Die Inverse der Konchoide im Falle 1=p als Enveloppe eines invertierten besondern Hyperbelsystems

Autor(en): **Kaufmann, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn**

Band (Jahr): **8 (1924-1928)**

PDF erstellt am: **07.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-543244

Die Inverse der Konchoide im Falle l=p als Enveloppe eines invertierten besondern Hyperbelsystems.

Von Dr. ARNOLD KAUFMANN, Solothurn.

In meiner Arbeit „Die Inverse der Konchoide des Nikomedes“ [1]) wurde die Inverse für die allgemeine Lage und für einige spezielle Lagen des Inversionszentrums untersucht und diskutiert.

Die Inverse der Konchoide im Falle $l = p$ [2]) lässt sich auch als Enveloppe des invertierten Hyperbelsystems darstellen, das gebildet wird von sämtlichen Hyperbeln, die einen festen Punkt zum Scheitel und eine feste Gerade zur gemeinschaftlichen Asymptote haben.[3])

Um dies zu beweisen, stellt man die Gleichung des invertierten Hyperbelsystems auf und bestimmt dann dessen Enveloppe.

Wählt man den festen Punkt als Nullpunkt und legt die x-Achse senkrecht durch ihn zur gegebenen Asymptote $x = d$, so lautet die *Gleichung des Hyperbelsystems:*

$$x^2 + 2kxy - d\left(1 \pm \sqrt{1 + 4k^2}\right) x - 2kdy = 0. \qquad (1)$$

In dieser Gleichung bedeutet k ein veränderlicher Parameter. Nimmt k alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ an, so erhält man, dem doppelten Vorzeichen in obiger Gleichung entsprechend, zwei Systeme von je unendlich vielen Hyperbeln.

Die Inversion vollziehe sich am Einheitskreis (Inversionspotenz $= 1$). Wählt man den festen Punkt als Inversionszentrum

---

1) Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Kantonsschule Solothurn, 1919/1920.

2) Die Bedeutung von p und l ergibt sich aus der geometrischen Definition der Konchoide: Es ist eine feste Gerade (Leitlinie, Basis oder Direktrix genannt) und ein fester Punkt O im senkrechten Abstand p von dieser Geraden gegeben. Um den festen Punkt, den Pol O, dreht sich ein Strahl. Von seinem Schnittpunkt mit der Leitlinie aus trägt man eine beliebig gewählte, aber konstante Strecke l nach beiden Seiten ab. Auf diese Weise ergeben sich unendlich viele Punktepaare und der geometrische Ort aller dieser Punktepaare ist dann die Konchoide.

3) Dr. Hans Teuscher: Ueber ein besonderes Hyperbelsystem, Inaugural-Dissertation, Bern, 1915.

und substituiert in Gleichung (1) die Transformationsformeln der Inversion:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\ ;\ y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

so erhält man die *Gleichung des invertierten Hyperbelsystems:*

$$2kd\eta(\xi^2+\eta^2) + d(1 \pm \sqrt{1+4k^2})\,\xi(\xi^2+\eta^2) - 2k\xi\eta - \xi^2 = 0 \quad (2).$$

Diese ist vom dritten Grade und repräsentiert zwei Systeme von je unendlich vielen Kurven dritter Ordnung. Die Gleichung enthält den veränderlichen Parameter k im zweiten Grade. Die Frage nach einer Enveloppe der Kurvenschar dritter Ordnung ist demnach berechtigt.

Bezeichnet man die Gleichung (2) abgekürzt mit

$$f(\xi, \eta, k) = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Enveloppe durch Elimination des veränderlichen Parameters k aus den beiden Gleichungen:

$$f(\xi, \eta, k) = 0 \text{ und } \frac{\partial f(\xi, \eta, k)}{\partial k} = 0.$$

Gleichung (2) quadriert, ergibt:

$$f = d^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2 + 4d^2k^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)$$
$$- [2kd\eta(\xi^2+\eta^2) + d\xi(\xi^2+\eta^2) - 2k\xi\eta - \xi^2]^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 2kd^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2$$
$$- [2kd\eta(\xi^2+\eta^2) + d\xi(\xi^2+\eta^2) - 2k\xi\eta - \xi^2]$$
$$[d\eta(\xi^2+\eta^2) - \xi\eta] = 0.$$

Wird in der Gleichung $f = 0$ der Koeffizient von k^2 mit a, derjenige von k mit 2b und die Glieder ohne k mit c bezeichnet, so lässt sich die Gleichung schreiben:

$$f(\xi, \eta, k) = ak^2 + 2bk + c = 0$$

und hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 2ak + 2b = 0$$

$$k = -\frac{b}{a}$$

Diesen Wert in $f(\xi, \eta, k)$ substituiert, ergibt:

$$b^2 - ac = 0.$$

Die Gleichung der Enveloppe lässt sich demnach auf einfache Weise aus den Koeffizienten a, b und c der Gleichung $f = 0$ finden.

Die obige Gleichung $f = 0$ des invertierten Hyperbelsystems wird nach Ausrechnung des quadratischen Ausdrucks:

$$
\begin{aligned}
k^2\,[4\,d^2\eta^2(\xi^2+\eta^2)^2 + 4\,\xi^2\eta^2 - 8\,d\,\xi\,\eta^2(\xi^2+\eta^2) - 4\,d^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2] \\
+ 2\,k\,[2\,d^2\eta\,\xi\,(\xi^2+\eta^2)^2 - 4\,d\,\eta\,\xi^2(\xi^2+\eta^2) + 2\,\xi^3\eta] \\
+ \xi^4 - 2\,d\,\xi^3(\xi^2+\eta^2) = 0.
\end{aligned}
$$

Demnach entsprechen den Koeffizienten a, b und c folgende Werte:

$$
\begin{aligned}
a &= 4\,[d^2\eta^2(\xi^2+\eta^2)^2 + \xi^2\eta^2 - 2\,d\,\xi\,\eta^2(\xi^2+\eta^2) - d^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2] \\
b &= 2\,[d^2\eta\,\xi\,(\xi^2+\eta^2)^2 - 2\,d\,\eta\,\xi^2(\xi^2+\eta^2) + \xi^3\eta] \\
c &= \xi^4 - 2\,d\,\xi^3(\xi^2+\eta^2)
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der gesuchten Enveloppe

$$b^2 - a\,c = 0$$

wird somit:

$$
\begin{aligned}
4\,d^4\xi^2\eta^2(\xi^2+\eta^2)^4 - 8\,d^3\eta^2\xi^3(\xi^2+\eta^2)^3 - 8\,d^3\xi^5(\xi^2+\eta^2)^3 \\
+ 4\,d^2\xi^4(\xi^2+\eta^2)^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Nach Division dieser Gleichung durch $4\,d^2\,\xi^2\,(\xi^2+\eta^2)^2$ erhält man als Gleichung der gesuchten Enveloppe des invertierten Hyperbelsystems:

$$\underline{d^2\eta^2(\xi^2+\eta^2) - 2\,d\,\eta^2\xi - 2\,d\,\xi^3 + \xi^2 = 0.} \qquad (3)$$

Wählt man den Pol 0 als Nullpunkt, sowie als Inversionszentrum, die Parallele zur Leitlinie durch ihn im Abstand p als x-Achse und somit die Senkrechte in 0 zur Leitlinie als y-Achse, so lautet die Gleichung der Inversen der Konchoide im Falle $l = p$:

$$p^2\,x^2\,(x^2+y^2) - 2\,p\,x^2\,y - 2\,p\,y^3 + y^2 = 0$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $p = d$ und vertauscht zugleich noch die x- und y-Achse, so heisst die Gleichung:

$$\underline{d^2\,y^2\,(x^2+y^2) - 2\,d\,y^2\,x - 2\,d\,x^3 + x^2 = 0.} \qquad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt somit, dass die Inverse der Konchoide im Falle $l = p = d$ die Enveloppe des durch die Gleichung (2) dargestellten invertierten Hyperbelsystems ist.