Wachstumsformel für die Bevölkerung des Kantons Solothurn

Autor(en): **Dändliker, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn**

Band (Jahr): **9 (1928-1931)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-543220

Wachstumsformel
für die Bevölkerung des Kantons Solothurn

VON Dr. K. DÄNDLIKER, SOLOTHURN

Die Schaffung von Alters- und Hinterbliebenenversicherungen drängt immer mehr die Notwendigkeit auf, über die Zahl und den Altersaufbau der betreffenden Bevölkerung Aufschluss zu erhalten. Die Volkszählungen haben gezeigt, dass sowohl die Gesamtzahl einer Bevölkerung, als auch ihr Altersaufbau beständigen Aenderungen unterworfen sind. Für die Beschaffung der statistischen Unterlagen für die Alters- und Hinterbliebenenversicherung ist es also nicht angängig, die durch die Volkszählungen in Erfahrung gebrachten Resultate einfach auch als für die Zukunft gültig zu Grunde zu legen. Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, diese Verhältnisse für den Kanton Solothurn zu untersuchen auf Grund einer neuen Bevölkerungsformel.

Schon Euler hat versucht, das Wachstum einer Bevölkerung mathematisch zu formulieren[1]. Er nahm an, dass die Menschheit Jahr um Jahr um einen bestimmten Prozentsatz zunehme, in gleicher Weise, wie ein an Zinsen gelegtes Kapital. Eine erste Korrektur an dieser Wachstumshypothese brachte der englische Philosoph Malthus an[2]. Er sagte, dass die Bevölkerung, wie schon Euler annahm, die Tendenz habe, nach einer geometrischen Progression anzuwachsen, dass sich aber fortschreitend diesem Wachstum immer stärkere Hindernisse entgegenstellen, sodass die Zunahme sich verlangsamt und die Bevölkerungszahl einer maximalen Grenze zustrebt. Diese Idee wurde vom belgischen Mathematiker Verhulst in drei verschiedenen

[1] Euler: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Opera omnia, Series prima, Volumen VII, 1923.

[2] Malthus: An essay on the principle of population. London 1798.

Arbeiten in mathematische Form gekleidet[3]. Seine Arbeiten gerieten aber in Vergessenheit und wurden erst in den letzten Jahren neu entdeckt. Wenn auch die Bevölkerungen der Vereinigten Staaten, von Frankreich und England ziemlich genau diesem Gesetze folgen, so ist das für die Bevölkerungen der Schweiz[4] und des Kantons Solothurn entschieden nicht der Fall.

Wir nehmen nun an, eine Bevölkerungszahl habe sich auf einer bestimmten obern Grenze G stabilisiert, welche durch eine ganz bestimmte wirtschaftliche Struktur des Gebietes bedingt ist. Durch eine grundlegende wirtschaftliche Neuerung, wie sie durch den Bau der Bahnen und die Einführung der Industrie um das Jahr 1860 herum im Kanton Solothurn eingetreten ist, wird dem Gebiet für eine grössere Bevölkerungszahl Existenzmöglichkeit geschaffen. Die Bevölkerung nimmt infolgedessen wieder zu, sodass die Gesamtbevölkerung B_t im Zeitpunkte t

$$B_t = G + Z(t)$$

ist. Die Zunahme $Z(t)$ hat die Tendenz, wie ein an Zinsen gelegtes Kapital anzuwachsen, wird aber umsomehr abgebremst, je grösser diese Zunahme wird, und zwar sollen die Hindernisse, welche diesem Zuwachs entgegentreten, demselben direkt proportional sein. Ist $dZ(t)$ die Zunahme im Zeitelement dt, so ist der Wachstumsfaktor pro Einheit oder die Wachstumsintensität gleich $\frac{1}{Z(t)} \cdot \frac{dZ(t)}{dt}$. Diese Intensität ist also gleich einer Konstanten C, vermindert um eine Grösse, die der Funktion $Z(t)$ direkt proportional ist. Man erhält daher für $Z(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{Z(t)} \cdot \frac{dZ(t)}{dt} = C - \frac{Z(t)}{D},$$

wo D ebenfalls eine Konstante ist. Die Lösung dieser Gleichung wird

[3] Verhulst: Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance mathématique et phyisique publiée par A. Quetelet 1838.

Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1845.

Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1847.

[4] Friedli: Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterbliebenen-Versicherung in der Schweiz. Bern 1928.

gegeben durch die Funktion $Z(t) = \frac{C \cdot D}{D \cdot e^{-C \cdot t - K} + 1}$, dabei ist K die Integrationskonstante. $Z(t)$ ist die Formel von Verhulst[3]. Setzt man $C = \frac{1}{\alpha}$, $CD = L$ und $K = -\frac{\beta}{\alpha}$, so geht die Formel über in

$$Z(t) = \frac{L}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}}.$$

Die Bevölkerungsformel lautet daher

$$B^t = G + \frac{L}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}}, \qquad \text{(I)}$$

wo G und L Bevölkerungszahlen sind und α und β die Dimension einer Zeit haben. Diese 4 Konstanten charakterisieren die Grösse und den zeitlichen Verlauf einer Bevölkerungszahl. Hat man die Werte von vier Volkszählungen, so lassen sich theoretisch diese Konstanten bestimmen. Für die praktische Bestimmung wählt man vier äquidistante Zeitpunkte. Für die schweizerischen Verhältnisse sind hiefür die Zahlen von 1860, 1880, 1900 und 1920 am geeignetsten. Für diese Zeitpunkte haben die Exponentialglieder des Nenners die Form

$e^{\frac{\beta - 1860}{\alpha}}$, bzw. $e^{\frac{\beta - 1880}{\alpha}}$, $e^{\frac{\beta - 1900}{\alpha}}$ und $e^{\frac{\beta - 1920}{\alpha}}$. Setzt man

$$x = e^{\frac{\beta - 1900}{\alpha}} \text{ und } y = e^{\frac{20}{\alpha}} \qquad \text{(II)},$$

so gehen diese Glieder über in xy^2 bzw. xy, x und $\frac{x}{y}$. Es ist also

$$B_{1860} = G + \frac{L}{1 + xy^2}, \qquad B_{1880} = G + \frac{L}{1 + xy},$$

$$B_{1900} = G + \frac{L}{1 + x}, \qquad B_{1920} = G + \frac{L}{1 + \frac{x}{y}}.$$

Bildet man

$$B_{1920} - B_{1860} = L\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{y}} - \frac{1}{1 + xy^2}\right) = \frac{L\,x\,(y^3 - 1)}{y\left(1 + \frac{x}{y}\right)(1 + xy^2)}$$

$$B_{1900} - B_{1880} = L\left(\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + xy}\right) = \frac{L\,x\,(y - 1)}{(1 + x)(1 + xy)}$$

$$B_{1920} - B_{1900} = L\left(\frac{1}{1+\frac{x}{y}} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{L\,x\,(y-1)}{y\left(1+\frac{x}{y}\right)\,(1+x)}$$

$$B_{1880} - B_{1860} = L\left(\frac{1}{1+xy} - \frac{1}{1+xy^2}\right) = \frac{L\,xy\,(y-1)}{(1+xy)\,(1+xy^2)}$$

und setzt man Ausdruck $m = \frac{(B_{1920} - B_{1860})\,(B_{1900} - B_{1880})}{(B_{1920} - B_{1900})\,(B_{1880} - B_{1860})}$ ein, so erhält man

$$m = \frac{x\,(y^3 - 1)\,x\,(y-1)\,y}{yx\,(y-1)\,xy\,(y-1} = \frac{y^2 + y + 1}{y}, \text{ also}$$

$$y^2 - (m-1)y + 1 = 0. \qquad \text{(III)}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind also

$$y = \frac{(m-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(m-1)^2}{4} - 1}.$$

Wählt man als weitere Hilfsgrösse $r = \frac{(B_{1920} - B_{1900})}{(B_{1900} - B_{1880})}$, so erhält man

$$r = \frac{1+xy}{x+y}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{ry-1}{y-r}.$$

Hat man die Werte x und y berechnet, so folgt

$$\alpha = \frac{20 \log e}{\log y} \text{ (} e = \text{Basis der natürl. Logarithmen) und}$$

$$\beta = \frac{20 \log x}{\log y} + 1900,$$

es ist ferner $L = \frac{(B_{1920} - B_{1900})\,(1+x)\,(x+y)}{x\,(y-1)}$

und $\quad G = B_{1900} - \frac{L}{1+x}.$

Setzt man $\tau = \frac{1900 - t}{20}$,

so ist $e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} = e^{\frac{\beta - 1900}{\alpha}} \cdot e^{\frac{20}{\alpha} \cdot \frac{1900 - t}{20}} = xy^{\tau}$ und es geht die Formel (I) über in den Ausdruck

$$B^t = G + \frac{L}{1 + xy^{\tau}}. \qquad \text{(IV)}$$

Welche der beiden Lösungen der Gleichung (III) sind der Berechnung der vier Konstanten zugrunde zu legen? Entsprechen der Lösung y die andern Konstanten x, L und G und der zweiten Lösung y' bzw. x', L' und G', so folgt aus (III)

$$y' = \frac{1}{y}, \text{ ferner } x' = \frac{ry'-1}{y'-r} = \frac{r\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}-1} = \frac{r-y}{1-ry} = \frac{1}{x},$$

$$L' = \frac{(B_{1920}-B_{1900})\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-1\right)} =$$

$$= \frac{(B_{1920}-B_{1900})\,(1+x)\,(x+y)}{x\,(1-y)} = -L \text{ und}$$

$$G' = B_{1900} - \frac{L'}{1+\frac{1}{x}} = B_{1900} - \frac{xL'}{1+x} =$$

$$= B_{1900} + L - \frac{L}{1+x} = L + G.$$

Die Konstanten x', y', L' und G' ergeben somit die Gleichung

$$B'_t = G' + \frac{L'}{1+x'(y')^{\tau}} = G + L - \frac{L}{1+\frac{1}{x}\cdot y^{-\tau}} =$$

$$= G + \frac{L\frac{1}{x}y^{-\tau}}{1+\frac{1}{x}y^{-\tau}} = G + \frac{L}{1+xy^{\tau}}.$$

Ob also die eine oder die andere Lösung der Gleichung (III) für die Bestimmung der Konstanten benutzt wird, ist gleichgültig, da beide Konstantenquadrupel zu derselben Gleichung (IV) führen.

Wendet man die Formel (I) auf die Bevölkerung des Kantons Solothurn an, so erhält man für $\beta - 1900 = 23{,}6417$ Jahre, also $\beta = 1923{,}6417$, dabei bedeutet 1923,0 der 1. Dezember 1923. Will man diese Jahrzahlen auf den 1. Januar des betreffenden Jahres beziehen, so muss man $\frac{365-31}{365} = 0{,}9151$ addieren, sodass man für β den Wert $1923{,}6417 + 0{,}9151 = 1924{,}5586$ erhält.

Die Konstanten der Bevölkerung von Solothurn sind

$$\alpha = 23{,}384 \text{ Jahre}$$
$$\beta = 1924{,}559 \text{ Jahre}$$
$$G = 59\,784 \text{ Seelen}$$
$$L = 153\,602 \text{ Seelen.}$$

In der folgenden Tabelle sind die beobachteten und die berechneten Werte der Zähljahre 1860 bis 1930 zusammengestellt, sowie die Abweichungen der entsprechenden Zahlen in Prozent:

Tabelle A.

Jahr	Berechnete Werte	Beobachtete Werte	Abweichung in %
1860	69 263	69 263	0
1870	73 858	74 608	1,0
1880	80 363	80 362	0
1890	87 255	85 621	—1,9
1900	100 762	100 762	0
1910	114 797	117 040	1,9
1920	130 617	130 617	0
1930 [5]	146 959	144 198	—1,9

Die Abweichungen der berechneten Zahlen der Wohnbevölkerung von den beobachteten Werten liegt bei allen vier nicht zur Auswertung der Formel benutzten Jahren 1870, 1888, 1910 und 1930 unter 2 %. Die Bevölkerungssteigerung des Kantons Solothurn ist also in den 70 verflossenen Jahren verhältnismässig sehr genau der aufgestellten Formel gefolgt. Falls die heutige wirtschaftliche Struktur des Kantons sich nicht grundlegend ändert, was bei der Schärfe der heute herrschenden Krise und ihrer Ursachen keineswegs ohne weiteres von der Hand gewiesen werden kann, so ist anzunehmen, dass die Formel auch in den nächsten Jahrzehnten die Entwicklung der Bevölkerung charakterisieren wird. Die Berechnung ergibt nun für die nächsten 40 Jahre folgende Werte:

Tabelle B.

Jahr (1. Januar)	Bevölkerungszahl
1931	147 099
1941	162 527
1951	175 905
1961	186 679
1971	194 851
1976	198 063

[5] Eidgenössische Volkszählung 1930. Statistische Quellenwerke der Schweiz. Heft 13. Eidgenössisches statistisches Amt 1931.

Ausgehend von der letzten Volkszählung 1920 ist es möglich, mit Hilfe einer Sterbetafel[6] die Besetzung jeder Jahresklasse Jahr für Jahr zu berechnen. Bildet man die Summe über alle Jahrgänge für den 1. Januar jedes Jahres, so erhält man eine Zahl, die kleiner ist, als die für den betreffenden Zeitpunkt nach Formel (I) berechnete Gesamtbevölkerungszahl. Die so gefundene Differenz gibt die Zahl der im vorangehenden Jahre geborenen und am betreffenden 1. Januar noch lebenden Einwohner an. Auf diese Weise gelingt es, allerdings unter Weglassung der Zu- und Abwanderung, die Besetzung aller Jahrgänge und zu jedem Zeitpunkt zu berechnen. Die folgende Tabelle gibt für den 1. Januar der betreffenden Jahre die in dieser Weise gefundene Zahl der Personen, die $65^1/_2$ und mehr Jahre alt sind

Tabelle C.

Jahr (1. Januar)	Personen mit $65^1/_2$ und mehr Jahren
1931	7 688
1941	9 535
1951	11 049
1961	12 608
1971	15 408
1976	16 547

Betrachtet man die Gesamtzahl einer Bevölkerung, die ein gewisses Alter überschritten hat, so haben auch diese die Tendenz einer Formel zu folgen, wie sie (I) darstellt. Betrachtet man für den Kanton Solothurn die Gesamtheit der Erwachsenen-Personen, d. h. derjenigen Einwohner, die das Alter $18^1/_2$ überschritten haben, so erhält man

$$B_t^* = G^* + \frac{L^*}{1 + e^{\frac{\beta^* - 1900}{\alpha^*}}}, \quad \text{wo} \quad \begin{aligned} G^* &= 43\,232 \\ L^* &= 107\,790 \\ \beta^* &= 1931 \text{ und} \\ \alpha^* &= 17 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Für die Volkszählungen, deren Zahlen heute zur Verfügung stehen, gebe die folgende Tabelle die beobachteten und die berechneten Werte, sowie ihre Abweichungen in Prozent.

---

[6] SM 1920/21 und SF 1920/21. Bericht des eidg. Versicherungsamtes 1925.

Jahr	Berechnete Werte	Beobachtete Werte	Abweichung in %
1860	44 953	45 205	0,6
1870	46 288	46 956	1,4
1880	48 613	48 039	—1.2
1888	52 549	51 370	—2,2
1900	58 924	59 719	1,3
1910	68 540	68 676	0,2
1920	81 594	81 594	0

Die Tabelle zeigt, dass auch die Zahl der Erwachsenen-Bevölkerung in den 60 Jahren der Formel so gefolgt ist, dass die maximale Abweichung 2,2 % beträgt. Auf künftige Jahre angewandt, erhält man folgende Zahlen:

Tabelle D.

Jahr (1. Januar)	Personen mit 18½ und mehr Jahren
1931	97 127
1941	112 536
1951	125 618
1961	135 027
1971	141 662
1976	143 889

Die Tabellen B, C und D gestatten nun, die im Hinblick auf die Altersversicherung wichtigen Bevölkerungsgruppen zu berechnen, nämlich der Jugendlichen mit Altern bis zu 18½ Jahren, der Erwerbsfähigen, d. h. der Bevölkerungsgruppe mit 18½ und mehr aber weniger als 65½ Jahren, und der sog. Rentenbezüger, mit 65½ und mehr Jahren. Die folgende Tabelle gibt in ihrem ersten Teil eine Zusammenstellung der von 1860 bis 1920 beobachteten Werten und in: ihrem zweiten Teile die berechneten Werte für die Zeit von 1931—1976

Tabelle E.

Datum	Jahr	Altersklassen der Solothurner Bevölkerung		
		Jugendliche 0—18½ J.	Erwerbsfähige 18½—65½ J.	Rentenbezüger 65½ u. mehr J.
10. Dezember	1860	24 058	41 301	3 904
1. Dezember	1870	27 652	42 530	4 406
1. Dezember	1880	32 323	43 549	4 490
1. Dezember	1888	34 251	46 325	5 045
1. Dezember	1900	41 043	54 198	5 521
1. Dezember	1910	48 304	62 534	6 142
1. Dezember	1920	49 023	75 427	6 167

Datum	Jahr	Altersklassen der Solothurner Bevölkerung Jugendliche 0—18½ J.	Erwerbsfähige 18½—65½ J.	Rentenbezüger 65½ u. mehr J.
1. Januar	1931	49 972	89 439	7 688
1. Januar	1941	49 991	103 001	9 535
1. Januar	1951	50 287	114 569	11 049
1. Januar	1961	51 652	122 419	12 608
1. Januar	1971	53 189	126 254	15 408
1. Januar	1976	54 174	127 342	16 547

Eine bessere Uebersicht über die Bevölkerungsverteilung ergibt die folgende Tabelle, die für die drei Bevölkerungskategorien die Anteile auf 1000 Personen enthalten:

Tabelle F.

Jahr 1. Dezember bzw. 1. Jan.	Zahl der Personen auf 1000 Einwohner Jugendliche 0—18½ J.	Erwerbsfähige 18½—65½ J.	Rentenbezüger 65½ u. mehr J.
1860	348	596	56
1870	371	570	59
1880	403	541	56
1888	402	539	59
1900	408	537	55
1910	415	533	52
1920	374	579	47
1931	340	608	52
1941	308	633	59
1951	286	651	63
1961	277	655	68
1971	273	648	74
1976	274	642	84

Im Beharrungszustand werden diese Zahlen 293, 619 und 88 sein. Diese Tabelle zeigt nun, wie schon weiter oben bemerkt, dass aus den bisherigen Resultaten der Volkszählungen die künftige Altersverteilung nicht ohne weiteres herausgelesen werden kann. Merkwürdig stabil bleiben in Tabelle E die Werte für die Jugendlichen in den Jahren 1910 bis 1961, womit auch das Fallen der entsprechenden Zahlen der letzten Tabelle von 415 im Jahre 1910 auf 273 im Jahre 1971 erklärt ist.

Ausserordentlich verschiedene Werte weist das Verhältnis der Zahl der Rentenberechtigten zur Zahl der Erwerbsfähigen oder

Prämienpflichtigen auf. Auch dieses für die Altersversicherung grundlegende Verhältnis sei in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Jahr 1. Dezember	Rentenberechtigte auf 100 Prämienpflichtige	Jahr 1. Januar	Rentenberechtigte auf 100 Prämienpflichtige
1860	9,5	1931	8,6
1870	10,4	1941	9,2
1880	10,5	1951	9,6
1888	10,9	1961	10,3
1900	10,2	1971	12,2
1910	9,8	1976	13,0
1920	8,2		

Wie eingangs erwähnt worden ist, folgt die Bevölkerungszahl der Schweiz keineswegs der Formel von Verhulst. Es fragt sich nun, ob diese nicht eher der Formel (I) folgt. Die Berechnung der Konstanten ergibt:

$$\alpha = 25{,}4418 \text{ Jahre}$$
$$\beta = 1911{,}6087 \text{ Jahre}$$
$$G = 2\,161\,121 \text{ Seelen und}$$
$$L = 2\,911\,724 \text{ Seelen.}$$

Die folgende Tabelle gibt neben den beobachteten und den berechneten Werten der Volkszählungen 1860 bis 1930 die Abweichungen:

Tabelle G.

Jahr	Beobachtete Werte	Berechnete Werte	Abweichung in %
1860	2 510 494	2 510 494	0
1870	2 655 001	2 650 446	0,17
1880	2 831 787	2 831 787	0
1888	2 917 754	2 969 879	—1,76
1900	3 315 443	3 315 443	0
1910	3 753 293	3 597 134	4,34
1920	3 880 320	3 880 320	0
1930 [5]	4 066 400	4 144 302	—1,88

Die Abweichung von 52 125 Seelen gegenüber der Berechnung im Jahre 1888 ist eine Erscheinung, die durch verstärkte Auswanderung infolge wirtschaftlicher Depression vollständig erklärt wird, haben doch im Zeitraum 1880 bis 1888 51 171 männliche und 28 721 weibliche Personen die Schweiz verlassen, gegenüber nur 7 859 bzw. 15 130 im Zeitraume 1870 bis 1880. Im Jahre 1900 zählte die Schweiz

383424 Ausländer. 1910 schon 552011, die sich 1920 wieder auf 402385 verminderten. Diese Verminderung von 150000 Ausländern entspricht ziemlich genau der Differenz zwischen der berechneten und der beobachteten Einwohnerzahl der Schweiz im Jahre 1910. Auch 1930 weist eine Differenz von 78000 Seelen auf, was bei der Stärke der herrschenden Krise nicht anders erwartet werden konnte.

Berechnet man die Bevölkerungszahl für das Jahr 2000, so erhält man 4988339 Seelen, was der Annahme von 5000000 Seelen, die Prof. Dr. Friedli [4] der Untersuchung über die statistischen Grundlagen der schweizerischen Alters- und Hinterbliebenenversicherung zu Grunde gelegt hat, verblüffend nahe kommt.