

Die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne

Autor(en): **Hügli, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): **39 (1981)**

Heft 183

PDF erstellt am: **06.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-899360>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne¹⁾

1. Problemstellung

In vielen Astronomiebüchern findet man Daten über die neun grossen Planeten der Sonne. In populären Büchern ist eine der Kolonnen nicht selten mit «Mittlere Entfernung zur Sonne» überschrieben; die angegebenen Zahlen sind aber die Werte der grossen Bahnhälfte a der entsprechenden Planetenbahnen. Damit wird indirekt behauptet, die mittlere Entfernung eines Planeten von der Sonne sei gleich der grossen Bahnhälfte.

Ich stellte mir nun die Frage: stimmt diese Behauptung? Wenn nein: Ist die grosse Bahnhälfte einer Planetenbahn eine gute Näherung für die mittlere Entfernung zur Sonne? Wir können die Frage auch so stellen: Angenommen, wir bestimmen in regelmässigen zeitlichen Abständen die Entfernung zur Sonne und mitteln am Schluss diese Entfernungen: Ist dieser Mittelwert gleich der grossen Bahnhälfte a ? Wenn nein: wie lässt sich der Mittelwert durch die Bahnhälfte a und die numerische Exzentrizität ϵ (die beiden bestimmenden Daten einer Planetenbahn) ausdrücken? Diese Fragen zu beantworten ist das Ziel des folgenden Artikels.

2. Voraussetzungen

Wir beschränken uns auf den himmelsmechanisch einfachsten Fall, dass ein Planet die unbewegliche Sonne umläuft und in seiner Bewegung nicht durch die anderen Planeten gestört wird. Diese Bewegung wird durch die Keplerschen Gesetze beschrieben, von denen wir für unsere Zwecke nur die beiden ersten benötigen:

1. Keplersches Gesetz:

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Für den Abstand r des Planeten von der Sonne ergibt sich damit der Ausdruck²⁾:

$$r = \frac{a \cdot (1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cdot \cos v} \quad (1)$$

Es bedeuten (vgl. auch Abb. 1):

$\epsilon = \frac{e}{a}$: Numerische Exzentrizität der Ellipse

a : Grosse Halbachse der Ellipse

v : Wahre Anomalie, d.h. Winkel zur Perihelrichtung

Die wahre Anomalie v ist eine zeitabhängige Grösse. Den Zusammenhang zwischen v und der Zeit t gibt die Kepler-Gleichung (2)³⁾:

$$E - \epsilon \cdot \sin E = \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad (2)$$

und:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (3)$$

Einen anderen Zusammenhang zwischen v und t zeigt das

2. Keplersche Gesetz:

Der Radiusvektor von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Formelmässig ausgedrückt⁴⁾:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{dv}{dt} = C = \text{konst} \quad (4)$$

Dabei bezeichnen wir mit

$$\frac{dA}{dt} = C$$

die sog. Flächengeschwindigkeit, d.h. die vom Radiusvektor pro Zeiteinheit überstrichene Fläche.

3. Beantwortung der Fragen

Mit den erwähnten Voraussetzungen ist es nun möglich, die eingangs gestellten Fragen zu beantworten.

Der Mittelwert $\langle r \rangle$ von r über eine Periode T berechnet sich:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a \cdot (1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cdot \cos v} \cdot dt \quad (5)$$

Das Ergebnis dieser Integration lautet (für Details vgl. Anhang):

$$\langle r \rangle = a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \epsilon^2 \right) \quad (6)$$

Wir sehen daraus, dass die mittlere Entfernung der Planeten zur Sonne nicht gleich der grossen Bahnhälfte a ist, sondern etwas grösser. Da aber die numerische Exzentrizität ϵ der neun grossen Planeten klein ist (d.h. dass die Bahnen praktisch exzentrische Kreise sind), ist der Unterschied zwischen der mittleren Entfernung $\langle r \rangle$ der Planeten zur Sonne und ihrer grossen Bahnhälfte a nur klein, was durch die Rechnung bestätigt wird:

Planet	a in AE	ε	Perihel- distanz q in AE	Apheldistanz Q in AE	⟨r⟩ in AE	$\bar{r} = b$ in AE
Merkur	0.387	0.206	0.307	0.467	0.395	0.379
Venus	0.723	0.007	0.718	0.728	0.723	0.723
Erde	1.000	0.017	0.983	1.017	1.000	1.000
Mars	1.524	0.093	1.382	1.666	1.531	1.517
Jupiter	5.203	0.048	4.953	5.453	5.209	5.197
Saturn	9.546	0.056	9.011	10.081	9.561	9.531
Uranus	19.20	0.046	18.317	20.083	19.220	19.180
Neptun	30.09	0.009	29.819	30.361	30.091	30.09
Pluto	39.52	0.249	29.680	49.360	40.745	38.275

Tabelle 1: Bahnelemente und mittlere Entfernung der neun grossen Planeten (Daten nach: K. SCHAIFERS und G. TRAVING, Meyers Handbuch über das Weltall, BI Mannheim).

Anders verhält es sich, wenn die numerische Exzentrizität gross wird, d.h. wenn die Bahnen langgestreckte Ellipsen sind. Solche Bahnen kommen bei Kometen vor. Bei diesen Bahnen sind grosse Unterschiede zwischen der mittleren Entfernung und der grossen Halbachse zu erwarten, was durch Rechnungen bestätigt wird:

Komet	a in AE	ε	Perihel- distanz q in AE	Apheldistanz Q in AE	<r> in AE	$\bar{r} = b$ in AE
Whipple	3.819	0.353	2.471	5.167	4.057	3.573
Reinmuth 2	3.558	0.457	1.932	5.184	3.930	3.165
Temple 2	3.024	0.549	1.364	4.684	3.480	2.528
Temple- Swift	3.185	0.638	1.153	5.217	3.833	2.453
Biela	3.525	0.756	0.860	6.190	4.532	2.307
Tuttle	5.709	0.821	1.022	10.396	7.633	3.259
Halley	17.788	0.967	0.587	34.989	26.105	4.532

Tabelle 2: Bahnelemente einiger ausgewählter Kometen (Quelle vgl. Tab. 1).

Richtigerweise fehlt denn auch in Tabellen über Bahn-daten von Kometen die Spaltenüberschrift «Mittlere Entfernung zur Sonne».

Zusammenfassend darf gesagt werden, dass die grosse Bahnhalbachse im Falle der neun grossen Planeten einen recht guten Näherungswert für ihre mittlere Entfernung zur Sonne liefert.

Abschliessend sei erwähnt, dass die Entfernung auch über die wahre Anomalie gemittelt werden kann. Der so erhaltene Mittelwert \bar{r} hat den Wert⁵⁾:

$$\bar{r} = b = a \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (7)$$

Mittelt man die Entfernung aber über eine Periode der exzentrischen Anomalie E , so erhält man mit⁶⁾

$$r = a \cdot (1 - \epsilon \cdot \cos E) \quad (8)$$

den Mittelwert

$$r_m = a \quad (9)$$

Von den drei erwähnten Mittelwerten ist aber gerade der letzte derjenige, der am wenigsten praktische Bedeutung hat, ist doch die exzentrische Anomalie eine rein rechnerische Hilfsgrösse, die in der Natur nicht beobachtet werden kann.

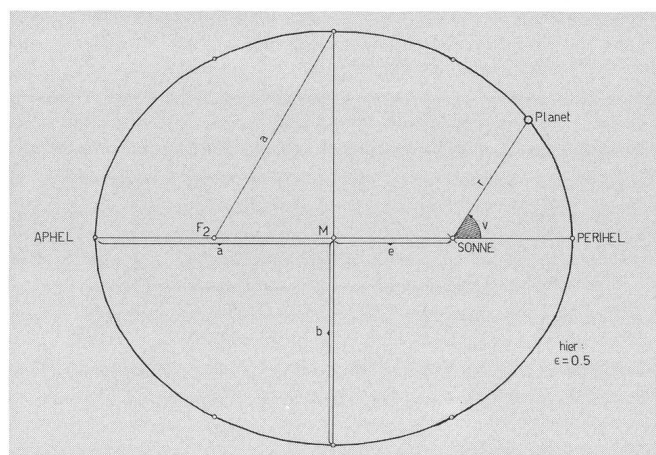


Abb. 1: Grössen einer Bahnellipse eines Planeten.

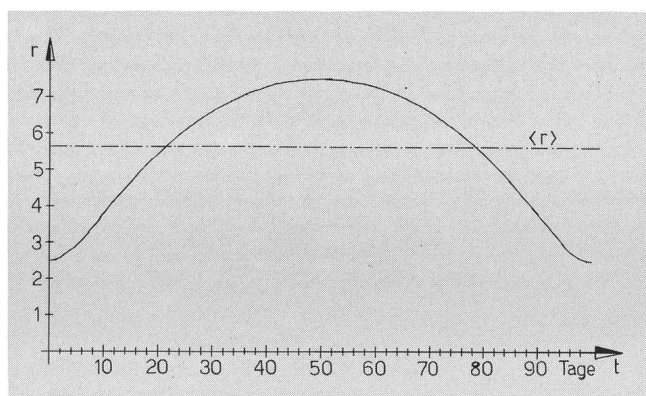
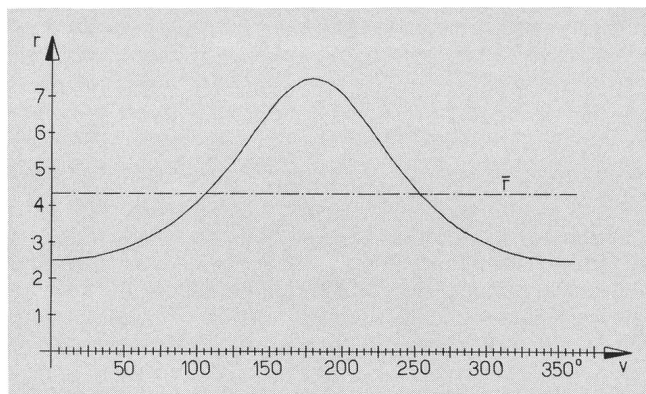


Abb. 2: Für einen fiktiven Planeten in einem fiktiven Planetensystem (Daten: $a = 5$ Planetare Einheiten, $\epsilon = 0.5$, Umlaufzeit $T = 100$ Tage) ist die Entfernung zum Zentralkörper gegeben, und zwar oben als Funktion der wahren Anomalie v , unten als Funktion der Zeit t . Ebenfalls eingezeichnet sind die beiden Mittelwerte $\langle r \rangle$ und \bar{r} [vgl. Formeln (6) und (7)].

Ich möchte an dieser Stelle Fr. R. KEHRLI, Bern, herzlich danken, die die Arbeit sorgfältig durchgelesen und sprachlich verbessert hat. Ebenfalls danken möchte ich Hr. H. ROTH, Olten, der die Arbeit in ihrer ganzen Entstehungsphase durch wohlwollende Kritik entscheidend gefördert hat.

Anhang: Zum Beweis der Formel (6):

Es ist das Integral (5)

$$\langle r \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r \cdot dt$$

zu berechnen. Mittels (1) und (4) schreiben wir dieses Integral über die Zeit in ein Integral über die wahre Anomalie um:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{2TC} \int_0^{2\pi} r^3 \cdot dv = \frac{a^2 \cdot (1 - \epsilon^2)^3}{2\pi b} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \epsilon \cdot \cos v)^3} \cdot dv$$

Dieses letzte Integral lässt sich nun leicht berechnen: sei

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k + \epsilon \cdot \cos v} \cdot dv$$

dann ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cdot \cos v)^3} \cdot dv = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dk^2} \cdot I \Big|_{k=1}$$

I ist nun aber ein Integral, das sich einfach berechnen lässt (z.B. mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie):

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}$$

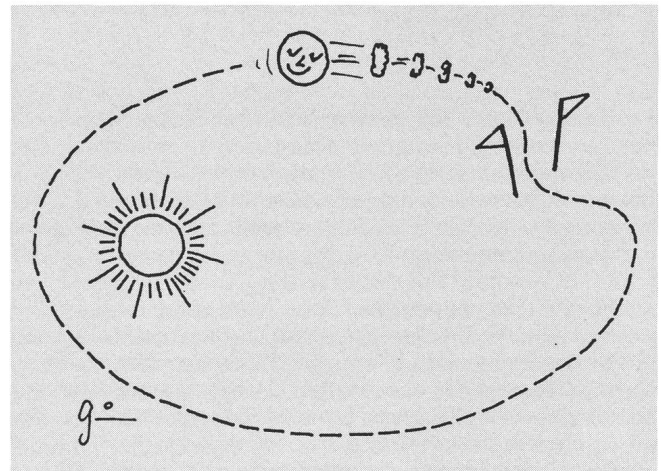
Damit folgt nach einigen weiteren Umformungen das behauptete Resultat.

Anmerkungen:

- 1) Dieser Artikel entstand nach einem Vortrag, den der Verfasser am 11. Januar 1980 im Seminar für Theoretische Physik an der Universität Bern gehalten hat.
- 2) Zur Herleitung dieser Formel vgl. ein Buch über Ellipsengeometrie.
- 3), 4) Zur Herleitung dieser Formeln vgl. ein Buch über Himmelsmechanik, z.B. W. M. SMART, Text-Book on Spherical Astronomy, Cambridge University Press, 1971; vgl auch R. A. GUBSER, Die Berechnung der Ephemeriden . . . , ORION 36 (1978), p. 103–110.
- 5) Denn $\bar{r} = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{2\pi} \cdot I \Big|_{k=1}$
wo I das im Anhang gegebene Integral ist. Mit dem dort angegebenen Resultat für I folgt die Behauptung vgl. 3).
- 6)

Adresse des Verfassers:

Ernst Hügli, Zelgstrasse 29, 3027 Bern.



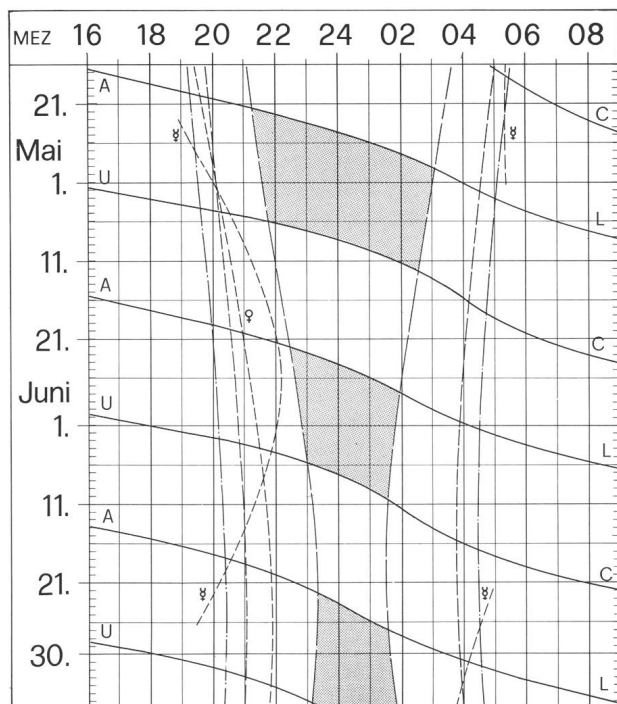
Das 4. Keplersche Gesetz

Sicher nicht!

Für die Bewohner von Cheyenne im amerikanischen Staat Wyoming war die Sonne am 26. Februar 1979 im Maximum zu 90% verdeckt. Die Astronomen warnten die vielen Beobachter davor, während der Finsternis mit ungeschützten Augen in die Sonne zu schauen. Eine Dame, die sich sehr um die Sicherheit ihrer Augen kümmerte, war froh, dass die Finsternis zu Ende ging. Aber um wirklich sicher zu sein, fragte sie: «Nun, da die Finsternis vorbei ist, darf ich jetzt wieder in die Sonne schauen?» (Frei übersetzt aus «Griffith Observer»).

Sonne, Mond und innere Planeten

Soleil, Lune et planètes intérieures



Aus dieser Grafik können Auf- und Untergangszeiten von Sonne, Mond, Merkur und Venus abgelesen werden.

Die Daten am linken Rand gelten für die Zeiten vor Mitternacht. Auf derselben waagrechten Linie ist nach 00 Uhr der Beginn des nächsten Tages aufgezeichnet. Die Zeiten (MEZ) gelten für 47° nördl. Breite und 8°30' östl. Länge.

Bei Beginn der bürgerlichen Dämmerung am Abend sind erst die hellsten Sterne — bestenfalls bis etwa 2. Grösse — von blossen Auge sichtbar. Nur zwischen Ende und Beginn der astronomischen Dämmerung wird der Himmel von der Sonne nicht mehr aufgehellt.

Les heures du lever et du coucher du soleil, de la lune, de Mercure et de Vénus peuvent être lues directement du graphique.

Les dates indiquées au bord gauche sont valables pour les heures avant minuit. Sur la même ligne horizontale est indiqué, après minuit, le début du prochain jour. Les heures indiquées (HEC) sont valables pour 47° de latitude nord et 8°30' de longitude est.

Au début du crépuscule civil, le soir, les premières étoiles claires — dans le meilleur des cas jusqu'à la magnitude 2 — sont visibles à l'œil nu. C'est seulement entre le début et la fin du crépuscule astronomique que le ciel n'est plus éclairé par le soleil.

- — — — — Sonnenaufgang und Sonnenuntergang
Lever et coucher du soleil
- - - - - Bürgerliche Dämmerung (Sonnenhöhe —6°)
Crépuscule civil (hauteur du soleil —6°)
- — — — — Astronomische Dämmerung (Sonnenhöhe —18°)
Crépuscule astronomique (hauteur du soleil —18°)
- A — L Mondaufgang / Lever de la lune
- U — C Monduntergang / Coucher de la lune
- Kein Mondschein, Himmel vollständig dunkel
Pas de clair de lune, ciel totalement sombre