

# Von der Mathematik zu faszinierenden Luftspiegelungen : ist von Island aus Grönland sichtbar?

Autor(en): **Laager, Erich**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen  
Gesellschaft**

Band (Jahr): **72 (2014)**

Heft 384

PDF erstellt am: **31.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-897438>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Von der Mathematik zu faszinierenden Luftspiegelungen

## Ist von Island aus Grönland sichtbar?

■ Von Erich Laager

*Im Westen Islands hat man von einem hohen Felsenplateau aus einen wunderschönen Blick auf das Meer Richtung Grönland. Man erahnt die 300 bis 400 km entfernten eisigen Gipfel nur. Kann man sie wirklich nicht sehen? Mit Hilfe von Berechnungen, mit Berichten aus Island und mit wissenschaftlichen Beiträgen versuchen wir, diese Frage zu beantworten. Im Haupttext wird auf Rechnungsbeispiele verzichtet. Diese findet man jedoch im Abschnitt «Mathematisches Werkzeug».*

Kürzlich erreichte ORION die folgende Frage: Sieht man von Islands nordwestlichen Fjorden hinüber zur grönländischen Blossville Kyst? 289 km sind es. Die Mathematiker sagen nein, der Volksmund sagt ja.

Rein mathematisch ist es nicht möglich wegen der Erdkrümmung (trotz hoher Gipfel auf grönländischer Seite) und die Atmosphäre streue das Licht zu stark. Trotzdem räumen die Mathematiker ein, dass unter gewissen atmosphärischen Bedingungen es vielleicht möglich sein könnte. – Das Licht kann recht verwinkelt daherkommen, ich finde das spannend.

### Wer kann helfen bei der Suche nach einer Antwort?

Ich war bereit, mich dieser Frage anzunehmen, weil ich zufällig einige «gute Geister» kenne, die ich zu Hilfe rufen konnte:

■ In der Zentralbibliothek Zürich, Abteilung Karten und Panoramen, lagern tausende von Karten aus aller Welt im unterirdischen Archiv. MARKUS OEHRLI (ein ehemaliger Schüler von mir) suchte dort für mich «geeignete Gipfel» auf Island und auf Grönland heraus.

■ DANIEL JOSI (ebenfalls ehemaliger Schüler und ebenfalls Kartograf) gab mir einige wichtige Hinweise und schuf für mich bei

Swisstopo in Wabern die nötigen Kontakte für genauere Auskünfte.

■ MARIANNE WITTWER, eine frühere Kollegin, ist seit Jahren Reiseleiterin auf Island. Sie konnte sich dort umhören und mir Rückmeldungen geben.

Am 11. Juli erhielt ich aus Island eine erste Antwort von MARIANNE WITTWER: *«Ein zuverlässiger Isländer verneint die Frage. Es scheint also nicht möglich zu sein. Aber ich bin diesen Sommer öfters in den Westfjorden und werde mich noch etwas umhören. Ich melde mich, falls ich ein verlässliches Ja erhalten würde.»*

### Die Berechnungen

Unterdessen hatte ich Zeit, der Frage nachzugehen, wie die Mathematiker zu einem Nein kommen. Ich wollte die Berechnungen selber nachvollziehen.

Für Island kannte ich von drei Gipfeln die Höhe (zwischen 793 und 968 m) und deren geogr. Länge und Breite. Für Grönland waren es fünf Berge mit Höhen von 2067 bis 3700 m.

MARKUS OEHRLI schrieb dazu, dass es für Island vernünftige Karten gebe. *«Aber ausgerechnet der in Frage kommende Teil Grönlands ist kaum kartiert, das Genauste bei uns ist die Operational Navigation Chart ONC 1:1 Million. Ein Ver-*

*merk darauf warnt aber, die Lagegenauigkeit betrage 6 nautische Meilen ...»* Eine erste Beurteilung von OEHRLI: *«Die kürzeste Strecke am Boden von Küste zu Küste ist gut 289 km. Mit obigen Angaben kannst du recht viele verschiedene Verbindungen ausprobieren. Nach Google messen die Distanzen zu höheren Erhebungen an der Blossville-Küste um die 350 km, zu den noch höheren Watkins-Bergen etwa 450 km. Ich bin gespannt, was deine Berechnungen ergeben, aber nach Gefühl würde ich auch sagen, dass man von keinem Punkt auf Island wirklich nach Grönland sehen kann.»*

Für alle 15 Kombinationsmöglichkeiten habe ich die Verhältnisse folgendermassen berechnet:

1. Abstand der beiden Gipfel mit Hilfe des sphärischen Dreiecks (Abb. 1). Im Internet findet man dazu ein äusserst praktisches Berechnungsformular (Rechner für sphärische Dreiecke von ARNDT BRÜNNER). Diesem habe ich die nötige Formel entnommen.

Mit der geographischen Länge und Breite der Orte A und B kennt man im Dreieck 2 Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Der Rechner liefert u. a. die dritte Seite, d. h. die Distanz von A zu B. Diese Distanz ist ein Sektor des Grosskreises auf Meereshöhe, welcher durch A und B geht.

Die Berechnung ist zuverlässiger als das Messen von Distanzen auf einer Karte, da diese möglicherweise nicht längentreu ist.

2. Ist Sichtverbindung von A zu B möglich? Zur Beantwortung dieser Frage wählte ich zwei verschiedene Wege:

a) Gemäss Abb. 2 oben. Wie weit sieht man von den beiden Gipfeln auf das Meer hinaus? Ist die Summe dieser beiden Distanzen kleiner als der Abstand von A zu B, dann gibt es keine Sichtverbindung.

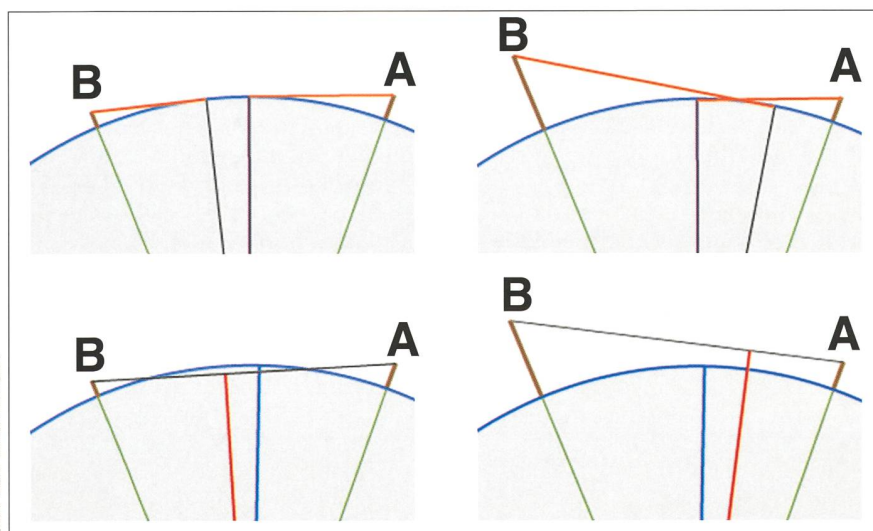
b) Gemäss Abb. 2 unten. Man denke sich eine Verbindungsstrecke vom einen Berggipfel zum andern. Zuerst wird die Länge dieser Strecke berechnet, anschliessend die Länge des Lotes (rot) vom Erdzentrum aus auf die Verbindungsstrecke. Die Sichtverbindung ist nur möglich, wenn die Länge dieses Lotes grösser ist als der Erdradius (blau).





GRAFIK: THOMAS BAER, ORION NACH VORLAGE ERICH LÄGER

Abbildung 1: Sphärisches Dreieck (Kugeldreieck) zum Berechnen der Distanz von Island nach Grönland. Die geogr. Koordinaten der Punkte an den Küsten liefern zwei Dreieckseiten, die vom Nordpol aus gehen und den zwischen ihnen liegenden Winkel. Daraus lässt sich die dritte Seite berechnen. Dies ist die gesuchte Distanz.



GRAFIKEN: ERICH LÄGER

Sämtliche Resultate zeigten, dass man von Island aus Grönland nicht sieht.

Nun stand aber mein mathematisches Werkzeug in Form von gut dokumentierten Excel-Tabellen bereit und ich konnte damit etwas spielen.

Beispiel 1: Der kürzeste Abstand von Islands zu Grönlands Küste misst 284,3 km. Wie hoch müssten dort die Küsten sein, damit man «hinüber sieht»? Bei 1590 m Höhe auf beiden Seiten würde es knapp reichen! Das Lot auf die Verbindungsstrecke wäre dann 4 m länger als der Erdradius. Von beiden Gipfeln könnte man 142,3 km weit auf das Meer hinaus sehen.

Beispiel 2: Wir blicken von Islands 625 m hohen Felsplateau Bolafjall zu Grönlands höchstem Gipfel von 3700 m Höhe (Abb. 3). Man müsste über Islands Klippe mit einem Ballon auf 2200 m Höhe steigen, damit man Grönlands Berg sieht.

Zusammengefasst: Die erste Antwort der Mathematik ist klar und eindeutig: «Nein, es gibt keine Sichtverbindung.»

Damit ist unsere Frage jedoch noch nicht endgültig beantwortet!

### Lichtbrechung und Luftspiegelungen

Es bleiben die «wundersamen Wege der Lichtstrahlen», welche zu Überraschungen führen können: Refraktion (Brechung) und Reflexion (Spiegelung) in der Atmosphäre. Den Effekt der Refraktion kennen wir von der Sonne, die bei Auf- und Untergang scheinbar angehoben wird, am mathematischen Horizont um etwa 36 Bogenminuten. Der mittlere scheinbare Sonnenradius misst 16 Winkelminuten. Das heißt: Der obere Sonnenrand für einen Beobachter am Meeresstrand dann am Horizont, wenn die berechnete Höhe der Sonne -52 Bogenmi-

Abbildung 2: Figuren oben: Blick von der Bergspitze auf das Meer. Der Berührungspunkt der Tangenten zeigt, wie weit man sieht.

Figuren unten: Ein Lot (rot) auf die Verbindungsstrecke zwischen den Berggipfeln errichten. Die Länge des Lotes mit dem Erdradius vergleichen. Figuren links: Eine Sichtverbindung ist nicht möglich. Figuren rechts: Eine Sichtverbindung ist möglich.



nuten beträgt, die Sonnenmitte also fast  $1^\circ$  unter dem Horizont steht. In gleicher Art werden nun ferne Berggipfel durch die terrestrische Refraktion angehoben.

Könnte das ausreichen für ein «erfolgreiches Hinübersehen»?

Die Topografen rechnen nach folgender Methode, welche die Erdkrümmung gleich mit einbezieht (Abb. 5 im Abschnitt «Mathematisches Werkzeug», S. 14/15, Figur B): A Ort des Beobachters, B hier ist ein benachbarter Berggipfel auf der gekrümmten Erdoberfläche.

B1 hier würde dieser Berggipfel erscheinen, wenn die Erde eben wäre. Wegen der Erdkrümmung sehen wir den Berg B um den Winkel  $e$  tiefer. Der «Sehstrahl» wird durch die Refraktion abgelenkt, er nimmt den gekrümmten Verlauf. Dadurch erscheint der Gipfel B um den Winkel  $r$  angehoben.

Tatsächlich erscheint der Berg  $e - r$  (Grad) tiefer als auf einer «ebenen Erde».

Für die Berechnung der Refraktion wird ein Brechungskoeffizient von 0.13 verwendet. Dies bedeutet, dass die Krümmung eines Lichtstrahls durch die Refraktion rund 13 % der Erdkrümmung beträgt. Diese Zahl wurde aus vielen Messungen als durchschnittlicher Erfahrungswert ermittelt. Sie wird seit 200 Jahren für die Reduktion der meisten geodätischen Höhenmessungen verwendet. (Nach Wikipedia.)

Abb. 4 zeigt die Wirkung von Erdkrümmung und Refraktion beim Blick in die Ferne. Der bekannte Schweizer Kartograf Prof. EDUARD IMHOF hat diese Zeichnung in seinem Buch «Gelände und Karte» auf S. 119 als Beispiel publiziert.

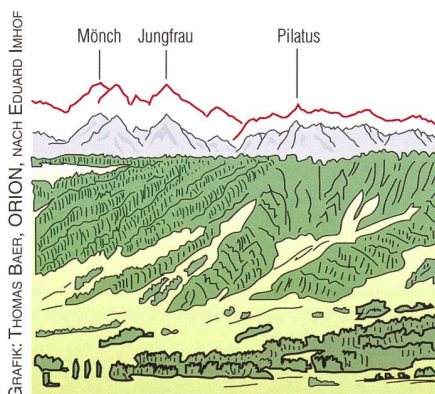


Abbildung 4: Jungfraugruppe, Pilatus und Albiskette vom Zürichberg aus gesehen. Ohne Erdkrümmung und Refraktion erschiene die ferne Gebirgssilhouette in der Höhe der roten Linie.

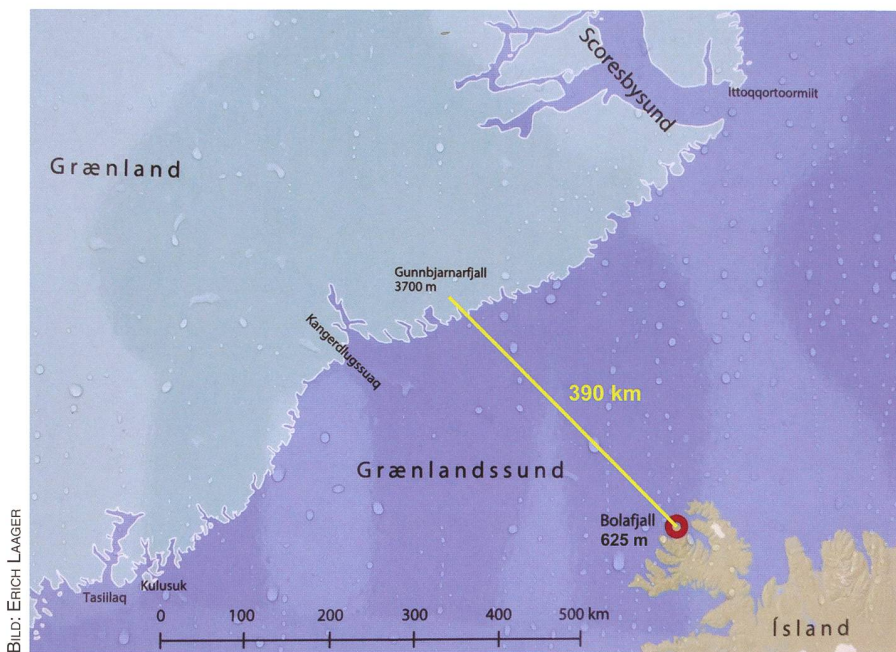


Abbildung 3: Ausschnitt aus der fotografierten Orientierungstafel auf dem Bolafjall, offenbar bei Regen aufgenommen. Die genaue Höhe und die präzisen geographischen Koordinaten des Gipfels auf Grönland konnten nicht eruiert werden. Die Distanz wird im günstigsten Fall etwa 390 km betragen.

**Zwischenbemerkung:** Mit dem Computerprogramm «Atlas der Schweiz» lassen sich für beliebige Orte in der Schweiz sehr schöne Panoramen generieren. Diese stimmen erstaunlich gut mit der wirklichen Aussicht (d. h. mit Fotos) überein. Auch hier sind bei den aufwändigen Rechnungen Erdkrümmung und Refraktion sicher berücksichtigt.

### Bringen die kombinierten Wirkungen den erhofften Erfolg?

An einem konkreten Fall aus Island sei nochmals gezeigt, wie die verschiedenen Phänomene sich kombiniert auswirken:

Blick vom Bolafjall auf Island Richtung Gunnbjarnarfjall auf Grönland (Abb. 3 und Abb. 7).

Die Abbildung 5 illustriert die Berechnungen im Abschnitt «Mathematisches Werkzeug» (Abschnitt C). Diese ergeben folgendes:

- Figur A  
Wäre die Erde eben, würden wir zum Berg auf Grönland  $0,452^\circ$  nach oben blicken.
- Figur B  
Wegen Erdkrümmung und Refraktion wird diese Richtung um  $1,53^\circ$  gesenkt

(Winkel  $e - r$ ). Wir blicken also  $1,53^\circ - 0,452^\circ = 1,08^\circ$  abwärts (in den Boden hinein).

- Figur C  
Der erhöhte Standort gewährt uns einen freien Blick Richtung  $0,8^\circ$  abwärts (Winkel  $\alpha$ ). Das reicht jedoch nicht aus; es fehlen  $0,2^\circ$ , resp. etwa 1300 m an Bergeshöhe in Grönland.

### Es bleibt eine letzte Hoffnung – Luftspiegelungen!

Bei der «klassischen Fata Morgana» wird z. B. das Himmelsblau wegen einer heissen Luftschicht unmittelbar über dem Boden gespiegelt. An der Grenze von der kühlen zur warmen Luft kann es eine Reflexion von Lichtstrahlen mit einem sehr flachen Einfallswinkel geben. Der Beobachter sieht dann über dem Boden eine blaue Fläche, die ihm als Wasser erscheinen kann. Dieses Phänomen der «unteren Luftspiegelung» fällt für unser Problem ausser Betracht: Wir untersuchen ja nicht Berggipfel über, sondern unter unserer Horizontebene. Nun fand ich bei <http://www.physik.wissenstexte.de/halligen.htm> noch einen Hinweis auf die Erscheinung der «oberen Luftspiegelung» (Abb. 6).



Eine warme Luftschicht über einem Kaltluftsee wirkt als Spiegel für Lichtstrahlen, die von unten her auf die Grenze kalt/warm treffen. Wir würden dann mit Hilfe des «Spiegels am Himmel über uns» um die Erdkrümmung herum zum Grönlandberg sehen. – Ist das möglich? Nun musste ich wiederum Fachleute bemühen. Ich wandte mich an Meteorologen, erläuterte ihnen mein Problem und stellte die konkreten Fragen:

- Ist bei Island eine solche reflektierende Luftschicht denkbar?
- Wäre eine Sicht von Berg zu Berg durch Spiegelung an der warmen Luft möglich?

Ich hatte Glück. Auf Umwegen stiess ich auf einen alten Bekannten. MARKUS FURGER aus Kleindöttingen hat innerhalb weniger Tage einige wichtige Dokumente aufgespürt.

Er schreibt mir: *«Es war äusserst interessant, für deine Frage zu recherchieren. Und ich kann dir eine positive Antwort geben!*

*Es ist möglich, unter günstigen Umständen mit Konditionen, in welchen obere Luftspiegelungen (engl. superior mirages) auftreten, Objekte zu sehen, welche bis zu 500 km vom Beobachter entfernt sind (300 Seemeilen). Das wurde in den 1920er und frühen 1930er Jahren von Flugzeugen aus beobachtet, welche etwa 1500 m über Meereshöhe flogen. Es gibt aber auch zahlreiche Berichte von Beobachtern in Meereshöhe, welche Sichtweiten von bis zu 200 Seemeilen (370 km) vermelden. Die Bedingungen dafür sind eine klare, trockene Luft und eine starke Temperaturinversion von mehreren Grad. In höheren Breiten können solche Bedingungen auftreten. Für den Raum Island/Grönland ist häufig eine Temperaturinversion auf etwa 1000 bis 1500 m ü.NN vorhanden, welche die Lichtstrahlen hinreichend umlenken kann, dass weit entfernte Objekte deutlich erkannt werden können, auch wenn sie geometrisch unter dem Horizont liegen. Dies heisst dann, dass Grönland von Island aus gesehen werden kann (und umgekehrt), auch wenn das wohl nicht gerade jeden Tag der Fall ist.*

*Ich habe einige Artikel zum Thema gefunden, die das durch Beobachtungen und/oder physikalische Be-*

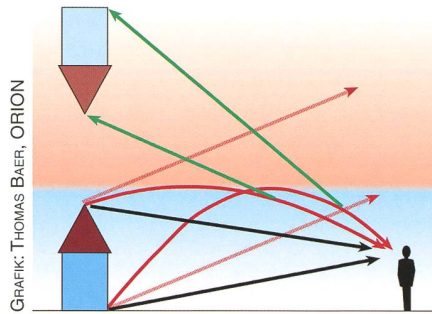


Abbildung 6: Das Prinzip der «oberen Luftspiegelung», schematisch und stark überhöht dargestellt. Eine warme Luftschicht über kalter Luft reflektiert von unten kommende Lichtstrahlen. Der Beobachter kann einen fernen Turm auf dem Kopf stehend weiter oben sehen. Schwarz: Lichtstrahlen vom Turm direkt zum Beobachter. Rot gestrichelt: So würden Lichtstrahlen ungestört nach oben verlaufen. Rot: Nach oben laufende Lichtstrahlen durch die Refraktion gebogen und zusätzlich an der Grenze von kalter zu warmer Luft gespiegelt. Grün: Richtung, aus der die Strahlen scheinbar beim Beobachter ankommen; in dieser Richtung erscheint ihm das umgekehrte Bild des Turms. Ein Berggipfel unter dem Horizont könnte bei günstigen Verhältnissen sichtbar werden.

*rechnungen belegen. Der Artikel von Haine (2008) geht noch weiter und diskutiert die Möglichkeit, dass die Wikinger auf diese Weise erfahren haben, dass Land im Westen ist (Sichtbarkeit von Nordamerika – Vinland, Baffinland - von Grönland aus). In diesem Artikel wird auch das für uns Zentraleuropäer ungewöhnliche Weltbild be-*

*schrieben, dass die Erde konkav ist – ein weiterer Brechungseffekt der Atmosphäre in nördlichen Breiten. Der Artikel von Lehn (2000) passt 100% zu deiner Fragestellung – ein Volltreffer. Hobbs (1933) beschreibt visuelle Beobachtungen über riesige Distanzen.» (Quellenangaben dazu am Schluss des Beitrags.)*

### Zurück nach Island

Der Bolafjall ist ein für die Westfjorde typisches Felsplateau oberhalb des Fischerortes Bolungarvi, er liegt auf 625 m ü. M. Zwischen 1985-88 wurde von der NATO eine Radarstation gebaut und gleichzeitig eine Strasse erstellt, welche heute den Besuch des Felsplateaus ermöglicht. Seit 2006 befindet sich in der Station die Isländische Küstenüberwachung; diese kontrolliert einen Raum im Umkreis von 460 km. Auch spezielle Kommunikationsgeräte verschiedener Organisationen befinden sich dort. Am 25. Juli wurde auf dem Bolafjall ein Schild für Touristen montiert.

Auf diesem steht unter anderem: *«Sie stehen auf dem Gipfel des Bolafjall, 625 Meter über Meer.*

*Ihr Standort ist Teil der Westfjord Hochebene, die vor mehr als 14 Millionen Jahren entstanden ist. Die untersten Lavaschichten dieses Berges, zu welchem die Riffe in Ufernähe zuzuordnen sind, gehören mit ihren ungefähr 16 Millionen Jahren zu den ältesten im ganzen Land.*

***Es gibt ein bekanntes Gerücht, dass man von hier aus mit blosssem Auge bei klarem Wetter***



Abbildung 7: Bolafjall, ein 625 m hoher Aussichtsort mit freiem Blick Richtung Grönland. Auf dem Bild sieht man Richtung Osten zur anderen Seite des Isafjördurdjup. Dort liegt das unbewohnte Gebiet von Snaefjallaströnd und der Gebirgszug Kjölur.

BILD: MARIANNE WITTMER, REISELEITERIN AUF ISLAND



**Grönland sehen kann. In Wirklichkeit ist das unmöglich, es sei denn, dass die Wirkungen einer Fata Morgana (Spiegelung, die manchmal in Polarregionen vorkommt) ein Abbild des Gletschers über den Horizont projiziert.**

Vor rund 25 Millionen Jahren waren Island und Grönland miteinander verbunden. Als die Kontinente auseinander drifteten, sanken die Ränder langsam in den Ozean, und Island wurde eine Insel.

Gletscher hobelten Täler und Fjorde in die Lavaschichten. Alle Fjorde, die Sie sehen, wurden von Gletscherzungen während der letzten 3 Millionen Jahre geformt.»

RALF TRYLLA, ein Umweltbeauftragter der Westfjorde hat MARIANNE WITTEWITZ folgende Antwort (von uns leicht gekürzt) geschickt. Diese fasst unsere Ausführungen abschliessend schön zusammen:

«Angenommen, man hat sehr klares Wetter, dann ist die Sichtweite max. 250 bis 300 km. Soweit so

gut. Der höchste Berg Grönlands ist 3700 m hoch (Ostküste; Gunnbjörns Fjeld). Bolafjall oberhalb Bolungarvik liegt 625 m hoch. Wenn ich diese beiden Höhen berücksichtige, dann wäre es möglich vom Bolafjall aus ca. 90 km weit zu sehen. Die Spitze von Grönland (3700 m) gäbe mir eine Sichtdistanz von 220 km bis zum Horizont. Wenn ich diese beiden Distanzen zusammenzähle, komme ich auf so ca. auf 300 km. Das wird knapp, aber es könnte aufgehen.

Selber gesehen habe ich Grönland noch nicht (denke ich jetzt mal), obwohl ich schon viele Male auf dem Bolafjall war. Ich redete mir jedoch immer ein, dass das, was ich sehe, Grönland sei.»

**Erich Laager**  
Schlüchtern 9  
CH-3150 Schwarzenburg

## Quellen

- [1] WILLIAM HERBERT HOBBS: Visibility and the discovery of polar lands (Geografiska Annaler Vol. 15, 1933, pp. 217-224).
- [2] WALDEMAR H. LEHN: VSkyrylike mirages and discovery of Greenland (Applied Optics / Vol. 39, No. 21 / 20 July 2000, pp. 3612-3619)
- [3] THOMAS HAINE: What did the Viking discoverers of America know of the North Atlantic Environment? (Weather / Vol. 63, No.3 / 2008, pp. 60-65)

## «Mathematisches Werkzeug»

Die Formeln werden hier so geschrieben, wie bei Berechnungen in Excel-Tabellen (Ausnahme Wurzeln). Dort müssen bei Winkelfunktionen die Winkel im Bogenmass (rad) angegeben werden. In den untenstehenden Beispielen wird überall mit Grad gerechnet, so wie man normalerweise mit dem Taschenrechner rechnet.

### A) Sphärisches Dreieck für Abstandsbestimmung (Abb. 1)

Beispiel:

2 Orte mit dem kürzesten Abstand zwischen den beiden Küsten.  
Rechnung mit 5 signifikanten Ziffern.

Gegeben:

Ort A (an Islands Westküste), 23,142° westl. Länge, 66,430° nördl. Breite  
Ort B (an Grönlands Ostküste), 26,383° westl. Länge, 68,668° nördl. Breite

Seite b = 90° - geogr. Breite von A = 90° - 66,430° = 23,570°

Seite c = 90° - geogr. Breite von B = 90° - 68,668° = 21,332°

Winkel α = Geogr. Länge von B - geogr. Länge von A  
= 26,383° - 23,142° = 3,241°

Gesucht:

Seite a = Entfernung von A zu B in Grad

$$a = \arccos(\cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha))$$

$$= \arccos(\cos(23,570^\circ) \cdot \cos(21,332^\circ) + \sin(23,570^\circ) \cdot \sin(21,332^\circ) \cdot \cos(3,241^\circ))$$

$$= \arccos(0,85378 + 0,14523)$$

$$= \arccos(0,9990046)$$

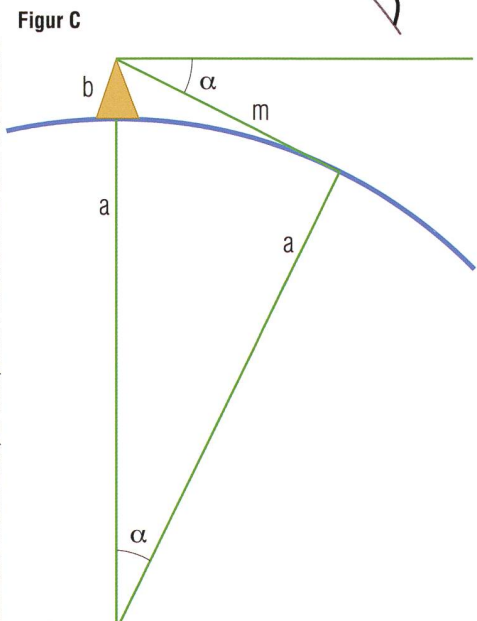
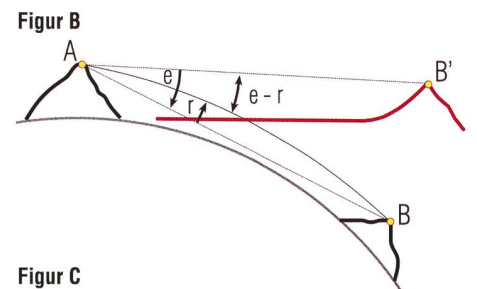
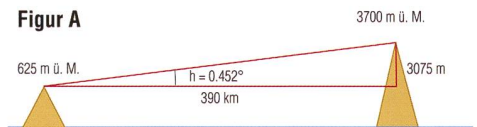
$$a = 2,5567^\circ$$

Abbildung 5: Diese illustriert das Rechnungsbeispiel im Kapitel «Mathematisches Werkzeug», Abschnitt C.

Figur A: Fläche anstatt gewölbte Erdoberfläche

Figur B: Auswirkung von Erdkrümmung und Refraktion

Figur C: Auswirkung des erhöhten Standortes



GRAFIKEN: THOMAS BAER, ORION, NACH VORLAGEN VON E. IMHOF UND E. LAAGER



## Nachgedacht - nachgefragt

s = Entfernung in km entlang der Erdkrümmung auf Meereshöhe gemessen.

Mittlerer Erdradius  $r = 6371,2$  km

$$s = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot a / 360 = 2 \cdot 6371,2 \cdot 3,14159 \cdot 2,5567 / 360 = \underline{284,3 \text{ km}}$$

### B) Auswirkungen von Refraktion und Erdkrümmung (Abb. 5, Figur B)

Formeln gemäss Swisstopo, Wabern bei Bern

Konstante Werte:

d = Durchmesser der Erde = 12740 km

b = Brechungskoeffizient = 0,13 (Erklärung dazu im Haupttext)

k = Korrekturfaktor =  $1 - b = 0,87$

Variabel:

s = Distanz eines Geländepunktes vom Beobachter

Gesucht:

E = Scheinbare Absenkung des Geländepunktes im Abstand s (in km), bewirkt durch die Erdkrümmung e

R = Scheinbare Anhebung des Geländepunktes im Abstand s (in km), bewirkt durch die Refraktion r

$$E = s \cdot s / d \quad R = E \cdot b \quad E - R = E \cdot k$$

Beispiele dazu (alle Angaben in km)

Entfernung Geländepunkt	s	20	40	60	100	400	390
Erdkrümmung (Absenkung)	$E = s \cdot s / d$	0.031	0.126	0.283	0.785	12.559	11.939
Refraktion (Anhebung)	$R = E \cdot b$	0.004	0.016	0.037	0.102	1.633	1.522
Beide Effekte kombiniert	$E - R = E \cdot k$	0.027	0.109	0.246	0.683	10.926	10.387

Die fetten Zahlen zeigen das quadratische Wachstum von (E-R) mit der Distanz s.

Bolafjall-Gunnbjarnarfjall (hinterste Spalte, fette Zahlen): Bei einer Distanz von 390 km wird ein Berggipfel durch die Refraktion um etwa 1550 m scheinbar angehoben. Er erscheint jedoch 10,4 km tiefer als auf einer «ebenen Erde».

### C) Kombinierte Wirkungen (Abb. 5)

Figur A

Bolafjall auf Island ist 625 m hoch

Gunnbjarnarfjall in Grönland ist rund 3700 m hoch

Differenz der Berghöhen = 3,075 km

Distanz zwischen den Bergen rund 390 km

$$\tan(h) = 3,075 / 390 = 0,00788$$

$$h = \underline{0,452^\circ}$$

Figur B

Formel für Korrektur von Erdkrümmung und Refraktion (oben Abschnitt B)

$$E - R = k \cdot s \cdot s / d$$

für s = 390 km ist E-R = 10,4 km

Wie viele Grad tiefer «sehen» wir den Berg?

$$\tan(e - r) = 10,4 / 390 = 0,0267$$

$$\text{Winkel } (e - r) = \underline{1,53^\circ}$$

Figur C

Erdradius a = 6370 km

Berghöhe b = 0,625 km

$$\text{Sichtweite aufs Meer } m = \sqrt{(a + b) \cdot (a + b) - a \cdot a} = 89,2 \text{ km}$$

$$\tan(\alpha) = m / a = 89,2 / 6370 = 0,0140 \Rightarrow \underline{\alpha = 0,803^\circ}$$

### D) Lot auf die Verbindungsstrecke zwischen Berggipfeln (Abb. 2, Figuren unten)

Alle Längenmasse in km

Erdradius  $r = 6370$

Höhe Berg auf Island  $h_i = 0,625$

Höhe Berg auf Grönland  $h_g = 3,7$

Abstand Berggipfel Island vom Erdzentrum  $e = r + h_i$

$$= 6370 + 0,625 = 6370,625$$

Abstand Berggipfel Grönland vom Erdzentrum  $f = r + h_g$

$$= 6370 + 3,7 = 6373,7$$

Strecke von Gipfel zu Gipfel = d

Wir rechnen weiter im Dreieck mit den Seiten d, e, f

$\delta$  = Winkel gegenüber d =  $3,98^\circ$  (berechnet nach der Formel in Abschnitt A)

$$\cos(\delta) = 0,99759$$

Seite d berechnet mit Hilfe des Cosinussatzes

$$d = \sqrt{(e \cdot e + f \cdot f - 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos(\delta))}$$

$$= \sqrt{(6370,625 \cdot 6370,625 + 6373,7 \cdot 6373,7 - 2 \cdot 6370,625 \cdot 6373,7 \cdot 0,99759)}$$

$$= 442,86$$

s = halber Dreiecksumfang =  $(d + e + f) / 2$

$$= (442,8 + 6370,625 + 6373,7) / 2 = 6593,6$$

Dreiecksfläche A berechnet nach Satz des HERON

$$A = \sqrt{(s \cdot (s - d) \cdot (s - e) \cdot (s - f))}$$

$$= \sqrt{(6593,59 \cdot 6150,7 \cdot 222,96 \cdot 219,89)} = 1410107$$

$$\text{Lot} = \text{Höhe auf } d = 2 \cdot A / d = 2 \cdot 1410107 / 442,86$$

$$= 6368,2$$

Das Lot ist kürzer als der Erdradius. – Keine Sicht!

Hinweis:

Wer den privaten Rechnungsmarathon für ebene und sphärische Dreiecke vermeiden will, findet bei Google Berechnungsformulare, in welche die bekannten Grössen direkt eingegeben werden können. Dort habe ich auch die oben verwendeten Formeln gefunden.

(Suchbegriffe: Sphärische Dreiecke berechnen, Dreiecke berechnen.)

### ■ Erich Laager

Schlüchtern 9

CH-3150 Schwarzenburg

### Flugrouten optimieren

Ein «Nebenprodukt» zu Abschnitt A) Distanzen im sphärischen Dreieck

Abflug- und Ankunftsart liegen auf demselben Breitenkreis. Die kürzeste Flugroute führt nicht entlang des Breitenkreises (Ausnahme Äquator), sondern sie liegt auf dem Grosskreis der durch die beiden Orte geht. Je weiter nördlich der Flug verläuft und je weiter die Orte voneinander entfernt sind, desto grösser sind Weg-, Zeit- und Treibstoff-Ersparnisse.

Beispiele für zwei Orte mit  $180^\circ$  Längendifferenz (halber Breitenkreis):

Geogr. Breite der Orte	10°	30°	60°	75°
Weg-Ersparnis	10%	23%	33%	36%