1. Koordinatensysteme der Astronomie

1. Koordinatensysteme der Astronomie

H. SCHILT

Die Astronomen beziehen ihre Beobachtungen und Messungen am Himmel auf Koordinatensysteme verschiedenster Art, denn nur so sind Beobachtungen mitteilbar und Messungen vergleichbar. Man unterscheidet kartesische und Polarkoordinaten. Die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems stehen je normal zueinander und auf ihnen sind die gleichen Einheiten abgetragen. Bei Polarkoordinaten gibt man die Entfernung vom Nullpunkt an und die Richtungen mit Winkeln, die besondere Namen tragen. Es ist zweckmässig, die verschiedenen Namen und Begriffe an Hand von Figuren anschaulich einzuführen.

1.1 Ebene Systeme

Wir betrachten zunächst ebene Systeme und führen rechtwinklige Koordinaten x, y und Polarkoordinaten r, α ein, um die Lage eines Punktes P bezüglich des Systems festzulegen. (Fig. 1a und Fig. 1b)

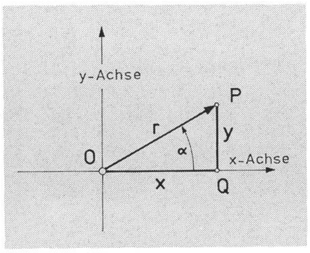


Fig. 1a: im Gegenuhrzeigersinn orientiert

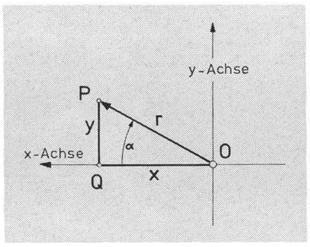


Fig. 1b: im Uhrzeigersinn orientiert

Polarkoordinaten und rechtwinklige Koordinaten können unabhängig von der Orientierung mit Hilfe der folgenden Beziehungen ineinander umgewandelt werden.

P → R: Polar- in rechtwinklige Koordinaten

Dazu dient das Formelsystem:

1.11
$$r \sin \alpha = y$$
$$r \cos \alpha = x$$

Man setzt voraus, dass $0 \leqslant r < \infty$ und dass $-\infty < \alpha < +\infty$ sind. Die Funktionen *sinus* und *cosinus* haben je eine Periode von 360°. Für Werte von α, die sich um ein ganzes Vielfaches von 360° unterscheiden, erhalten wir das gleiche Paar (y, x).

Das Formelsystem 1.11 kürzen wir mit dem Symbol ab:

1.12
$$(\alpha, r)\,\boldsymbol{R} = (y, x)$$

Dieses Symbol ist angepasst an die Art, wie viele Taschenrechner die Gleichungen 1.11 zu berechnen gestatten. Man gibt die beiden Werte α und r ein und drückt eine Tastenfolge, welche mit «*to rectangular*» bzw. mit P – R oder P/R bezeichnet ist, der Rechner bestimmt hierauf das geordnete Paar (y, x).

Beispiel: Aus $\alpha = 64°$ und $r = 7$ cm sollen x und y berechnet werden.

$$y = 7\ \text{cm} \cdot \sin 64° = 6.2916\ldots \text{cm}$$
$$x = 7\ \text{cm} \cdot \cos 64° = 3.0686\ldots \text{cm}$$

abgekürzt geschrieben:

$$(64\,,\,7)\,\boldsymbol{R} = (6.2916\ldots, 3.0686\ldots)$$

speziell:

$$(114\,,\,1)\,\boldsymbol{R} = (0.9135\ldots, -0.4067\ldots)$$
$$= (\sin 114°\,,\,\cos 114°)$$

R → P: Rechtwinklige in Polarkoordinaten

Die Umwandlung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten ist gedanklich etwas komplizierter als umgekehrt, weil bei gegebenen x und y es noch unendlich viele Lösungen für den Winkel α gibt, die sich alle um ein ganzes Vielfaches von 360° unterscheiden. Damit wir eine eindeutige Lösung erhalten, schränken wir das Intervall für α ein; es soll der Winkel α innerhalb von $-180° \leqslant \alpha \leqslant +180°$ liegen und r soll positiv sein. Unter diesen Bedingungen ist die Lösung des Systems nach r und α eindeutig, wenn x und y nicht beide zugleich null sind. Formelmässig kann diese Lösung folgendermassen zusammengefasst werden:

1.13

	$\sqrt{x^2+y^2} = r$
$x \neq 0\ ,\ y = 0$	$90°(1 - x/\lvert x\rvert) = \alpha$ [1]
$x = 0\ ,\ y \neq 0$	$90° y/\lvert y\rvert = \alpha$
$x \neq 0\ ,\ y \neq 0$	$\arctan(y/x) + 90°(1 - x/\lvert x\rvert)y/\lvert y\rvert = \alpha$

dabei ist noch vorausgesetzt, dass die Einschränkung gilt:

$$-90° \leqslant \arctan(y/x) \leqslant +90°.$$

Die positive Zählrichtung für den Winkel α ist bestimmt durch jene Drehung um 90°, welche die positive x-Achse in die positive y-Achse überführt.

Es ist offensichtlich zweckmässig, dieses Formelsystem abzukürzen; wir schreiben

1.14
$$(y\ ,\ x)\quad \boldsymbol{P} = (\alpha\ ,\ r)$$

Auch dafür bieten die wissenschaftlichen Taschenrechner *eine Tastenfolge* an, die mit «*to polar*» bzw. mit INV P→R oder R→P abgekürzt wird.

In der Mathematik werden Symbole wie ***P*** und ***R*** als *Operatoren* bezeichnet. Wir werden diesen Begriff auch benutzen. Darunter ist für uns nichts anderes zu verstehen, als was bei der Auflösung der Systeme 1.11 oder 1.13 zu tun ist.

Etwa: Es ist das Wertepaar $(y\,,\,x)$ gegeben, ***P*** heisst, man bestimme daraus α und r.

Beispiel:

$$\begin{matrix} x = -5 \\ y = -12 \end{matrix} \quad \text{R→P} \quad \begin{matrix} r = 13 \\ \alpha = -112.62°\ldots \end{matrix}$$

oder abgekürzt:

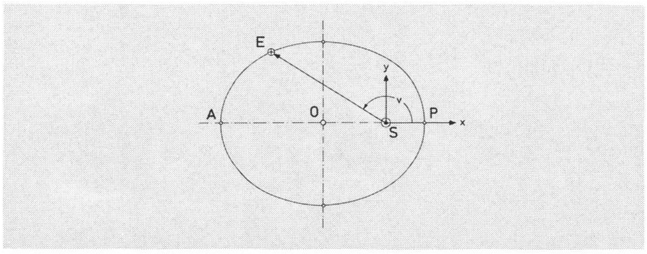
$$(-12\ ,\ -5)\quad \boldsymbol{P} = (-112.62°\ldots\ ,\ 13)$$

---

[1]) Anmerkung: $\lvert x\rvert$ heisst Betrag von x oder absoluter Wert von x.

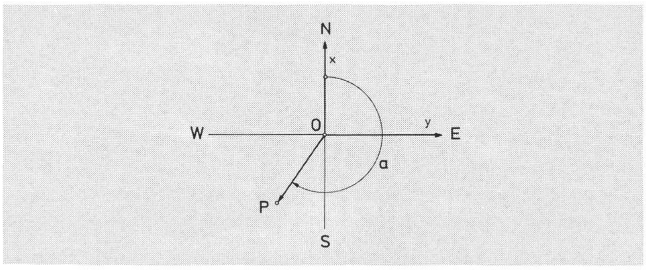
Beispiele:

1) *Ekliptikebene:* Bewegung der Erde um die Sonne.
Koordinatenursprung: Zentrum der Sonne



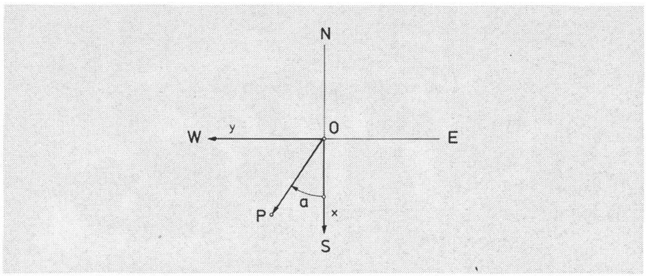
$r := SE$: Entfernung Sonne-Erde
$\alpha := v$ wahre Anomalie
x-Achse: Gerade Sonne-Perihel P (sonnennächster Punkt der Bahn)
Orientierung: im Gegenuhrzeigersinn, wenn vom nördlichen Ekliptikpol her gesehen.

2) *Horizontebene*
Windrose der Geometer und Navigatoren



x-Achse: gegen Norden N
y-Achse: gegen Osten E
r: Entfernung OP
$\alpha := a$ Azimut (von geogr. Nord aus gemessen) [1])

Windrose der Astronomen

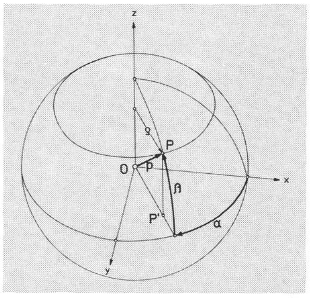


x-Achse: gegen Süden S
y-Achse: gegen Westen W
r: Entfernung OP
$\alpha := a$ Azimut (von geogr. Süd aus gemessen) [1])

beide Systeme sind im Uhrzeigersinn orientiert.

1.2 Dreidimensionale Koordinatensysteme
Im dreidimensionalen Raum ist eine dritte Koordinate notwendig. x, y, z sind die drei rechtwinkligen Koordinaten und p, α, β die dazugehörigen Polarkoordinaten; es sei $p > 0$, $-90° \leqslant \beta \leqslant +90°$ und $-180° < \alpha \leqslant +180°$. Es gibt linksorientierte und rechtsorientierte Systeme: die beiden Systeme zeichnen sich durch eine Grundebene x, y und eine dazu normale Achse (z-Achse) aus.

Orientierung



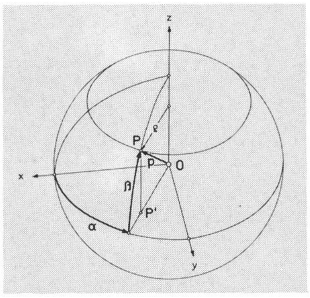


Fig. 1.f links rechts *Fig. 1.g*

Neben der Entfernung $p = OP$ führen wir noch den Radius des Parallelkreises zur Grundebene durch P ein: $\varrho = OP'$, $\varrho = p \cos \beta$, wobei P' die Orthogonalprojektion des Punktes P auf die x-y-Ebene ist. Bei beiden Systemen gilt für den Übergang von p, α, β nach x, y, z:

$$z = p \sin \beta \qquad ; \varrho = p \cos \beta$$

1.21
$$x = \varrho \cos \alpha = p \cos \beta \cos \alpha$$
$$y = \varrho \sin \alpha = p \cos \beta \sin \alpha$$

Unter zweimaliger Anwendung des Operators $\boldsymbol{R}$ ist der Übergang P→R:

1.22
$$(\beta, p)\,\boldsymbol{R} = (z, \varrho)$$
$$(\alpha, \varrho)\,\boldsymbol{R} = (y, x)$$

Und entsprechend findet man für den Übergang R→P

1.23
$$(y, x)\,\boldsymbol{P} = (\alpha, \varrho)$$
$$(z, \varrho)\,\boldsymbol{P} = (\beta, p)$$

Wenn zu den angegebenen Intervallen für p, α, β noch vorausgesetzt wird, dass $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ sei, liefern beide Übergänge je eindeutige Resultate.

[1]) Anmerkung: Man beachte, dass geogr. Nord (bzw. Süd) sich um die Meridiankonvergenz μ von Karten Nord (bzw. Süd) unterscheidet.

$$a_{\text{geogr.}} = a_{\text{Karte}} + \mu$$

Beispiele

B 1. Orientierung auf der Erdkugel

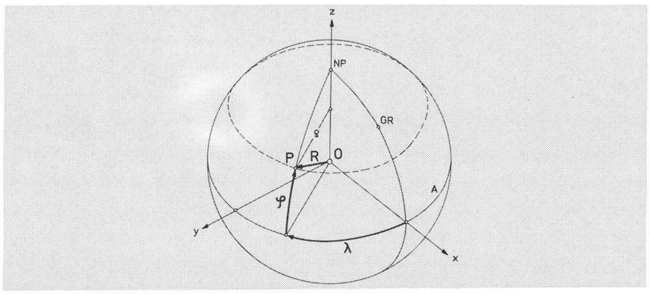


Fig. 1.h

P:	Punkt auf der Erdkugel
Gr:	Greenwich
$p:=$	R Erdradius
$\alpha:=$	λ geogr. Länge (westlich Gr. pos)
$\beta:=$	φ geogr. Breite
z-Achse:	Erdachse Richtung Nordpol NP
x-Achse:	in der Äquatorebene und im Meridian von Greenwich
y-Achse:	in der Äquatorebene und im Meridian $\lambda = 90°$ West

$x = R \cos\varphi \cos\lambda$
$y = R \cos\varphi \sin\lambda$
linksorientiert $z = R \sin\varphi$

Beispiel: Nullpunkt der schweizerischen Landesvermessung:

$R = 6378.816$ km	$x = 4\,317.5788$ km
$\lambda = -7°26'22.5''$	$y = -563.7890$ km
$\varphi = 46°57'07.9''$	$z = 4\,661.5393$ km

B 2. Systeme des Horizontes

v: Vektor auf der Visierlinie, falls es nur auf die Richtung ankommt, kann dessen Betrag beliebig gewählt werden, z.B. auch $v = 1$

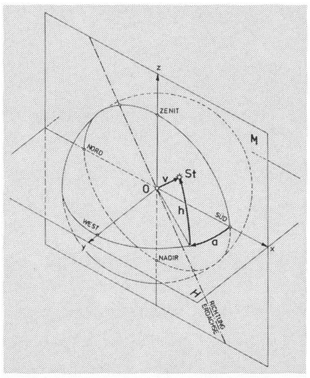


Fig. 1.i: System der Astronomen
M: Meridianebene
St: Stern

$\beta := h$ Höhe (Elevation)
$\alpha := a$ Azimut
$x = v \cos h \cos a$
$y = v \cos h \sin a$
$z = v \sin h$
z-Achse: Richtung zum Zenit
x-Achse: Richtung Süd
y-Achse: Richtung West

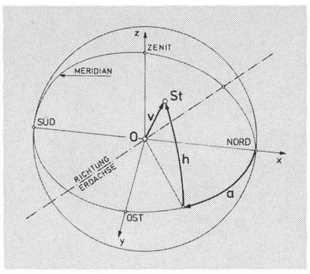


Fig. 1.k: System der Navigatoren und Geometer

x-Achse: Richtung Nord
y-Achse: Richtung Ost

Beide Systeme sind linksorientiert.

Wenn φ die geographische Breite des Beobachtungsortes O ist, hat die Richtung der Erdachse im System der Astronomen die Koordinaten: $h = \varphi$ und $a = 180°$.

B 3. Systeme des Äquators

System $\bar{K}$: Ortsäquator-System (an den Ortsmeridian gebunden) [1])

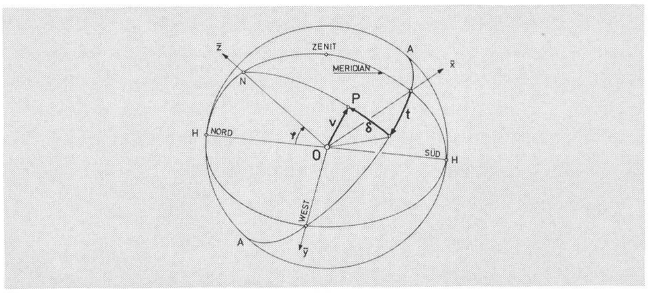


Fig. 1.l: linksorientiert

$\bar{z}$-Achse:	Richtung zum nördlichen Himmelspol
$\bar{x}$-Achse:	Schnitt Meridian Äquator Süd
$\bar{y}$-Achse:	gegen Westen
$p:= v$	Entfernung zum Himmelskörper oder 1
$\alpha:= t$	Stundenwinkel
$\beta:= \delta$	Deklination
$\bar{x} =$	$v \cos\delta \cos t$
$\bar{y} =$	$v \cos\delta \sin t$
$\bar{z} =$	$v \sin\delta$

System K*: Himmelsäquator-System (im Fixsternhimmel verankert)

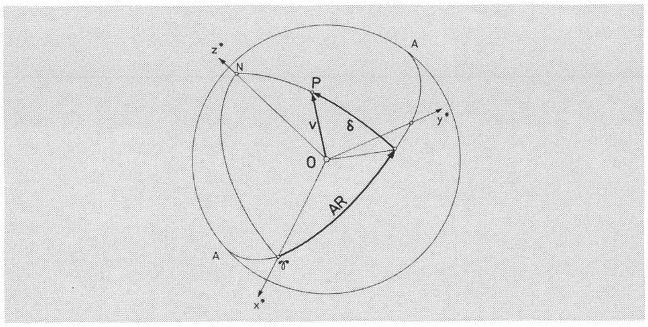


Fig. 1.m: rechtsorientiert

z^*-Achse:	Richtung zum nördlichen Himmelspol
x^*-Achse:	Richtung zum Frühlingspunkt
y^*-Achse:	Schnitt AR = 90° mit Äquator
$p:= v$:	Entfernung zum Himmelskörper oder 1
$\alpha:= AR$	Rektaszension
$\beta:= \delta$	Deklination
$x^* =$	$v \cos\delta \cos AR$
$y^* =$	$v \cos\delta \sin AR$
$z^* =$	$v \sin\delta$

Bemerkung: Infolge der Erdrotation wächst der Stundenwinkel eines Fixsterns proportional der Zeit, man misst ihn meistens in Stunden, es ist dann zweckmässig, die Rektaszension auch in Stunden zu messen.

[1]) Anmerkung: auch als festes Äquatorsystem bezeichnet.

B 4. System der Ekliptik
System E′

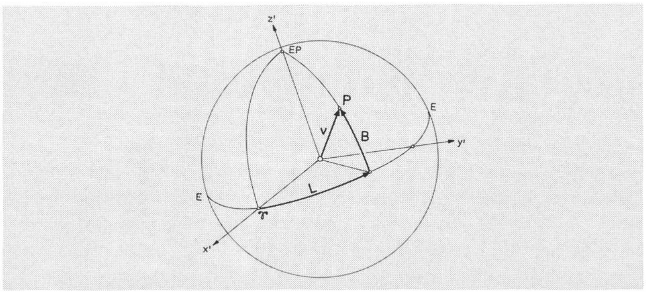


Fig. 1.n: rechtsorientiert

z'-Achse:	Richtung zum nördlichen Ekliptikpol	EP
x'-Achse:	Richtung zum Frühlingspunkt	
y'-Achse:	Schnitt $L = 90°$ mit Ekliptik-Ebene	
E-E:	Ekliptik	
$r: = v$	Entfernung vom Himmelskörper oder 1	
$\alpha: = L$	ekliptikale Länge	
$\beta: = B$	ekliptikale Breite	
$x' =$	$v \cos B \cos L$	
$y' =$	$v \cos B \sin L$	
$z' =$	$v \sin B$	

Adresse des Autors:
Prof. H. Schilt, Höheweg 5, CH-2502 Biel.

2. Koordinaten-Transformationen

H. SCHILT

Manchmal verwendet man für ein Problem mehrere Koordinatensysteme, weil sich das eine System für eine Teilaufgabe besser eignet als das andere. Man muss deshalb die Koordinaten von einem System in diejenigen des andern Systems umrechnen können. Dazu dienen Transformationsformeln.

Wir unterscheiden das Ausgangssystem vom Zielsystem. Wir nehmen an, wir kennen die Koordinaten eines geometrischen Objektes im Ausgangssystem und, auf dasselbe System bezogen, die notwendigen Grössen, um das Zielsystem festzulegen. Gesucht sind die Beziehungen, welche gestatten, aus den gegebenen Koordinaten diejenigen im Zielsystem auszurechnen.

Zuerst betrachten wir wieder ebene Systeme. Man unterscheidet zwischen Schiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen.

2.1 Schiebungen

Wir gehen vom System K aus; in diesem System hat der Ursprung $\bar{O}$ des Zielsystems $\bar{K}$ die Koordinaten $x = u$ und $y = v$. Durch diese Angabe ist das Zielsystem festgelegt, da bei Schiebungen die Achsen je parallel bleiben.

Der Punkt P hat im (Fig. 2.a)

Ausgangssystem K die Koordinaten	Zielsystem $\bar{K}$
$x = OQ$	$\bar{x} = \bar{O}\bar{Q}$
$y = QP$	$\bar{y} = \bar{Q}P$

Aus der Figur entnimmt man:

2.11

$$x - u = \bar{x}$$
$$y - v = \bar{y}$$

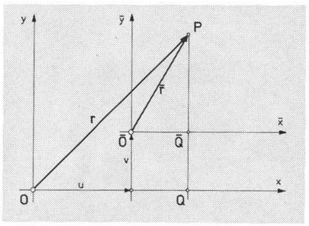


Fig. 2.a:

Beispiel:

$u = 5 \quad v = 3 \qquad 8 - 5 = 3 = \bar{x}$

$x = 8 \quad y = 8 \qquad 8 - 3 = 5 = \bar{y}$

2.2 Drehungen

Zwei gleichorientierte kartesische Koordinatensysteme mit nicht parallelen Achsen lassen sich immer durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt zur Deckung bringen; sind sie verschieden orientiert, so ist eine Spiegelung notwendig (vgl. 2.3).

Wir betrachten den speziellen Fall der gleichorientierten Systeme mit gemeinsamem Ursprung, der somit Drehpunkt ist. (Fig. 2.b)

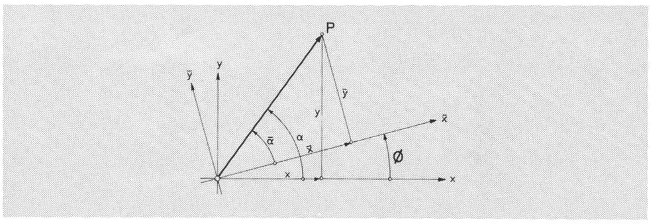


Fig. 2.b

Die Koordinaten von P sind

im System K Ausgangssystem	im System $\bar{K}$ Zielsystem
$x = r \cos \alpha$	$\bar{x} = \bar{r} \cos \bar{\alpha}$
$y = r \sin \alpha$	$\bar{y} = \bar{r} \sin \bar{\alpha}$

Bei einer Drehung von K um den Winkel Φ gilt:

2.21

$$r = \bar{r}$$
$$\alpha - \Phi = \bar{\alpha}$$

so dass

2.22

$$\bar{x} = r \cos(\alpha - \Phi)$$
$$\bar{y} = r \sin(\alpha - \Phi)$$

Man merke sich:

Phi "Φ" ist der Winkel, welcher von der x-Achse des Ausgangssystems bis zur $\bar{x}$-Achse des Zielsystems gemessen und im Sinne des Ausgangssystems gezählt wird.

Zum Rechnen mit einem Taschenrechner eignet sich folgende Anweisung: