

# Geometrie

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Pestalozzi-Kalender**

Band (Jahr): **5 (1912)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

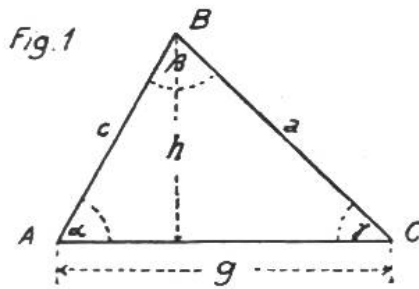
## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Geometrie.

## Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern.

### Dreieck.



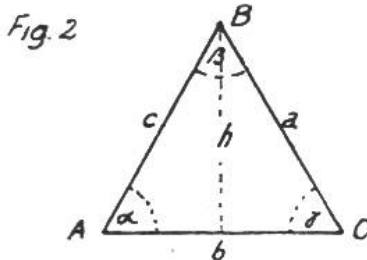
Grundlinie =  $g$ ; Höhe =  $h$ ; Fläche =  $F$

$$F = \frac{g \times h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g;$$

$$g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ = 2R.$$

### Gleichseitiges Dreieck.

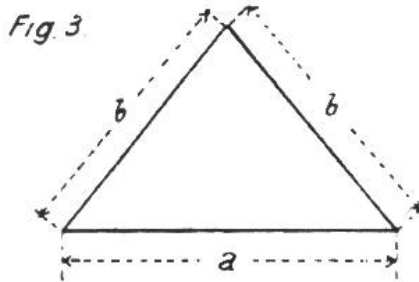


Seiten =  $a = b = c$ ,  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 0,433 a^2$$

(genauer  $0,4330127 a^2$ )

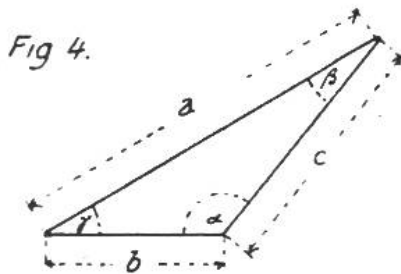
$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$



### Gleichschenkliges Dreieck.

Grundlinie =  $a$ ; gleiche Seiten =  $b$

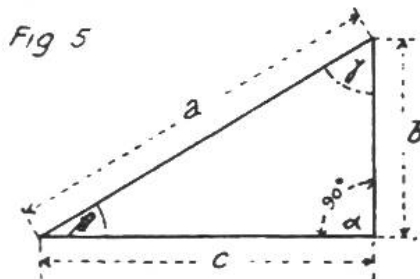
$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a)(2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \left(b - \frac{a}{2}\right)}$$



### Ungleichseitiges Dreieck.

Seiten  $a, b$  und  $c$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$ ;

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

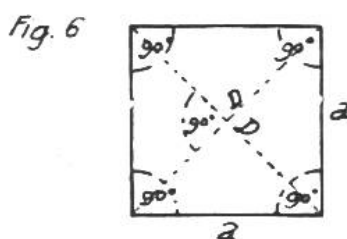


### Rechtwinkliges Dreieck. $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$

Hypotenuse =  $a$ ; Katheten =  $b$  und  $c$ ,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



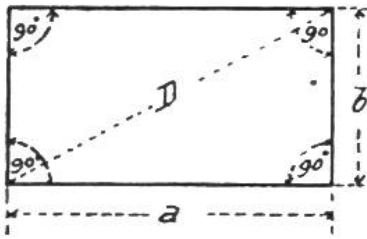
### Quadrat

Seite =  $a$ ; Diagonale =  $D$ ;

$$F = a \times a = a^2; \quad a = \sqrt{a^2}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1,4142.$$

Fig. 7



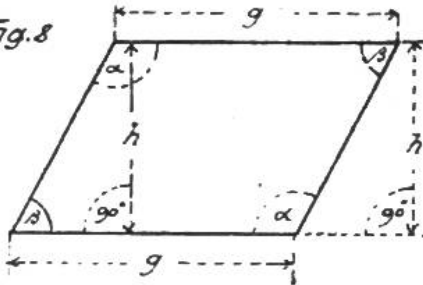
Rechteck.

Seiten  $a$  und  $b$ , Diagonale  $D$ ;

$$F = a b; \quad a = \frac{F}{b}; \quad b = \frac{F}{a};$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Fig. 8

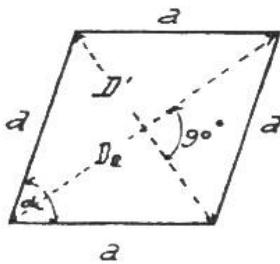


Parallelogramm.

Grundlinie =  $g$ . Höhe (rechtwinklig auf Grundlinie) =  $h$

$$F = g \cdot h; \quad g = \frac{F}{h}; \quad h = \frac{F}{g};$$

Fig. 9

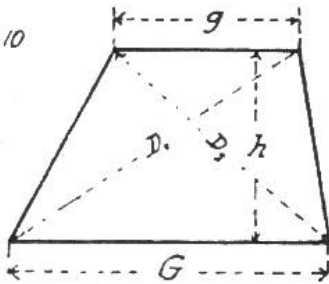


Rhombus.

Gleiche Seiten  $a$ , Diagonalen  $D_1$  u.  $D_2$

$$F = a^2 \sin \alpha; \quad F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2};$$

Fig. 10



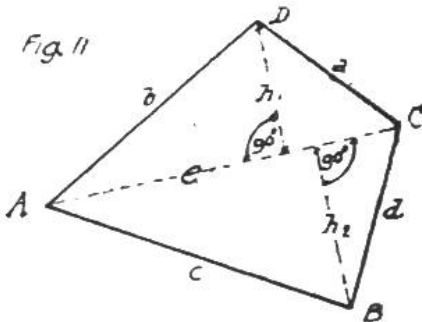
Trapez.

Parallelseiten =  $G$  und  $g$ , Höhe =  $h$

Diagonalen =  $D_1$  und  $D_2$

$$F = \frac{G + g}{2} \cdot h;$$

Fig. 11

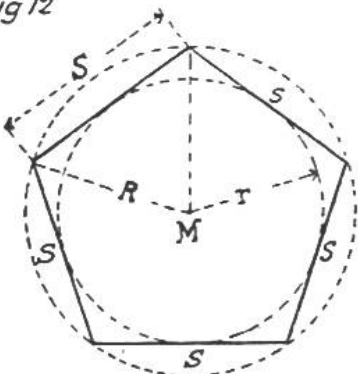


Trapezoid.

Diagonale  $\overline{AC}$  und rechtwinklig darauf die Höhen  $h_1$  und  $h_2$

$$F = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{e}{2} \cdot (h_1 + h_2);$$

Fig. 12



Reguläre Vielecke (Polygon)

Seite =  $S$   
 Radius des umschriebenen Kreises =  $R$ ;  
 Radius des eingeschriebenen Kreises =  $r$ .

Polygon	$R$	$r$	$S$	$F$
Dreieck	0.577 $S$	0.289 $S$	1.732 $R$ od 3.463 $r$	0.433 $S^2$ od 1.299 $R^2$
Quadrat	0.707 $S$	0.500 $S$	1.414 $R$ " 2.000 $r$	1.000 $S^2$ " 2.000 $R^2$
Fünfeck	0.851 $S$	0.695 $S$	1.776 $R$ " 1.453 $r$	1.721 $S^2$ " 2.378 $R^2$
Sechseck	1.000 $S$	0.866 $S$	1.000 $R$ " 1.155 $r$	2.598 $S^2$ " 2.598 $R^2$
Siebeneck	1.152 $S$	1.038 $S$	0.868 $R$ " 0.963 $r$	3.364 $S^2$ " 2.736 $R^2$
Achteck	1.307 $S$	1.208 $S$	0.765 $R$ " 0.828 $r$	4.828 $S^2$ " 2.828 $R^2$
Neuneck	1.462 $S$	1.374 $S$	0.684 $R$ " 0.728 $r$	6.182 $S^2$ " 2.892 $R^2$
Zehneck	1.618 $S$	1.540 $S$	0.618 $R$ " 0.649 $r$	7.694 $S^2$ " 2.939 $R^2$
Elfleck	1.775 $S$	1.704 $S$	0.563 $R$ " 0.587 $r$	9.366 $S^2$ " 2.973 $R^2$
Zwölfeck	1.932 $S$	1.866 $S$	0.518 $R$ " 0.536 $r$	11.190 $S^2$ " 3.000 $R^2$

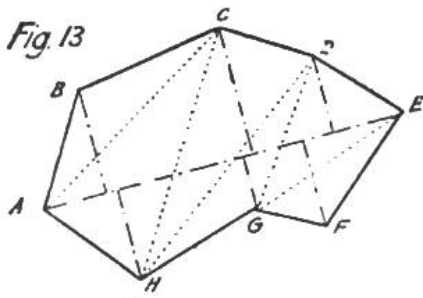


Fig. 14

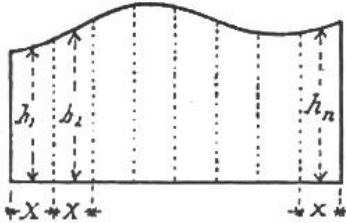


Fig. 15

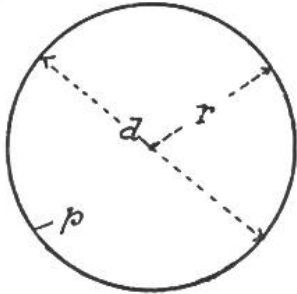


Fig. 16

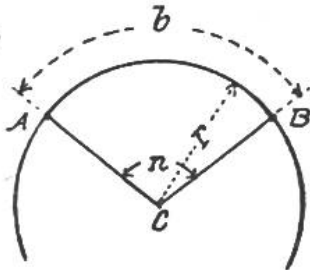


Fig. 17

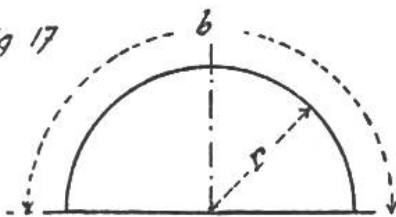
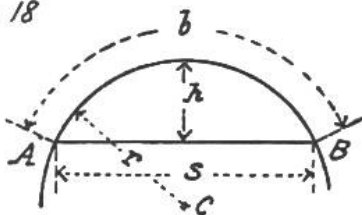


Fig. 18



### Unregelmässige Vielecke od Flächen:

Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittelst der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe. Fig. 13

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig. 14

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

### Kreis:

Durchmesser =  $d$ ; Radius =  $r$

Umfang =  $p$ ; Inhalt =  $F$ .

$$p = d \pi = d \cdot 3.14159$$

$$= 2r \pi;$$

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = 0.785 d^2 = r^2 \pi.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0.564 \sqrt{F};$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1.128 \sqrt{F}.$$

### Kreissector: (A.B.C) Fig. 16.

Radius =  $r$ ; Bogen =  $b$ ;

Zentriwinkel =  $n$ ;

$$F = \frac{r^2 \pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \cdot \frac{360}{n} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = 360 \cdot \frac{F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \pi} \cdot 180$$

$$b = 2 r \pi \frac{n}{360} = r \pi \cdot \frac{n}{180}.$$

Halbkreisbogen =  $b = \pi \cdot r$ .

Halbkreisfläche =  $F = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ .

Viertelkreisbogen =  $b = \frac{\pi \cdot r}{2}$

Viertelkreisfläche =  $F = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$ .

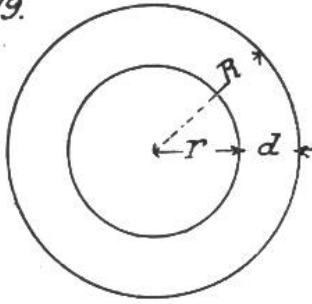
### Kreisabschnitt:

Sehne =  $s$ . Höhe =  $h$ .  $F = \frac{2}{3} s \cdot h$ .

$$\text{genau. } F = \frac{r^2 \pi n}{360} - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$$

$$s = 2 \sqrt{h(2r-h)} \quad r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Fig 19.

Kreisring:Äusserer Radius =  $R$ ;Innerer Radius =  $r$ 

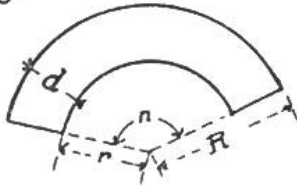
$$F = R^2\pi - r^2\pi.$$

$$= \pi(R+r)(R-r).$$

wenn  $d$  = radiale Breite des Kreisrings,

$$\text{so ist } F = \pi(2r+d)d.$$

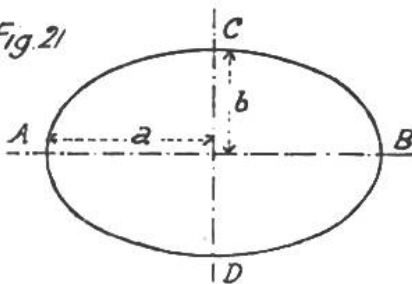
Fig 20

Kreisringstück: (Konzentrisch)Äusserer Radius =  $R$ Innerer Radius =  $r$ Zentriwinkel =  $n$ .

$$F = (R^2\pi - r^2\pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\pi \cdot n}{360}$$

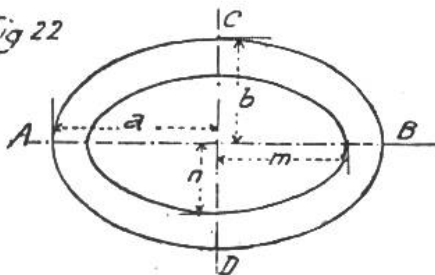
$$= (R+r)d \frac{\pi \cdot n}{360} = (R+r)d \cdot n \cdot 0.0087.$$

Fig 21

Ellipse:Halbe Achsen der Ellipse =  $a$  und  $b$ 

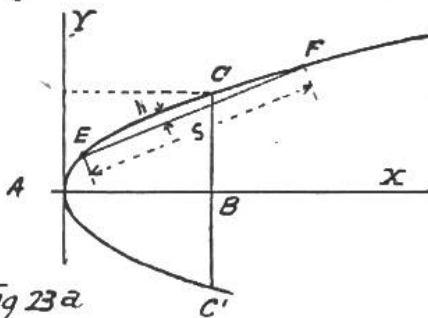
$$F = a \cdot b \cdot \pi;$$

Fig 22

Elliptischer Ring:Halbe Achsen der äusseren Ellipse  $a, b$ ;  
Halbe Achsen der inneren Ellipse  $m, n$ 

$$F = \pi(ab - mn).$$

Fig 23.

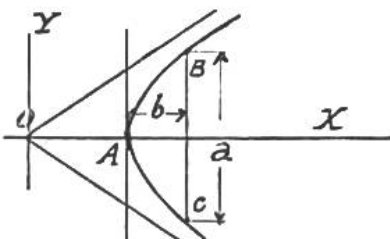
Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h, \quad s = EF.$$

Parabelfläche CAC':

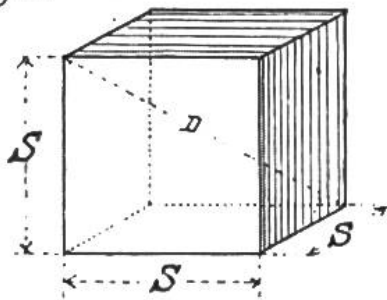
$$F = \frac{2}{3} CC' \cdot AB.$$

Fig 23a

Hyperbelsegment ABCSehne =  $a$ . Höhe =  $b$ 

$$F(\text{annähernd}) = \frac{3}{5} b \cdot a.$$

Fig 24

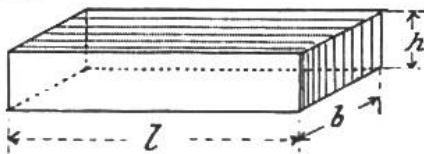
Würfel:Seite =  $s$ ; Inhalt =  $K$ ; Oberfläche =  $O$ ;

$$K = s^3; \quad O = 6s^2;$$

$$s = \sqrt[3]{K};$$

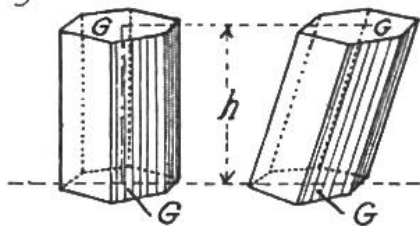
$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = s \cdot 1.732050$$

Fig 25

Parallelfach:Länge =  $l$ , Breite =  $b$ , Höhe =  $h$ ;

$$K = l \cdot b \cdot h.$$

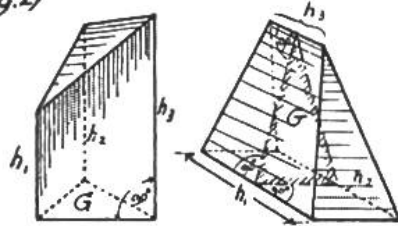
Fig 26

Prisma:Grundfläche =  $G$ ; Höhe =  $h$ ;

$$K = G \cdot h;$$

Oberfläche  $O$  = Umfang der Grundfläche  $U \times h + 2G$ .

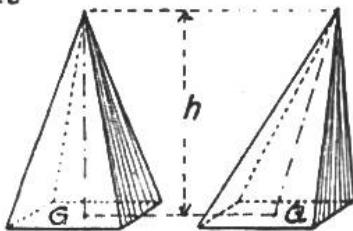
Fig 27

Schiefabgeschnittenes Prisma:Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes =  $G$ .Länge der Kanten:  $h, h_1, h_2, \dots, h_n$ 

$$K = G \times \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie.

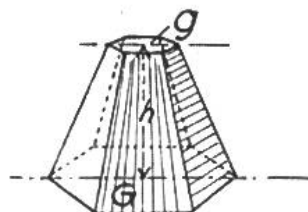
Fig 28

Pyramide:Grundfläche =  $G$ ; Höhe =  $h$ ;

$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}$$

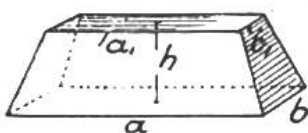
$$G = \frac{3K}{h};$$

Fig 29

Abgestumpfte Pyramide:Inhalt der beiden Grundflächen =  $G$  u.  $g$ .

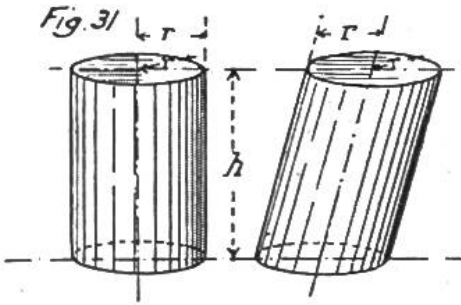
$$K = \frac{h}{3} \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

Fig 30

Obelisk, Wall, regelmässig aufgeschütteter Haufen.

$$K = \frac{1}{6} h [(2a + a)b + (2a + a)b]$$

Fig 31



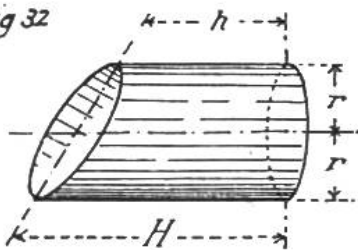
Cylinder, (Walze)

$K = r^2 \pi \cdot h$     Mantel =  $2 r \pi \cdot h$

$r = \sqrt{\frac{K}{\pi \cdot h}}$  ;     $h = \frac{K}{r^2 \pi}$  ;

Mantel =  $2 r \pi \cdot h$ .

Fig 32



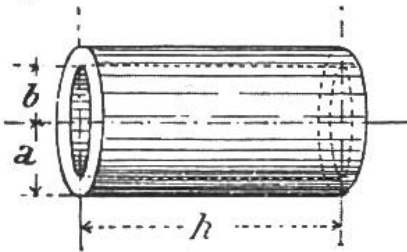
Schiefgeschnittener Cylinder

Grösste Höhe = H, kleinste Höhe = h;

$K = r^2 \pi \cdot \frac{H+h}{2}$

Mantel =  $\pi r (H+h)$

Fig 33



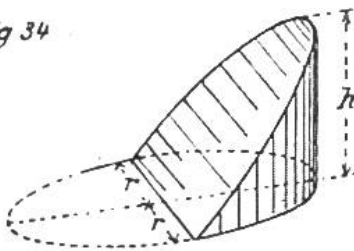
Hohlzylinder:

Innerer Halbmesser = b  
äusserer Halbmesser = a, Länge = h,

$K = \pi \cdot h (a+b) \cdot (a-b)$

$K = \pi \cdot h (a^2 - b^2)$

Fig 34



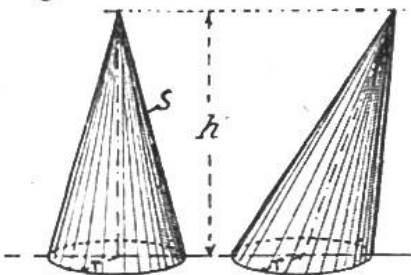
Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r  
Höhe des Hufes = h

$K = \frac{2}{3} r^2 h$

$M = 2 r \cdot h$

Fig 35



Kegel.

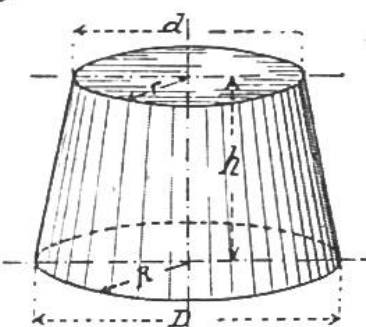
Halbmesser der Grundfläche = r  
Höhe = h, Seite = S

$S = \sqrt{r^2 + h^2}$

Mantel M =  $r \pi \cdot S$

Ganze Oberfläche  $\Theta = \pi \cdot r (r + \sqrt{r^2 + h^2})$  -  
=  $\pi r (S + r)$ .

Fig 36



$K = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$

$r = \sqrt{\frac{3K}{h \pi}}$  ,     $h = \frac{3K}{r^2 \pi}$

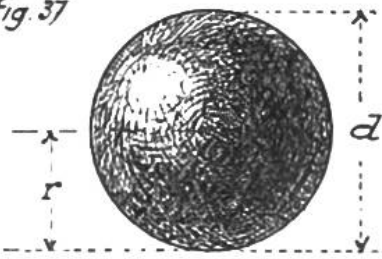
Abgestumpfter Kegel

Halbmesser der Grundflächen R und r  
Durchmesser der Grundflächen = D und d

$K = (R^2 + r^2 + Rr) \frac{h \cdot \pi}{3} = \frac{D^2 + d^2 + d \cdot D}{12} \cdot h \pi$

Mantel =  $\pi S (R+r)$

Fig. 37

Kugel:

$$\text{Radius} = r; \text{ Durchmesser} = d$$

$$\text{Oberfläche } O = 4r^2\pi = d^2\pi$$

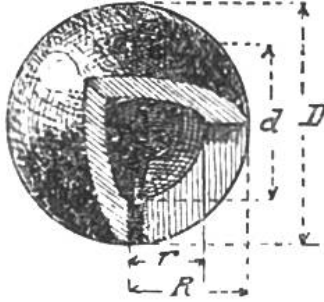
$$= 12.566 r^2$$

$$\text{Inhalt } K = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{O \cdot r}{3}$$

$$K = 4.189 r^3 = 0.5236 d^3$$

$$\text{Radius } r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{O}{\pi}}; = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$$

Fig. 38

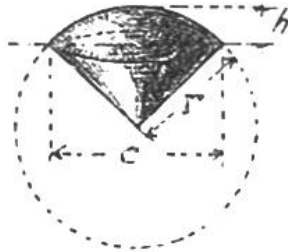
Hohlkugel:

$$\text{Äusserer Radius} = R \text{ innerer} = r$$

$$\text{„ Durchmesser } D \text{ „} = d$$

$$K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$$

Fig. 39

Kugelsektor:

$$\text{Radius der Kugel} = r$$

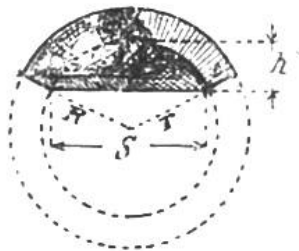
$$\text{Begrenzende Kalotte: Höhe} = h$$

$$\text{„ „ Durchmesser} = c$$

$$\text{Oberfläche} = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$$

$$K = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = 2.0944 r^2 h$$

Fig. 40

Hohlkugelsektor:

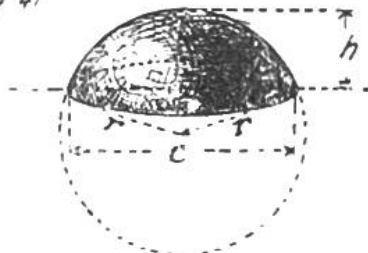
$$\text{Äusserer Radius} = R \text{ innerer} = r$$

$$\text{Wanddicke} = s; R = r + s$$

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

$$\text{Inhalt } K = 2.094 \frac{h}{r} (R^3 - r^3)$$

Fig. 41

Kugelsegment:

$$\text{Radius der Kugel} = r$$

$$\text{Kalottendurchmesser} = c \text{ Höhe} = h$$

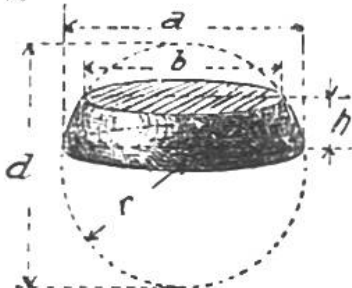
$$\text{Gewölbte Oberfläche} = O$$

$$O = 2r\pi h = \pi \left( \frac{c^2}{4} + h^2 \right)$$

$$K = \frac{1}{6} \pi h (3c^2 + h^2) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$$

$$= \pi h^2 \left( r - \frac{1}{3}h \right) = \pi h \left( \frac{c^2}{8} + \frac{h^2}{6} \right)$$

Fig. 42

Kugelzone:

$$\text{Höhe der Zone} = h$$

$$\text{Halbmesser der Kugel} = r$$

$$\text{Halbmesser der Endflächen } a \text{ und } b$$

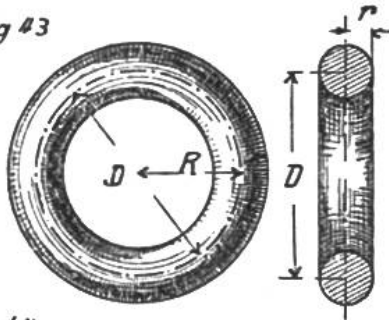
$$\text{Mantel} = 2r\pi h$$

$$\text{Oberfläche} = M + a^2\pi + b^2\pi$$

$$\text{Inhalt } K = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$$



Fig 43



### Cylindrischer Ring.

Radius des Kreisförm. Querschnittes =  $r$

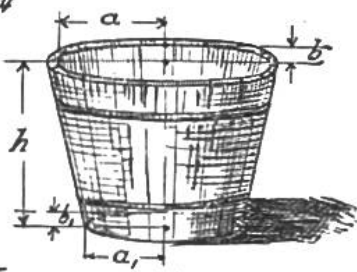
Durchmesser des Ringes =  $D$

Radius des Ringes =  $R$ . siehe Figur.

$$K = 2\pi^2 Rr^2 = 2.467 Dd^2.$$

$$\text{Oberfläche } O = 4\pi^2 Rr = 9.87 Dd.$$

Fig. 44

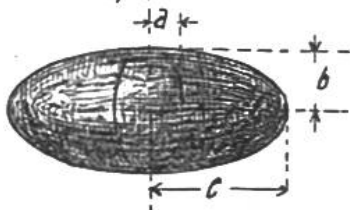


### Kübel

Die Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen  $a, b$  und  $a_1, b_1$ , Höhe zwischen den Endflächen =  $h$ .

$$\text{Inhalt } K = \frac{1}{6} \pi h [2(ab + a_1b_1) + ab_1 + a_1b]$$

Fig 45

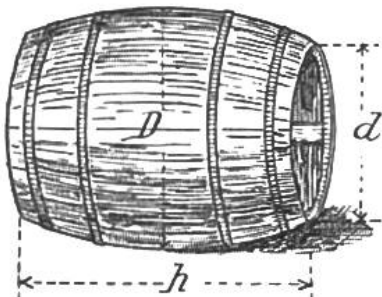


### Ellipsoid

Bezeichnung der 3 Halbachsen =  $a, b, c$ .

$$\text{Inhalt } K = \frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Fig 46



### Fass

Spunddurchmesser =  $D$

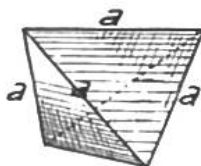
Bodendurchmesser =  $d$

Höhe =  $h$  (resp Länge)

$$\text{Inhalt } K = 1.0453 h (0.4 D^2 + 0.2 Dd + 0.15 d^2)$$

### Reguläre Polyeder:

Fig. 47

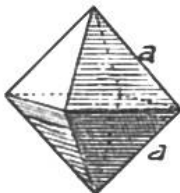


Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante =  $a$ ;  $O = a^2 \sqrt{3} = 1.732 a^2$ .

$$K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} = 0.11785 a^3$$

Fig. 48



Oktaeder: (8 gleichseit. Dreiecksflächen)

Kante =  $a$ ;  $O = 2a^2 \sqrt{3} = 3.464116 a^2$ .

$$K = \frac{a^3}{3} \sqrt{2} = 0.4714045 a^3$$

Fig. 49

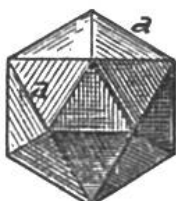


Dodekaeder (12 regelmässige Fünfecke)

Kante =  $a$ ;  $O = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$   
 $= 20.645729 a^2$

$$K = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) = 7.663119 a^3$$

Fig. 50



Ikosaeder 20 gleichseitige Dreiecksflächen.

Kante =  $a$ ;  $O = 5a^2 \sqrt{3} = 8.6602545 a^2$

$$K = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}) = 2.181695 a^3$$