. Im  $R_3$  sind jetzt noch zu unterscheiden: *Skalar, polarer Vektor, axialer Vektor, Pseudoskalar*.

## 9.3 Gruppe $G_\omega$ der affinen Transformationen mit $\Delta > 0$

Wir führen durch den  $W$ -Skalar  $\tilde{\omega}$  einen Schraub Sinn ein. Der Unterschied zwischen innerer und äußerer Orientierung verschwindet:

$$\text{Innere Orientierung} \xleftrightarrow{\quad} \text{äußere Orientierung.}$$

Es gilt

$$(9.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}^x = \tilde{\omega} v^x \\ \tilde{w}_\lambda = \tilde{\omega} w_\lambda \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{v}}^x = \tilde{\omega} \mathfrak{v}^x \\ \tilde{\mathfrak{w}}_\lambda = \tilde{\omega} \mathfrak{w}_\lambda \end{array} \right.$$

oder auch

$$(9.3.1^*) \quad [\Gamma] \longleftrightarrow [C] \quad [\Delta] \longleftrightarrow [D].$$

## 9.4 Gruppe $G_{r_0}$ der Rotationen $\Delta = +1$

Es ist ein Fundamentaltensor und eine Orientierung einzuführen. In diesem Falle ergeben sich alle vorhin erwähnten Identifikationen, und es sind im orientierten  $R_3$  nur noch *Skalare* und *Vektoren* zu unterscheiden!

Es zeigt sich somit, daß in jedem Falle genau angegeben werden muß, welches die Gruppe der zulässigen Transformationen ist, da es sonst nicht möglich ist, zwischen den verschiedenen Größen zu unterscheiden. Die Unterlassung der Angabe der zulässigen Transformationen hat schon zu vielen unnötigen Auseinandersetzungen über den geometrischen Charakter einer physikalischen Größe geführt.

## 10. Invariante Differentialoperationen (Affinoranalysis)

Es gibt im allgemeinen Falle im Raume  $X_n$  nur die folgenden invarianten Ableitungen.

### 10.1 Gradient

Die Gradientenbildung kann nur auf Skalare und  $\mathcal{W}$ -Skalare angewandt werden.

$$(10.1.1) \quad \partial_\lambda p = w_\lambda ,$$

wobei zur Abkürzung  $\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda}$  gesetzt ist. Das Transformationsgesetz lautet

$$(10.1.2) \quad \partial_\mu p = A^\mu_\nu \partial_\nu p .$$

Das Entsprechende gilt für einen  $\mathcal{W}$ -Skalar  $\tilde{p}$ .

### 10.2 Schiefe Ableitung (Rotation)

Es können nur kovariante  $q$ -Vektoren oder  $\mathcal{W}$ - $q$ -Vektoren schief abgeleitet werden

$$(10.2.1) \quad (q + 1) \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} = w_{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q} .$$

Es gilt

$$(10.2.2) \quad \partial_{[\mu'} w_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q]} = A^\mu_{\mu'} A^{\lambda'_1}_{\lambda_1} \dots A^{\lambda'_q}_{\lambda_q} \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} .$$

Durch schiefe Ableitung entsteht also aus einem kovarianten  $q$ -Vektor ein kovarianter  $(q + 1)$ -Vektor. Analog verhält es sich mit einem kovarianten  $\mathcal{W}$ - $q$ -Vektor  $\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ .

### 10.3 Divergenz

Die Divergenz läßt sich nur von kontravarianten  $p$ -Vektor-Dichten (oder  $p$ -Vektor- $\Delta$ -Dichten) vom Gewicht  $+1$  bilden.

$$(10.3.1) \quad \partial_{\mu} w^{\mu x_2 \cdots x_p} = v^{x_2 \cdots x_p} .$$

Das Resultat ist eine kontravariante  $(p-1)$ -Vektor-Dichte vom Gewicht  $+1$ .

*Ergebnis:* Die Gradientbildung und die schiefe Ableitung entsprechen bei den in den Abschnitten 4, 7 und 8 eingeführten Symbolen einer Multiplikation mit  $[C_1^0]$ , während die Divergenz eine Überschiebung mit  $[C_1^0]$  bedeutet:

$$(10.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Gradient} \quad [C_1^0] \cdot [C_0^0] = [C_1^0], \quad [C_1^0] \cdot [I_0^0] = [I_1^0] \\ \text{Rotation} \quad [C_1^0] \cdot [C_q^0] = [C_{q+1}^0], \quad [C_1^0] \cdot [I_q^0] = [I_{q+1}^0] \\ \text{Divergenz} \quad [C_1^0] \mid [D_0^{p+1}] = [D_0^{p-1}], \quad [C_1^0] \mid [\Delta_0^p] = [\Delta_0^{p-1}] . \end{array} \right.$$

Schließlich sei hier noch auf die Integraltheoreme von Stokes hingewiesen, ohne daß darauf eingegangen werden soll. Treten in einer physikalischen Beziehung Integrale auf, dann hat man zu beachten, daß für den geometrischen Charakter eines Integrals gilt

$$(10.3.3) \quad \left[ \int y dx \right] = [y dx] .$$

## 11. Zusammenfassung

Lassen wir im Raum  $E_n$  die affinen Transformationen zu, dann haben wir im wesentlichen die folgenden geometrischen Größen zu unterscheiden (Abschnitt 4 und 8.1)

$$\begin{array}{l} \text{Affinoren} \quad [C_q^p] \\ \text{Gewöhnliche } p\text{-Vektor-Dichten} \quad [D_0^{p+1}], [D_p^{-1}] . \end{array}$$

Um Indizes zu sparen, können jedoch noch die folgenden Größen eingeführt werden (Abschnitt 7 und 8.2)

$$\begin{array}{l} p\text{-Vektor-}\Delta\text{-Dichten} \quad [\Delta_0^{p+1}], [\Delta_p^{-1}] \\ \mathcal{W}\text{-}p\text{-Vektoren} \quad [I_0^p], [I_p^0] . \end{array}$$

Die mit diesen Größen auszuführenden Operationen, nämlich Addition, Multiplikation, Verjüngung und Überschiebung (Abschnitt 5), bilden sich in einfacher Weise auf die zugeordneten Symbole ab. Von besonderer Bedeutung für die physikalischen Anwendungen sind die Formeln (5.3.1, 2, 4) und (8.2.8). In entsprechender Weise führen auch die affin invarianten Ableitungen der geometrischen Größen im  $X_n$  zu einer Multiplikation bzw. Überschiebung mit dem Symbol  $[C_1^0]$  (Abschnitt 10).

## 12. Physikalische Größen

### 12.1 Transformation der Einheiten

Zur numerischen Festlegung einer physikalischen Größe sind noch Einheiten erforderlich, die sich, wie im Abschnitt 1 angedeutet wurde, aus einer bestimmten Anzahl von Grundeinheiten aufbauen lassen. Wir wählen hier zur Vereinfachung der Darstellung drei Grundeinheiten für die Länge, Zeit und Masse, beschränken uns also auf die Dynamik. Die Grundeinheiten sollen der folgenden Transformation unterworfen werden

$$(12.1.1) \quad L' = l^{-1} L, \quad T' = t^{-1} T, \quad M' = m^{-1} M,$$

wo  $l, t, m$  beliebige reelle Konstanten  $\neq 0$  bedeuten. Ein System von Grundeinheiten, das auf diese Weise aus einem gegebenen System hervorgeht, soll ein *zulässiges* System genannt werden.

### 12.2 Definition der physikalischen Größe <sup>11)</sup>

*Unter einer physikalischen Größe in einem bestimmten Punkt  $\xi^x$  des Raumes  $X_n$  und bezogen auf ein System von Grundeinheiten  $L, T, M$  verstehen wir ein geordnetes System von  $N$  Komponenten  $\psi_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) mit den folgenden Eigenschaften: Zwischen den Komponenten  $\psi_\nu$  und den zulässigen Koordinatensystemen  $(x)$  in der Umgebung von  $\xi^x$  und den zulässigen Grundeinheitensystemen  $L, T, M$  bestehen die nachstehenden Beziehungen.*

<sup>11)</sup> Schouten [11], S. 126, Dorgelo [3], S. 45.

1) Zu jedem  $(x)$  und jedem zulässigen System von Grundeinheiten gehört ein einziges System  $\psi_\nu$ .

2) Das zu  $(x')$ ,  $L'$ ,  $T'$ ,  $M'$  gehörende System  $\psi_{\nu'}$  läßt sich

a) homogen linear in den  $\psi_\nu$ ,

b) homogen algebraisch in den  $A_x^{\nu'}$  allein, also ohne deren Ableitungen, und

c) allein in  $l, t, m$  ausdrücken.

3) In diesen Ausdrücken treten die Konstanten  $l, t, m$  nur in der Form von Potenzprodukten  $l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}$  auf, und dieser Faktor ist für alle Komponenten  $\psi_{\nu'}$  derselbe.

Schwächt man die Bedingungen 2a) und b) wie im Abschnitt 3 ab, so erhält man ein *physikalisches Objekt*.

### 12.3 Geometrisches Bild und absolute Dimension

Hält man die Grundeinheiten  $L, T$  und  $M$  fest und transformiert nur die Koordinaten, dann folgt aus der Definition 3.1, daß jeder physikalischen Größe eindeutig eine geometrische Größe, ihr *geometrisches Bild*, zugeordnet ist. Transformiert man umgekehrt nur die Grundeinheiten, dann nehmen alle Komponenten des geometrischen Bildes einen Faktor  $l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}$  an, welcher die *absolute Dimension*  $[L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}]$  der physikalischen Größe genannt wird. Die absolute Dimension gibt an, welche Grundeinheiten erforderlich sind, um das geometrische Bild zu konstruieren. Sie stimmt nicht mit der üblichen physikalischen Dimension einer Größe überein. Beispielsweise ist die absolute Dimension einer Geschwindigkeit  $[v^x] = [T^{-1}]$ ; es genügt nämlich bereits eine Uhr, um den in einer Sekunde zurückgelegten Weg zu markieren.

### 12.4 Die relative Dimension

Die übliche Dimension einer physikalischen Größe ergibt sich, wenn ein *lokales kartesisches Koordinatensystem* (im Raum  $V_n$ ) zugrunde gelegt wird.

*Definition:* Wenn die Komponenten einer physikalischen Größe in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem bei einer Transformation der Grundeinheiten (12.1.1) den Faktor  $l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}$  erhalten, dann heißt  $[L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}]$  die *relative Dimension* dieser Größe.

Der Unterschied zwischen absoluter und relativer Dimension rührt daher, daß im Falle einer affinen Transformation die Koordinaten mit der Längeneinheit nicht zusammenhängen, während in einem orthogonalen System sich auch die Koordinaten transformieren bei einer Änderung der Grundeinheiten. Man erkennt leicht, daß die absolute Dimension einen Faktor  $l$  für jeden kontravarianten Index und einen Faktor  $l^{-1}$  für jeden kovarianten Index annimmt, womit dann sofort die relative Dimension bestimmt ist. Für eine Dichte vom Gewicht  $k$  ist der Faktor  $l^{-nk}$  hinzuzufügen. Zu beachten ist ferner, daß die Komponenten des Fundamentaltensors  $g_{\lambda\mu}$  bzw.  $g^{\lambda\mu}$  die relative Dimension  $[l]$  haben.

### 12.5 Erweiterung des Dimensionssymbols einer physikalischen Größe

Im Abschnitt 1.3 wurde erwähnt, daß jeder physikalischen Größe in bekannter Weise ein Symbol, die relative Dimension, zugeordnet werden kann. Andererseits kann auch das der Größe zugeordnete geometrische Bild mit einem Symbol versehen werden, wie dies in den vorhergehenden Abschnitten 4, 7 und 8 geschehen ist.

Hat nun eine physikalische Größe in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem die relative Dimension  $[L^a T^b M^c]$  und ist ihr geometrisches Bild beispielsweise  $[C_q^p]$  oder  $[D_q^p]$ , dann soll die *verallgemeinerte Dimension* dieser Größe in der folgenden Weise geschrieben werden

$$(12.5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [L^a T^b M^c; C_q^p] \\ [L^a T^b M^c; D_q^p] \end{array} \right.$$

Wie mit diesen Symbolen zu rechnen ist, folgt sofort aus den Überlegungen in den Abschnitten 5 und 8.

Zur Vereinfachung der Schreibweise der Dimensionsformeln kann man sich darauf beschränken, nur die Exponenten anzugeben, so daß die Ausdrücke (12.5.1) nun lauten

$$(12.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a, b, c; C_q^p] \\ [a, b, c; D_q^p] \end{array} \right.$$



## 12.6 Bestimmung des geometrischen Charakters einer physikalischen Größe

Der geometrische Charakter einer physikalischen Größe läßt sich aus ihrer Definition erhalten unter Berücksichtigung des Kriteriums für den Affinorcharakter einer Größe (Abschnitt 5.2) und der Algebra und der Analysis der Affinoren und gewöhnlichen Dichten vom Gewicht  $k$  beziehungsweise den daraus abgeleiteten Regeln für das Rechnen mit den Zeichen  $[C_q^p]$  und  $[D_q^p]$ . Wichtig ist, daß die physikalischen Beziehungen zunächst in eine für die zugelassene Transformationsgruppe invariante Form gebracht werden.

## 13. Beispiele

### 13.1 Die Kraft

Die Kraft ist von einem Index  $i$  abhängig, und es soll die vorläufige Schreibweise  $K(i)$  eingeführt werden. Eine Verschiebung der Kraft längs des Weges  $\delta x^i$  ergibt die Arbeit  $\delta A$ , die eine invariante skalare Größe ist. Es gilt also

$$\delta A = \sum_i K(i) \delta x^i = \text{invariant},$$

und daraus folgt sofort nach dem Kriterium (5.2.1), daß die Kraft durch einen kovarianten Vektor darzustellen ist:  $K(i) = K_i$ . Das geometrische Bild ist daher  $[C_1^0]$ . Noch einfacher ist es, die Regeln für das Rechnen mit den Symbolen  $C_q^p$  anzuwenden:

$$[C_1^0] | [C_0^1] = [C_0^0]$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die Kraft als Gradient eines Potentials  $p$  betrachtet:

$$K_\lambda = \partial_\lambda p.$$

Somit ergibt sich als Dimensionsformel für die Kraft

$$[K_i] = [L^1 T^{-2} M^1]; \quad [C_1^0] = [1, -2, 1; C_1^0].$$

### 13.2 Das Drehmoment

Um die allgemeinen Dimensionsformeln für das Drehmoment zu erhalten, kann man von der folgenden, für geradlinige Koordinaten gültigen Beziehungen ausgehen

$$M(h, i) = 2 \int_{\tau} \mathbf{m} x^{[h} \ddot{x}^{i]} d\tau.$$

Nun ist für die auf der rechten Seite auftretenden Größen

|                |                                    |
|----------------|------------------------------------|
| Massendichte   | $[\mathbf{m}] = [-3, 0, 1; D_0^0]$ |
| Koordinaten    | $[x^h] = [1, 0, 0; C_0^1]$         |
| Beschleunigung | $[\ddot{x}^i] = [1, -2, 0; C_0^1]$ |
| Volumenelement | $[d\tau] = [3, 0, 0; D_0^0]$ .     |

Also wird

$$[M^{hi}] = [2, -2, 1; C_0^2].$$

Man beachte den Unterschied gegenüber der Arbeit, die als skalare Größe die folgende Dimensionsformel hat

$$[A] = [2, -2, 1; C_0^0].$$

### 13.3 Elektrische Feldstärke und magnetische Flußdichte

Die beiden die elektrische Feldstärke und die magnetische Flußdichte enthaltenden Maxwell'schen Gleichungen lauten in invarianter affiner Form geschrieben <sup>12)</sup>

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & -\frac{2}{c} \partial_{[\gamma} F_{\beta]} + \partial_4 B_{\gamma\beta} = 0 \quad \partial_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \text{(b)} \quad & \partial_{[\gamma} B_{\beta\alpha]} = 0. \end{aligned}$$

Um den geometrischen Charakter der Feldstärke  $\mathbf{F}$  und der Flußdichte  $\mathbf{B}$  zu bestimmen, ist zu bedenken, daß nur die Rotation eines kovarianten  $q$ -Vektors oder  $\mathcal{W}$ - $q$ -Vektors invariante Ableitungen sind. Folglich ist die elektrische Feldstärke entweder ein kovarianter Vektor oder  $\mathcal{W}$ -Vektor; da aber die Orientierung des elektrischen Feldes durch die Richtung der Stromlinien gegeben ist, muß  $\mathbf{F}$  ein kova-

<sup>12)</sup> Dorgelo [3], S. 252.

rianter Vektor  $[F_\beta] = [C_1^0]$  sein. Aus der Gleichung (a) folgt nun nach dem Homogenitätsprinzip, daß  $\mathbf{B}$  ein kovarianter Bivektor  $[C_2^0]$  ist, was mit der Gleichung (b) verträglich ist.

Werden als Grundeinheiten  $L$ ,  $T$ ,  $M$  und  $Q$  (elektrische Ladung) eingeführt, dann gilt

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c}\right] &= [-1, 1, 0, 0; C_0^0] \\ [\partial_\gamma] &= [-1, 0, 0, 0; C_1^0] \\ [F_\beta] &= [-1, -2, 1, -1; C_1^0]. \end{aligned}$$

Also ist

$$\left[-\frac{2}{c} \partial_{[\gamma} F_{\beta]} \right] = [-1, -1, 1, -1; C_2^0]$$

und mit  $[\partial_4] = [-1, 0, 0, 0; C_0^0]$

wird schließlich  $[B_{\gamma\beta}] = [0, -1, 1, -1; C_2^0]$ .

### 13.4 Tabelle

Für eine Anzahl von Größen aus verschiedenen Gebieten der Physik sind — ohne nähere Erläuterungen — in der nebenstehenden Tabelle die verallgemeinerten Dimensionsformeln wiedergegeben.

Um den anschaulichen geometrischen Charakter einer Größe deutlich anzugeben, sind oft nicht alle Identifikationen (Abschnitt 9) ausgeführt worden, wie sie auf Grund der zugelassenen Transformationsgruppe möglich gewesen wären. Insbesondere können natürlich nach der Einführung des Fundamentaltensors die Indizes beliebig herauf- und hinuntergezogen werden durch Überschiebung mit  $g^{ih}$  bzw.  $g_{hi}$ , und es besteht kein Unterschied mehr zwischen gewöhnlichen Affinoren und Dichten (Multiplikation mit der Dichte  $\mathfrak{g}^{1/2}$  oder  $\mathfrak{g}^{-1/2}$ , wo  $\mathfrak{g} = |\text{Det}(g_{ih})|$  eine skalare Dichte vom Gewicht  $+2$  ist).

*E. Roth-Desmeules, Luzern*

| Größe                                    | Geometr. Charakter  | Dimensionsformel        |                       |
|--|---|-------------------------|-----------------------|
| <i>1. Geometrie</i>                      |   |                         |                       |
| Länge $x^x$                              | $C_0^1$   | $[1, 0, 0; C_0^1]$      |                       |
| Fläche                                   | mit innerer Orientierung $f^{\lambda\lambda}$                     | $C_0^2$                 | $[2, 0, 0; C_0^2]$    |
|  | mit äußerer Orientierung $\mathfrak{f}_x$                         | $D_1^{-1}$              | $[2, 0, 0; D_1^{-1}]$ |
| Volumen                                  | mit innerer Orientierung $v^{\lambda\lambda\mu}$<br>(Schraubsinn) | $C_0^3$                 | $[3, 0, 0; C_0^3]$    |
|  | mit äußerer Orientierung $\mathfrak{v}$<br>( $\pm$ -Zeichen)      | $D_0^{-1}$              | $[3, 0, 0; D_0^{-1}]$ |
| Winkel $\varphi^{ik}$                    | $C_0^2$   | $[0, 0, 0; C_0^2]$      |                       |
| <i>2. Kinematik</i>                      |   |                         |                       |
| Zeit $t$                                 | $C_0^0$   | $[0, -1, 0; C_0^0]$     |                       |
| Geschwindigkeit $v^x$                    | $C_0^1$   | $[1, -1, 0; C_0^1]$     |                       |
| Beschleunigung $b^x$                     | $C_0^1$   | $[1, -2, 0; C_0^1]$     |                       |
| Geschwindigkeitspotential $\Phi$         | $C_0^0$   | $[2, -1, 0; C_0^0]$     |                       |
| Winkelgeschwindigkeit $\omega^{ik}$      | $C_0^2$   | $[0, -1, 0; C_0^2]$     |                       |
| Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}^{ik}$ | $C_0^2$   | $[0, -2, 0; C_0^2]$     |                       |
| <i>3. Mechanik</i>                       |   |                         |                       |
| Masse $m$                                | $C_0^0$   | $[0, 0, 1; C_0^0]$      |                       |
| Massendichte $\mathfrak{m}$              | $D_0^{+1}$  | $[-3, 0, 1; D_0^{+1}]$  |                       |
| Materiestromdichte $\mathfrak{m}^x$      | $D_0^{+1}$  | $[-2, -1, 1; D_0^{+1}]$ |                       |

| Größe   | Geometr. Charakter | Dimensionsformel          |
|---|--------------------|---------------------------|
| Energie, Arbeit $E$                                 | $C_0^0$            | $[ 2, -2, 1; C_0^0 ]$     |
| Leistung $L$  | $C_0^0$            | $[ 2, -3, 1; C_0^0 ]$     |
| Energiedichte $\mathfrak{n}$                        | $D_0^0$            | $[ -1, -2, 1; D_0^0 ]$    |
| Energiestromdichte $\mathfrak{n}^x$                 | $D_0^1$            | $[ 0, -3, 1; D_0^1 ]$     |
| Wirkung $W$   | $C_0^0$            | $[ 2, -1, 1; C_0^0 ]$     |
| Impuls $q^i$  | $C_0^1$            | $[ 1, -1, 1; C_0^1 ]$     |
| Kraft $K^x, K_\lambda$                              | $C_0^1, C_1^0$     | $[ 1, -2, 1; C_0^1 ]$     |
| Druck $p^x$   | $C_0^1$            | $[ -1, -2, 1; C_0^1 ]$    |
| Kraft pro Volumenelement $\mathfrak{f}^x$           | $D_0^1$            | $[ -2, -2, 1; D_0^1 ]$    |
| Drehmoment $M^{ik}$                                 | $C_0^2$            | $[ 2, -2, 1; C_0^2 ]$     |
| Drall $D^{ik}$                                      | $C_0^2$            | $[ 2, -1, 1; C_0^2 ]$     |
| Trägheitsmoment $\theta^{ik}$                       | $C_0^2$            | $[ 2, -0, 1; C_0^2 ]$     |
| Spannungstensor $T^{x\lambda}$                      | $C_0^2$            | $[ -1, -2, 1; C_0^2 ]$    |
| Spannungstensordichte $\mathfrak{S}^{x\lambda}$     | $D_0^2$            | $[ -1, -2, 1; D_0^2 ]$    |
| <b>4. Elektrodynamik</b>                            |                    |                           |
| (Grundeinheiten $L, T, M, Q$ )                      |                    |                           |
| Elektrische Ladung $Q$                              | $C_0^0$            | $[ 0, 0, 0, 1; C_0^0 ]$   |
| Elektrische Dichte $\rho$                           | $D_0^0$            | $[ -3, 0, 0, 1; D_0^0 ]$  |
| Elektrische Feldstärke $F_\beta$                    | $C_1^0$            | $[ 1, -2, 1, -1; C_1^0 ]$ |
| Dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}^\alpha$    | $D_0^1$            | $[ -2, 0, 0, 1; D_0^1 ]$  |
| Magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}^{\alpha\beta}$ | $D_0^2$            | $[ -1, -1, 0, 1; D_0^2 ]$ |
| Magnetische Induktion $B_{\beta\alpha}$             | $C_2^0$            | $[ 0, -1, 1, -1; C_2^0 ]$ |

| Größe   | Geometr. Charakter    | Dimensionsformel                      |
|---|-----------------------|---------------------------------------|
| Dielektrische Affinordichte $\varepsilon^{ab}$                  | $D_0^2$ <sup>+1</sup> | $[-3, 2, -1, 2; D_0^2]$ <sup>+1</sup> |
| Affinordichte der Permeabilität $\mu_{\delta\gamma\beta\alpha}$ | $D_4^0$ <sup>-1</sup> | $[1, 0, 1, -2; D_4^0]$ <sup>-1</sup>  |
| Elektrische Stromdichte $\mathfrak{z}^a$                        | $D_0^1$ <sup>+1</sup> | $[-2, -1, 0, 1; D_0^1]$ <sup>+1</sup> |
| Stromstärke $J$   | $C_0^0$               | $[0, -1, 0, 1; C_0^0]$                |
| Elektrische Spannung $U$  | $C_0^0$               | $[2, -2, 1, -1; C_0^0]$               |
| Dipolmoment $p^i$   | $C_0^1$               | $[1, 0, 0, 1; C_0^1]$                 |
| Magnetisches Moment $m^{ik}$                                    | $C_0^2$               | $[2, -1, 0, 1; C_0^2]$                |

## Literaturverzeichnis

1. *E. Bodea*, Giorgis rationales MKS-Maß-System mit Dimensionskohärenz (Birkhäuser, Basel 1949).
2. *L. Brillouin*, Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité (Masson, Paris 1946).
3. *H. B. Dorgelo and J. A. Schouten*, On Units and Dimensions, *Indagationes mathematicae*, 8, 44—52, 151—160, 248—258 (Amsterdam 1946).
4. *A. Duschek und A. Hochrainer*, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, Teil I und II (Springer, Wien 1948, 1950).
5. *R. Fleischmann*, Die Struktur des physikalischen Begriffssystems, *Zeitschrift für Physik*, 129, 377—400 (1951).
6. *M. Landolt*, Größe, Maßzahl und Einheit, Bd. 1, 2. Aufl. (Rascher, Zürich 1952).
7. *H. L. Langhaar*, Dimensional Analysis and Theory of Models (Wiley, New York 1951).
8. *P. Moon and D. E. Spencer*, A Modern Approach to Dimensions, *J. Franklin Institute*, 248, 495—521 (1949).
9. *E. Roth-Desmeules*, Geometrische Darstellung der Dimensionen physikalischer Größen, *El. Math.*, 8, 60—62 (1953).
10. *J. A. Schouten und D. J. Struik*, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. 1 (Noordhoff, Groningen 1935).
11. *J. A. Schouten*, Tensor Analysis for Physicists (Oxford 1951).
12. *J. A. Schouten*, Über die geometrische Deutung von gewöhnlichen p-Vektoren und W-p-Vektoren und den korrespondierenden Dichten, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.*, 41, 709—716 (1938).
13. *I. S. Sokolnikoff*, Tensor Analysis (Wiley, New York 1951).
14. *J. Wallot*, Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen (Barth, Leipzig 1953).