Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 39 (1981)
Heft: 183

Artikel: Die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne
Autor: Hügli, Ernst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899360

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne[1)]

ERNST HÜGLI

1. Problemstellung

In vielen Astronomiebüchern findet man Daten über die neun grossen Planeten der Sonne. In populären Büchern ist eine der Kolonnen nicht selten mit «Mittlere Entfernung zur Sonne» überschrieben; die angegebenen Zahlen sind aber die Werte der grossen Bahnhalbachse a der entsprechenden Planetenbahnen. Damit wird indirekt behauptet, die mittlere Entfernung eines Planeten von der Sonne sei gleich der grossen Bahnhalbachse.

Ich stellte mir nun die Frage: stimmt diese Behauptung? Wenn nein: Ist die grosse Bahnhalbachse einer Planetenbahn eine gute Näherung für die mittlere Entfernung zur Sonne? Wir können die Frage auch so stellen: Angenommen, wir bestimmen in regelmässigen zeitlichen Abständen die Entfernung zur Sonne und mitteln am Schluss diese Entfernungen: Ist dieser Mittelwert gleich der grossen Bahnhalbachse a? Wenn nein: wie lässt sich der Mittelwert durch die Bahnhalbachse a und die numerische Exzentrizität ε (die beiden bestimmenden Daten einer Planetenbahn) ausdrücken? Diese Fragen zu beantworten ist das Ziel des folgenden Artikels.

2. Voraussetzungen

Wir beschränken uns auf den himmelsmechanisch einfachsten Fall, dass ein Planet die unbewegliche Sonne umläuft und in seiner Bewegung nicht durch die anderen Planeten gestört wird. Diese Bewegung wird durch die Keplerschen Gesetze beschrieben, von denen wir für unsere Zwecke nur die beiden ersten benötigen:

1. Keplersches Gesetz:

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Für den Abstand r des Planeten von der Sonne ergibt sich damit der Ausdruck [2)]:

$$r = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos v} \qquad (1)$$

Es bedeuten (vgl. auch Abb. 1):

$\varepsilon = \frac{e}{a}$: Numerische Exzentrizität der Ellipse

a: Grosse Halbachse der Ellipse

v: Wahre Anomalie, d.h. Winkel zur Perihelrichtung

Die wahre Anomalie v ist eine zeitabhängige Grösse. Den Zusammenhang zwischen v und der Zeit t gibt die Kepler-Gleichung (2) [3)]:

$$E - \varepsilon \cdot \sin E = \frac{2\pi}{T} \cdot t \qquad (2)$$

und:

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot tg\,\frac{E}{2} \qquad (3)$$

Einen anderen Zusammenhang zwischen v und t zeigt das

2. Keplersche Gesetz:

Der Radiusvektor von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Formelmässig ausgedrückt [4)]:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{dv}{dt} = C = konst \qquad (4)$$

Dabei bezeichnen wir mit

$$\frac{dA}{dt} = C$$

die sog. Flächengeschwindigkeit, d.h. die vom Radiusvektor pro Zeiteinheit überstrichene Fläche.

3. Beantwortung der Fragen

Mit den erwähnten Voraussetzungen ist es nun möglich, die eingangs gestellten Fragen zu beantworten.

Der Mittelwert $\langle r \rangle$ von r über eine Periode T berechnet sich:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos v} \cdot dt \qquad (5)$$

Das Ergebnis dieser Integration lautet (für Details vgl. Anhang):

$$\langle r \rangle = a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2\right) \qquad (6)$$

Wir sehen daraus, dass die mittlere Entfernung der Planeten zur Sonne nicht gleich der grossen Bahnhalbachse a ist, sondern etwas grösser. Da aber die numerische Exzentrizität ε der neun grossen Planeten klein ist (d.h. dass die Bahnen praktisch exzentrische Kreise sind), ist der Unterschied zwischen der mittleren Entfernung $\langle r \rangle$ der Planeten zur Sonne und ihrer grossen Bahnhalbachse a nur klein, was durch die Rechnung bestätigt wird:

Planet	a in AE	ε	Perihel-distanz q in AE	Apheldistanz Q in AE	<r> in AE	$\bar{r}$ = b in AE
Merkur	0.387	0.206	0.307	0.467	0.395	0.379
Venus	0.723	0.007	0.718	0.728	0.723	0.723
Erde	1.000	0.017	0.983	1.017	1.000	1.000
Mars	1.524	0.093	1.382	1.666	1.531	1.517
Jupiter	5.203	0.048	4.953	5.453	5.209	5.197
Saturn	9.546	0.056	9.011	10.081	9.561	9.531
Uranus	19.20	0.046	18.317	20.083	19.220	19.180
Neptun	30.09	0.009	29.819	30.361	30.091	30.09
Pluto	39.52	0.249	29.680	49.360	40.745	38.275

Tabelle 1: Bahnelemente und mittlere Entfernung der neun grossen Planeten (Daten nach: K. SCHAIFERS und G. TRAVING, Meyers Handbuch über das Weltall, BI Mannheim).

Anders verhält es sich, wenn die numerische Exzentrizität gross wird, d.h. wenn die Bahnen langgestreckte Ellipsen sind. Solche Bahnen kommen bei Kometen vor. Bei diesen Bahnen sind grosse Unterschiede zwischen der mittleren Entfernung und der grossen Halbachse zu erwarten, was durch Rechnungen bestätigt wird:

Komet	a in AE	ε	Perihel-distanz q in AE	Apheldistanz Q in AE	<r> in AE	$\bar{r}$ = b in AE
Whipple	3.819	0.353	2.471	5.167	4.057	3.573
Reinmuth 2	3.558	0.457	1.932	5.184	3.930	3.165
Temple 2	3.024	0.549	1.364	4.684	3.480	2.528
Temple-Swift	3.185	0.638	1.153	5.217	3.833	2.453
Biela	3.525	0.756	0.860	6.190	4.532	2.307
Tuttle	5.709	0.821	1.022	10.396	7.633	3.259
Halley	17.788	0.967	0.587	34.989	26.105	4.532

Tabelle 2: Bahnelemente einiger ausgewählter Kometen (Quelle vgl. Tab. 1).

Richtigerweise fehlt denn auch in Tabellen über Bahndaten von Kometen die Spaltenüberschrift «Mittlere Entfernung zur Sonne».

Zusammenfassend darf gesagt werden, dass die grosse Bahnhalbachse im Falle der neun grossen Planeten einen recht guten Näherungswert für ihre mittlere Entfernung zur Sonne liefert.

Abschliessend sei erwähnt, dass die Entfernung auch über die wahre Anomalie gemittelt werden kann. Der so erhaltene Mittelwert $\bar{r}$ hat den Wert [5]):

$$\bar{r} = b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tag{7}$$

Mittelt man die Entfernung aber über eine Periode der exzentrischen Anomalie E, so erhält man mit [6])

$$r = a \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos E) \tag{8}$$

den Mittelwert

$$r_m = a \tag{9}$$

Von den drei erwähnten Mittelwerten ist aber gerade der letzte derjenige, der am wenigsten praktische Bedeutung hat, ist doch die exzentrische Anomalie eine rein rechnerische Hilfsgrösse, die in der Natur nicht beobachtet werden kann.

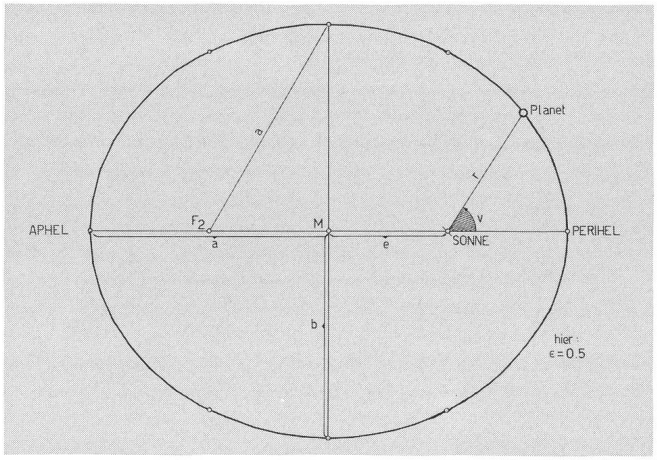
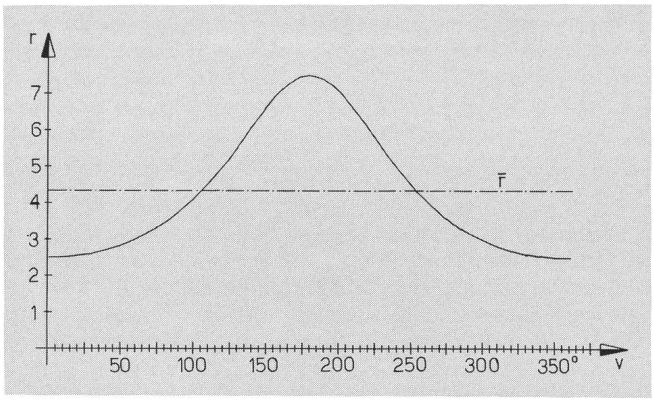


Abb. 1: Grössen einer Bahnellipse eines Planeten.



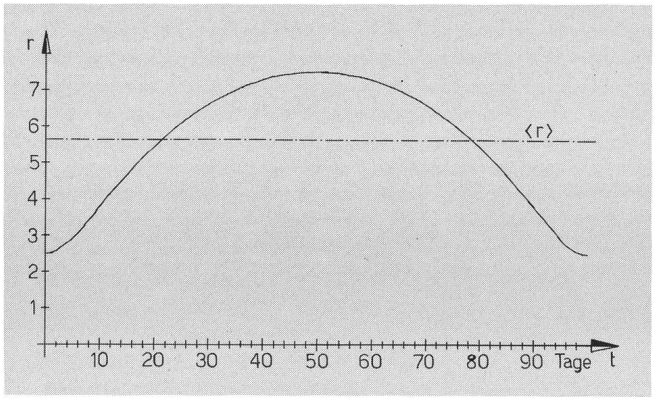


Abb. 2: Für einen fiktiven Planeten in einem fiktiven Planetensystem (Daten: a = 5 Planetare Einheiten, ε = 0.5, Umlaufzeit T = 100 Tage) ist die Entfernung zum Zentralkörper gegeben, und zwar oben als Funktion der wahren Anomalie v, unten als Funktion der Zeit t. Ebenfalls eingezeichnet sind die beiden Mittelwerte <r> und $\bar{r}$ [vgl. Formeln (6) und (7)].

Ich möchte an dieser Stelle Frl. R. KEHRLI, Bern, herzlich danken, die die Arbeit sorgfältig durchgelesen und sprachlich verbessert hat. Ebenfalls danken möchte ich Hr. H. ROTH, Olten, der die Arbeit in ihrer ganzen Entstehungsphase durch wohlwollende Kritik entscheidend gefördert hat.

Anhang: Zum Beweis der Formel (6):
Es ist das Integral (5)

$$\langle r \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r \cdot dt$$

zu berechnen. Mittels (1) und (4) schreiben wir dieses Integral über die Zeit in ein Integral über die wahre Anomalie um:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{2TC} \int_0^{2\pi} r^3 \cdot dv = \frac{a^2 \cdot (1 - \varepsilon^2)^3}{2\pi b} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cdot \cos v)^3} \cdot dv$$

Dieses letzte Integral lässt sich nun leicht berechnen: sei

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k + \varepsilon \cdot \cos v} \cdot dv$$

dann ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\varepsilon\cdot\cos v)^3}\cdot dv = \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dk^2}\cdot I\,|\,k=1$$

I ist nun aber ein Integral, das sich einfach berechnen lässt (z.B. mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie):

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-\varepsilon^2}}$$

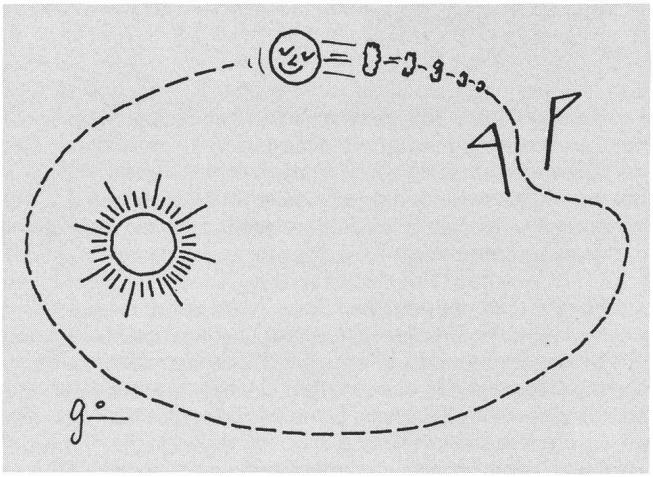
Damit folgt nach einigen weiteren Umformungen das behauptete Resultat.

Anmerkungen:

1) Dieser Artikel entstand nach einem Vortrag, den der Verfasser am 11. Januar 1980 im Seminar für Theoretische Physik an der Universität Bern gehalten hat.
2) Zur Herleitung dieser Formel vgl. ein Buch über Ellipsengeometrie.
3), 4) Zur Herleitung dieser Formeln vgl. ein Buch über Himmelsmechanik, z.B. W. M. Smart, Text-Book on Spherical Astronomy, Cambridge University Press, 1971; vgl auch R. A. Gubser, Die Berechnung der Ephemeriden ..., ORION *36* (1978), p. 103–110.
5) Denn $\bar{r} = \frac{a\cdot(1-\varepsilon^2)}{2\pi}\cdot I\,|\,k=1$

wo I das im Anhang gegebene Integral ist. Mit dem dort angegebenen Resultat für I folgt die Behauptung
6) vgl. 3).

Adresse des Verfassers:
Ernst Hügli, Zelgstrasse 29, 3027 Bern.

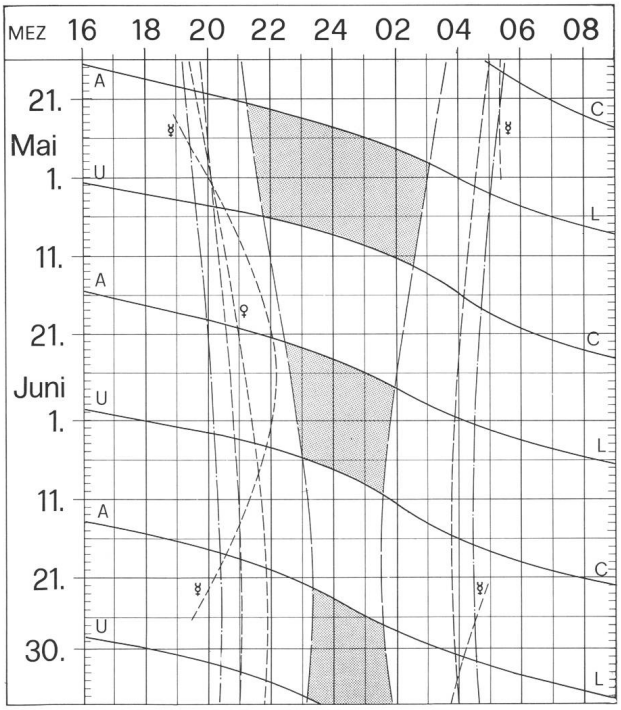


Das 4. Keplersche Gesetz

Sicher nicht!

Für die Bewohner von Cheyenne im amerikanischen Staat Wyoming war die Sonne am 26. Februar 1979 im Maximum zu 90% verdeckt. Die Astronomen warnten die vielen Beobachter davor, während der Finsternis mit ungeschützten Augen in die Sonne zu schauen. Eine Dame, die sich sehr um die Sicherheit ihrer Augen kümmerte, war froh, dass die Finsternis zu Ende ging. Aber um wirklich sicher zu sein, fragte sie: «Nun, da die Finsternis vorbei ist, darf ich jetzt wieder in die Sonne schauen?»
(Frei übersetzt aus «Griffith Observer»).

Sonne, Mond und innere Planeten



Soleil, Lune et planètes intérieures

Aus dieser Grafik können Auf- und Untergangszeiten von Sonne, Mond, Merkur und Venus abgelesen werden.

Die Daten am linken Rand gelten für die Zeiten vor Mitternacht. Auf derselben waagrechten Linie ist nach 00 Uhr der Beginn des nächsten Tages aufgezeichnet. Die Zeiten (MEZ) gelten für 47° nördl. Breite und 8°30′ östl. Länge.

Bei Beginn der bürgerlichen Dämmerung am Abend sind erst die hellsten Sterne — bestenfalls bis etwa 2. Grösse — von blossem Auge sichtbar. Nur zwischen Ende und Beginn der astronomischen Dämmerung wird der Himmel von der Sonne nicht mehr aufgehellt.

Les heures du lever et du coucher du soleil, de la lune, de Mercure et de Vénus peuvent être lues directement du graphique.

Les dates indiquées au bord gauche sont valables pour les heures avant minuit. Sur la même ligne horizontale est indiqué, après minuit, le début du prochain jour. Les heures indiquées (HEC) sont valables pour 47° de latitude nord et 8°30′ de longitude est.

Au début du crépuscule civil, le soir, les premières étoiles claires — dans le meilleur des cas jusqu'à la magnitude 2 — sont visibles à l'œil nu. C'est seulement entre le début et la fin du crépuscule astronomique que le ciel n'est plus éclairé par le soleil.

Sonnenaufgang und Sonnenuntergang
Lever et coucher du soleil
Bürgerliche Dämmerung (Sonnenhöhe —6°)
Crépuscule civil (hauteur du soleil —6°)
Astronomische Dämmerung (Sonnenhöhe —18°)
Crépuscule astronomique (hauteur du soleil —18°)

A L — Mondaufgang / Lever de la lune
U C — Monduntergang / Coucher de la lune

Kein Mondschein, Himmel vollständig dunkel
Pas de clair de lune, ciel totalement sombre